

**Всероссийский (третий) этап Всероссийской олимпиады
студентов по теоретической механике**

**Казань, Казанский национальный исследовательский
технологический университет
2-6 декабря 2015 г.**

Решения задач теоретического конкурса

Автор задач: доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштари Айрат Ильдарович

Рецензент: доцент кафедры аэрогидродинамики КФУ Марданов Ренат Фаритович

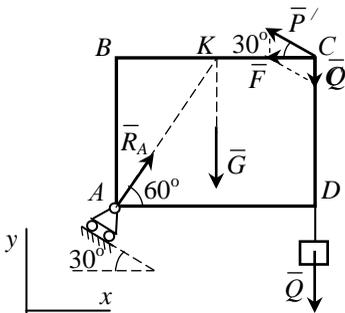


Рис. 1

Решение задачи С1.

1). *1 способ.* Пластина находится в равновесии под действием силы \vec{P}' , равной по величине P и приложенной к точке C ; силы \vec{Q} ; силы тяжести пластины \vec{G} , приложенной к центру пластины; силы реакции \vec{R}_A (рис. 1). Линии действия сил \vec{G} и \vec{R}_A пересекаются в середине K стороны BC , так как $AB/BK = \text{tg}60^\circ$. По теореме о трех

силах через точку K должна проходить также и линия действия силы \vec{F} , равнодействующей для системы двух сил $\{\vec{P}', \vec{Q}\}$ и приложенной к точке C . Поэтому сила \vec{F} горизонтальна. Проецируя $\vec{F} = \vec{P}' + \vec{Q}$ на вертикальную ось y , получим:

$$0 = P \sin 30^\circ - Q.$$

$$Q = P/2.$$

2 способ. Можно записать одно уравнение равновесия пластины:

$$\sum_k M_K(\bar{F}_k) = P \sin 30^\circ \cdot KC - Q \cdot KC = 0.$$

$$Q = P/2.$$

3 способ. Более длинное решение получается при записи «стандартного» набора трех уравнений равновесия относительно трех неизвестных Q , G , R_A :

$$\sum_k F_{kx} = R_A \cos 60^\circ - P \cos 30^\circ = 0.$$

$$\sum_k F_{ky} = R_A \sin 60^\circ + P \sin 30^\circ - Q - G = 0.$$

$$\sum_k M_A(\bar{F}_k) = P \cos 30^\circ \cdot \sqrt{3} a + P \sin 30^\circ \cdot 2a - Q \cdot 2a - G \cdot a = 0.$$

Решая эту систему уравнений, помимо Q , можно найти также и вес пластины: $G = 3P/2$.

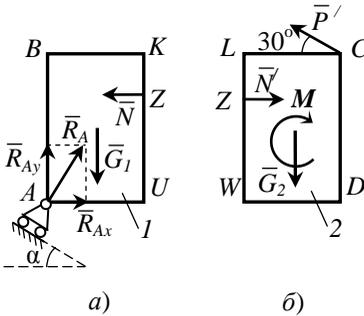


Рис. 2

2). Действующие на каждую пластину силы указаны на рис. 2. Со стороны пластины 2 на пластину 1 действуют силы нормальной реакции с равнодействующей \bar{N} , приложенной к некоторой точке Z отрезка KU . При этом со стороны 1 на 2 действует сила $\bar{N}' = -\bar{N}$. Обозначим $KZ = LZ = b$.

Для определения шести неизвестных R_A , α , G_1 , G_2 , N , b нужно записать шесть уравнений равновесия системы. Ниже предложен один из возможных вариантов такой системы уравнений.

Для удобства далее используем выражения:

$$R_{Ax} = R_A \cos(90^\circ - \alpha) = R_A \sin \alpha, \quad R_{Ay} = R_A \cos \alpha.$$

