

**Всероссийский (третий) этап Всероссийской олимпиады
студентов по теоретической механике
Казань, КНИТУ, 2-6 декабря 2015 г.**

Задачи теоретического конкурса

Задача С1 (8 баллов). 1). Однородная прямоугольная пластина $ABCD$ находится в равновесии (рис. 1а). $AB = \sqrt{3}a$, $BC = 2a$, AB вертикален. На нити, протянутой от точки C и переброшенной через неподвижный блок, подвешен груз веса P . Углы указаны на рисунке. Трением пренебрегаем. Определите вес Q груза, подвешенного на нити к пластине в точке D . (3 балла)

2). Две однородные прямоугольные пластины 1 и 2 соприкасаются друг с другом вдоль вертикальных сторон KU и LW (рис. 1б). Пластины одинаковы по размерам, $AB = \sqrt{3}a$, $BK = a$. На нити подвешен груз веса P . К пластине 2 приложен также момент $M = kPa$, направленный по часовой стрелке, где $k > 0$ – заданный коэффициент. Трением пренебрегаем. Определите веса G_1 , G_2 пластин 1 и 2 , соответственно, и угол α наклона опорной плоскости подвижного шарнира A при равновесии системы. При каких значениях k такое равновесие возможно? (5 баллов)

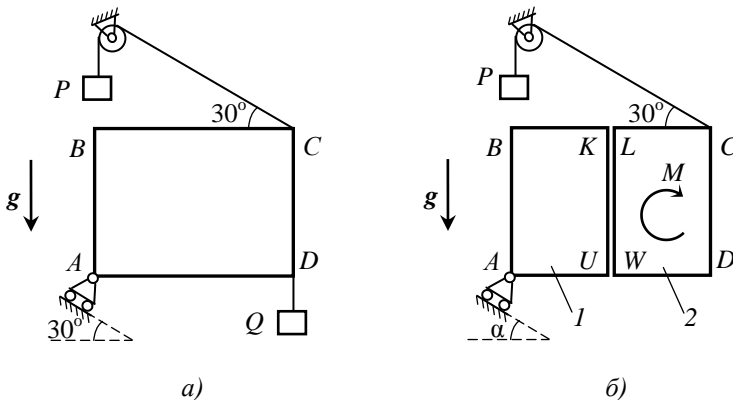


Рис. 1

Задача С2 (9 баллов). Однородный брус AB имеет форму вытянутого в длину прямоугольного параллелепипеда (рис. 2). Размер его квадратного поперечного сечения пренебрежимо мал по сравнению с длиной AB . Брус положили на шероховатую наклонную плоскость так, что отрезок AB горизонтален. DE – прямая на наклонной плоскости, перпендикулярная AB и проходящая через середину C отрезка AB . Коэффициент трения между брусом и плоскостью в точках левее DE (т.е. ближе к A) равен f_1 , а в точках правее DE (т.е. ближе к B) равен f_2 , причем $f_1 \leq f_2 \leq 1$. Считаем, что давление бруса на наклонную плоскость распределено равномерно. Определите максимальное значение угла α наклона плоскости, при котором брус будет находиться в равновесии. Дайте строгое обоснование решения.

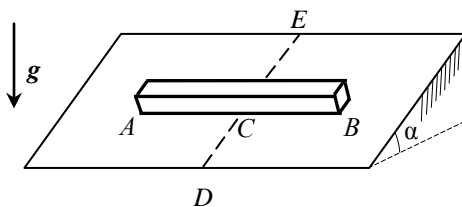


Рис. 2

Задача К1 (5 баллов). Поршневой компрессор имеет два рабочих поршня C и D (рис. 3). Шарнир O находится в середине объединенного кривошипа AOB . Длины шатунов AC и BD равны между собой. Найдите отношение скоростей поршней v_C/v_D в момент, когда углы между кривошипом и шатунами равны α и β ($0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$, $v_D \neq 0$).

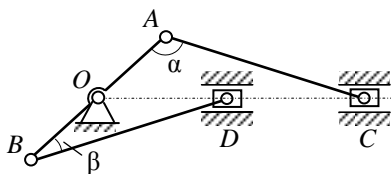


Рис. 3

Задача К2 (9 баллов). По плоскости с углом наклона α скатывается шар, радиус которого увеличивается со временем так, что верхний край шара все время касается неподвижной горизонтальной прямой γ (рис.4). (Расширение шара происходит одинаково во всех направлениях вдоль лучей, исходящих от его центра, как при надувании воздушного шара). Проскальзывание между шаром и наклонной плоскостью отсутствует. При этом центр шара движется с постоянной скоростью v . В начальный момент радиус шара равен r_0 . Рассмотрим точку A шара, в начальный момент находящуюся в положении A_0 сверху шара. Через какое время T точка A во второй раз окажется сверху шара? Каким будет в этот момент ускорение a_A точки A ?