Условия равновесия пластины 1 (рис. 2а):

$$\sum_k F_{kx} = R_{Ax} - N = 0. \quad (1)$$

$$\sum_k F_{ky} = R_{Ay} - G_1 = 0. \quad (2)$$

Условия равновесия пластины 2 (рис. 2б):

$$\sum_k F_{kx} = N - P \cos 30^\circ = 0. \quad (3)$$

$$\sum_k F_{ky} = P \sin 30^\circ - G_2 = 0. \quad (4)$$

$$\sum_k M_C(\bar{F}_k) = G_2 \cdot \frac{a}{2} + N \cdot b - M = 0. \quad (5)$$

Уравнение равновесие для всей системы (при этом силы \bar{N} , \bar{N}' являются внутренними и взаимно сокращаются):

$$\sum_k M_A(\bar{F}_k) = -G_1 \cdot \frac{a}{2} - G_2 \cdot \frac{3a}{2} + P \cos 30^\circ \cdot \sqrt{3} a + P \sin 30^\circ \cdot 2a - M = 0. \quad (6)$$

Из (4):

$$G_2 = \frac{P}{2}. \quad (7)$$

Из (6) с учетом (7):

$$\begin{aligned} -G_1 \cdot \frac{1}{2} - P \cdot \frac{3}{4} + P \frac{3}{2} + P - kP &= 0. \\ G_1 &= \frac{7-4k}{2} P. \end{aligned} \quad (8)$$

Так как должно быть $G_1 \geq 0$, получим условие

$$k \leq \frac{7}{4}. \quad (9)$$

Из (1), (3), исключив N из уравнений, получим:

$$R_{Ax} = \frac{\sqrt{3}}{2} P. \quad (10)$$

Из (2):

$$R_{Ay} = G_1. \quad (11)$$

С учетом (10), (11), а также (8):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} = \frac{2G_1}{\sqrt{3}P} = \frac{7-4k}{\sqrt{3}}. \\ \alpha &= \operatorname{arcctg} \frac{7-4k}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Из (3):

$$N = \frac{\sqrt{3}}{2} P. \quad (13)$$

Таким образом, необходимое для равновесия ограничение $N \geq 0$ выполняется независимо от значения k .

Чтобы исключить поворот одной из пластин относительно другой пластины вокруг верхней или нижней точки их соприкосновения, нужно проверить условие принадлежности точки Z отрезку KU . Для этого должно выполняться:

$$0 \leq b \leq \sqrt{3}a. \quad (14)$$

Учитывая (7) и (13) в (5), получим:

$$\begin{aligned} N \cdot b &= M - G_2 \cdot \frac{a}{2}. \\ \frac{\sqrt{3}}{2} P \cdot b &= kPa - \frac{P}{2} \cdot \frac{a}{2}. \\ b &= \frac{4k-1}{2\sqrt{3}} a. \end{aligned} \quad (15)$$

Учтем (15) в (14):

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{4k-1}{2\sqrt{3}} a \leq \sqrt{3}a. \\ \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{7}{4}. \end{aligned} \quad (16)$$

Отметим, что условие (9) совпадает с правым неравенством в (16).

Ответ. 1). $Q = P/2$. 2). $G_1 = \frac{7-4k}{2} P$, $G_2 = \frac{P}{2}$, $\alpha = \operatorname{arcctg} \frac{7-4k}{\sqrt{3}}$.

$$\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{7}{4}.$$

Решение задачи С2.

Брус находится в равновесии под действием следующих сил: силы тяжести \bar{G} ; распределенной силы нормальной реакции с равнодействующей \bar{N} , которая с учетом равномерного давления бруса на плоскость приложена к центру тяжести бруса C ; распределенной силы трения. Введем оси координат x, y , связанные с наклонной плоскостью, причем ось x горизонтальна, а также ось z , сонаправленную \bar{N} и проходящую через точку C . Очевидно, $G_x = 0$, $N_{xy} = 0$, $M_{Cz}(\bar{G}) = M_{Cz}(\bar{N}) = 0$. Обозначим $a = AC = BC$.

Исследуем возможное движение бруса при выходе из состояния предельного равновесия, которое реализуется при превышении углом наклона плоскости искомого значения α . Очевидно, возможное движение бруса будет в плоскости xy .

Учтем пренебрежимую малость размера поперечного сечения бруса по сравнению с длиной AB . Малые силы трения $d\bar{F}_{mp}$, действующие на малые участки бруса длиной dx , направлены против направлений возможных движений соответствующих точек бруса. При предельном равновесии $dF_{mp} = f dN$.

Рассмотрим случай, когда возможное движение бруса – мгновенное поступательное (рис. 3). Тогда все $d\bar{F}_{mp}$ параллельны. Из условия

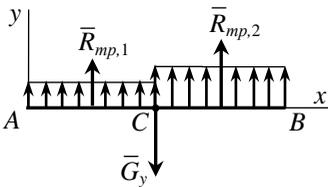


Рис. 3

равновесия $\sum_k F_{kx} = 0$ следует, что равнодействующие $\bar{R}_{mp,1}$, $\bar{R}_{mp,2}$ сил трения на участках AC и BC параллельны оси y . С учетом одинаковых направлений $d\bar{F}_{mp}$ соотношение $dF_{mp} = f dN$

можно легко проинтегрировать для любого участка бруса. Тогда получим

$$R_{mp,1} = f_1 N_{AC}, \quad R_{mp,2} = f_2 N_{BC}, \quad \text{причем } N_{AC} = N_{BC} \text{ в силу } AC = BC.$$

Поэтому условие равновесия бруса

$$\sum M_{Cz}(\bar{F}_k) = -R_{mp,1} \cdot \frac{a}{2} + R_{mp,2} \cdot \frac{a}{2} = 0 \quad (1)$$

может выполняться лишь при $f_1 = f_2 = f$.

При этом $R_{mp,1} + R_{mp,2} = R_{mp} = fN$. Из $\sum_k F_{kz} = 0$ для всего бруса получим $N = Mg \cos \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_k F_{ky} &= R_{mp} - Mg \sin \alpha = 0. \\ f \cos \alpha - \sin \alpha &= 0. \\ \alpha &= \arctg f. \end{aligned} \quad (2)$$

При $f_2 > f_1$ возможное движение бруса не является мгновенным поступательным, реализуется общий случай плоскопараллельного движения. Значит, существует мгновенный центр вращения (МЦВ), который обозначим через K . Направления $d\bar{F}_{mp}$ перпендикулярны отрезкам, соединяющим точку K и точки приложения этих $d\bar{F}_{mp}$.

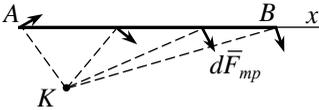


Рис. 4

Точка K не может лежать ниже оси x на плоскости xu , иначе либо для всех точек бруса $dF_{mp,x} > 0$ (рис. 4) либо для всех точек бруса $dF_{mp,x} < 0$.

Поэтому

$$\sum_k F_{kx} = \sum dF_{mp,x} \neq 0.$$

Аналогично показывается, что точка K не может лежать выше оси x .

Точка K не может лежать на оси x левее точки A или правее точки B (либо совпадать с одной из них), иначе

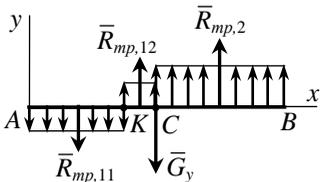


Рис. 5

распределение сил $d\bar{F}_{mp}$ было бы как на рис. 3. Пришли бы к условию (1), которое, как было показано, при $f_2 > f_1$ не выполняется.

Точка K не может лежать на оси x между точками A и C (либо в точке C) (рис. 5). Действительно, предполагая в

этом случае направление возможного вращения, например, по часовой стрелке и обозначая равнодействующие сил трения на участках AK , KC , CB , соответственно, через $R_{mp,11}$, $R_{mp,12}$, $R_{mp,2}$, получим:

$$\begin{aligned} \sum M_{Cz}(\bar{F}_k) &= R_{mp,11} \cdot \left(KC + \frac{AK}{2} \right) - R_{mp,12} \cdot \frac{KC}{2} + R_{mp,2} \cdot \frac{BC}{2} > \\ &> R_{mp,2} \cdot \frac{BC}{2} - R_{mp,12} \cdot \frac{KC}{2} = f_2 N_{BC} \cdot \frac{BC}{2} - f_1 N_{KC} \cdot \frac{KC}{2} > 0. \end{aligned}$$

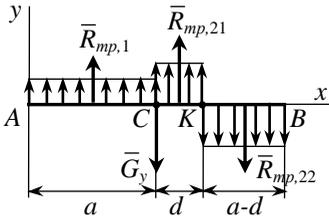


Рис. 6

Последнее неравенство имеет место в силу $f_2 > f_1$, $BC > KC$, $N_{BC} > N_{KC}$.