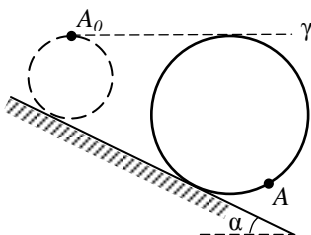


Рис. 4

Задача Д1 (8 баллов). Нить AM , закрепленная в точке A , переброшена через неподвижный стержень OB (рис. 5). К концу нити прикреплена материальная точка M массы m . Стержень OB и участок нити между точкой A и стержнем расположены в горизонтальной плоскости xy . Вначале точка M находилась в положении M_0 , самом нижнем из возможных, и ей придали некоторую начальную скорость вдоль оси x . При этом сила натяжения нити оказалась равной $3mg$.

1). В предположении, что нить прикреплена к стержню в точке контакта с ним, определите скорость точки M перед её соприкосновением со стержнем в положении M_1 . (3 балла)

2). В предположении, что нить может скользить без трения вдоль стержня, определите силу давления нити на стержень в момент, когда точка M окажется в положении M_2 перед её соприкосновением со стержнем, если величина её скорости при этом уменьшилась в два раза по сравнению с начальной. (5 баллов)

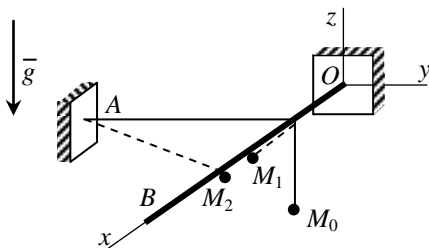


Рис. 5

Задача Д2 (6 баллов). Диск радиуса $R = 0,5$ м вращается под действием постоянной силы $F = 100$ Н, которая приложена к сходящей с диска нити (рис. 6). Момент трения в подшипниках оси O при вращении постоянен по величине и равен $M_{тр} = 10$ Н·м. Момент инерции диска $J_z = 10$ кг·м². В момент $t = 1$ с диск вращается с угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с в направлении по часовой стрелке.

- 1). Найдите угловую скорость диска в момент $t = 2$ с. (2 балла)
- 2). Какова была скорость точки A на окружности диска в момент $t = 0$? (4 балла)

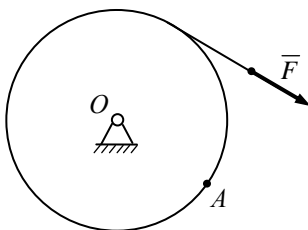
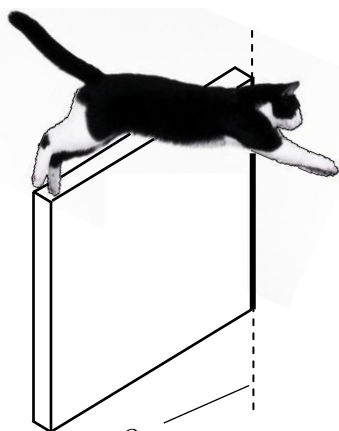


Рис. 6

Задача ДЗ (6 баллов). Кошка, сидевшая на самом краю неподвижной вначале дверцы шкафа, прыгает перпендикулярно плоскости дверцы (рис. 7). Массы кошки и дверцы одинаковы. Считаем, что размеры кошки малы по сравнению с шириной дверцы. Дверцу считаем однородной прямоугольной пластиной. Петли дверцы идеально смазаны. Горизонтальная сила реакции, действующая на кошку со стороны дверцы (в течение малого времени прыжка до момента отрыва кошки от дверцы), такова, что модуль импульса этой силы равен S , а произведенная этой силой работа равна A . Какова скорость центра масс кошки сразу после прыжка?



Ось вращения
дверцы

Рис. 7

Задача Д4 (9 баллов). Материальные точки A, B, C, D соединены шарнирными стержнями AB, BC, CD, AD равной длины (рис. 8). Массы точек $m_A = m_C = m_1$, $m_B = m_D = m_2$. Весами стержней пренебрегаем. Система находится на гладкой горизонтальной поверхности. Удерживая стержень AB в состоянии покоя при $\varphi = 45^\circ$, стержням BC и AD придали угловые скорости $\omega_{BC} = \omega_{AD} = \omega$. Сразу после этого систему свободно отпустили. Какими при этом будут угловые ускорения ε_{AB} и ε_{BC} стержней AB и BC ?

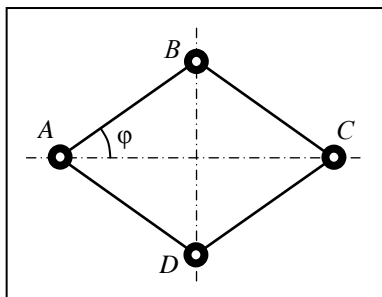


Рис. 8