Остается единственная возможность: точка K лежит на оси x между точками B и C (рис. 6). Найдем расстояние $d = CK$. Обозначим равнодействующие сил трения на участках AC , CK , KB , соответственно, через $\bar{R}_{mp,1}$, $\bar{R}_{mp,21}$, $\bar{R}_{mp,22}$. Тогда

$$\sum_k M_{Cz}(\bar{F}_k) = -R_{mp,1} \cdot \frac{a}{2} + R_{mp,21} \cdot \frac{d}{2} - R_{mp,22} \cdot \left(d + \frac{a-d}{2} \right) = 0. \quad (3)$$

Обозначим через M массу бруса. Для любого участка UW бруса с учетом однородности бруса имеем: $\frac{G_{UW}}{Mg} = \frac{UW}{2a}$. Тогда из уравнения его равновесия $\sum_k F_{kz} = N_{UW} - G_{UW} \cos \alpha = 0$ следует:

$$N_{UW} = G_{UW} \cos \alpha = \frac{UW}{2a} Mg \cos \alpha.$$

Поэтому

$$N_{AC} = \frac{a}{2a} Mg \cos \alpha. \quad R_{mp,1} = f_1 N_{AC} = f_1 \cdot \frac{1}{2} Mg \cos \alpha. \quad (4)$$

$$N_{CK} = \frac{d}{2a} Mg \cos \alpha. \quad R_{mp,21} = f_2 N_{CK} = f_2 \cdot \frac{d}{2a} Mg \cos \alpha. \quad (5)$$

$$N_{KB} = \frac{a-d}{2a} Mg \cos \alpha, \quad R_{mp,22} = f_2 N_{KB} = f_2 \cdot \frac{a-d}{2a} Mg \cos \alpha. \quad (6)$$

Учтем (4), (5), (6) в (3):

$$\begin{aligned} \left(-f_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} + f_2 \cdot \frac{d}{2a} \cdot \frac{d}{2} - f_2 \cdot \frac{a-d}{2a} \cdot \frac{a+d}{2} \right) Mg \cos \alpha &= 0. \\ -f_1 a^2 + f_2 d^2 - f_2 (a^2 - d^2) &= 0. \\ 2f_2 d^2 &= (f_1 + f_2) a^2. \\ d &= \sqrt{\frac{f_1 + f_2}{2f_2}} a. \end{aligned} \quad (7)$$

Далее, для равновесия бруса должно выполняться условие:

$$\sum_k F_{ky} = R_{mp,1} + R_{mp,21} - R_{mp,22} - Mg \sin \alpha = 0.$$

С учетом (4), (5), (6), а также (7):

$$\begin{aligned} \left(f_1 \cdot \frac{1}{2} + f_2 \cdot \frac{d}{2a} - f_2 \cdot \frac{a-d}{2a} \right) Mg \cos \alpha - Mg \sin \alpha &= 0. \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{f_1 a + f_2 d - f_2 a + f_2 d}{2a} = \frac{f_1 - f_2}{2} + f_2 \sqrt{\frac{f_1 + f_2}{2f_2}} &= \\ = \sqrt{\frac{f_2(f_1 + f_2)}{2}} - \frac{f_2 - f_1}{2}. & \\ \alpha = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{f_2(f_1 + f_2)}{2}} - \frac{f_2 - f_1}{2} \right). & \end{aligned} \quad (8)$$

Отметим, что хотя соотношение (8) было выведено для случая $f_2 > f_1$, формальная подстановка в (8) условия $f_2 = f_1 = f$ приводит к верному для этого случая ответу (2). Поэтому (7) является ответом для $f_2 \geq f_1$.

Далее выясним, может ли брус, по условию прямоугольный параллелепипед, выйти из равновесия путем опрокидывания с поворотом вокруг нижнего горизонтального ребра.

$$\sqrt{\frac{f_2(f_1+f_2)}{2}} - \frac{f_2-f_1}{2} \leq \sqrt{\frac{f_2(f_1+f_2)}{2}} \leq \sqrt{\frac{\max(f_1, f_2) \cdot 2 \max(f_1, f_2)}{2}} =$$

$$= \max(f_1, f_2) \leq 1.$$

Поэтому с учетом (8) при предельном равновесии будет $\alpha \leq \arctg 1$, т.е. $\alpha \leq 45^\circ$.

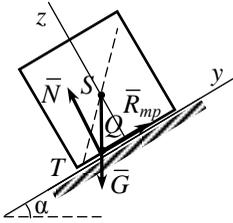


Рис. 7

Рассмотрим квадратное поперечное сечение бруса, проходящее через центр тяжести бруса (рис. 7). Так как брус однороден, то сила тяжести бруса \bar{G} приложена к точке S пересечения диагоналей квадрата. По теореме о трех силах силы \bar{G} , \bar{N} и равнодействующая всех сил трения \bar{R}_{mp} образуют систему сходящихся сил.

В силу $\alpha \leq 45^\circ$ линия действия силы \bar{G} проходит правее нижней вершины квадрата T (либо через нее, если $\alpha = 45^\circ$). Эта линия пересекается с линией действия \bar{R}_{mp} в точке Q на стороне квадрата, опирающейся на наклонную плоскость. Значит линия действия силы \bar{N} также проходит через точку Q . Это исключает возможность поворота квадрата вокруг точки T . Таким образом, условие непроскальзывания бруса является достаточным условием для его равновесия.

Итак, строгое обоснование решения предполагает, во-первых, исследование всех вариантов расположения МЦВ и, как следствие, обоснование единственности его положения; во-вторых, обоснование неопрокидывания бруса, то есть достаточности условия непроскальзывания бруса для его равновесия.

Замечание 1. Ожидаемо, что выражение в скобках в (8) положительно при $f_2 > 0$. В этом можно убедиться, возведя в квадрат обе части неравенства

$$\sqrt{\frac{f_2(f_1+f_2)}{2}} > \frac{f_2-f_1}{2}$$

и затем выполнив несложные преобразования.

Замечание 2. С учетом $dF_{mp,1} = f_1 \rho g \cos \alpha dx$, $M = \rho \cdot 2a$ возможно вычислять моменты сил в уравнениях равновесия с помощью интегралов. Например, в рамках уравнения (3) для участка AC :

$$\begin{aligned} \sum M_{Cz}(d\bar{F}_{mp}) &= - \int_0^a (a-x) f_1 \rho g \cos \alpha dx = - \left(ax - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a f_1 \rho g \cos \alpha = \\ &= - \frac{a^2}{2} f_1 \rho g \cos \alpha = - \frac{a}{4} f_1 M g \cos \alpha, \end{aligned}$$

что совпадает с ранее найденным выражением для $M_{Cz}(\bar{R}_{mp,1})$.

Ответ. $\alpha = \arctg \left(\sqrt{\frac{f_2(f_1+f_2)}{2}} - \frac{f_2-f_1}{2} \right)$.

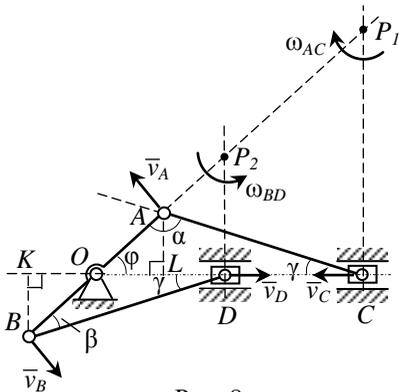


Рис. 8

Решение задачи К1.

1 способ. Треугольники OAL и OBK равны, поэтому $AL = BK$ (рис.8). С учетом этого треугольники ACL и BDK равны между собой, откуда $\angle ACL = \angle BDK = \gamma$.

Пусть AOB вращается против часовой стрелки. Векторы скоростей \vec{v}_A и \vec{v}_B перпендикулярны AOB . По теореме о проекциях скоростей, записанной последовательно для каждого из шатунов при их плоско-параллельном движении:

$$v_C \cos \gamma = v_A \cos(90^\circ - (180^\circ - \alpha)). \tag{1}$$

$$v_D \cos \gamma = v_B \cos(90^\circ - \beta). \tag{2}$$

Для кривошипа AOB : $v_A = l\omega_{OA}$, $v_B = l\omega_{OA}$, где $l = OA = OB$, откуда $v_A = v_B$. По формулам приведения: $\cos(90^\circ - (180^\circ - \alpha)) = \sin \alpha$, $\cos(90^\circ - \beta) = \sin \beta$. Тогда, разделив равенство (1) на (2), получим:

$$\frac{v_C}{v_D} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (3)$$

2 способ. На пересечении перпендикуляров к \bar{v}_A и \bar{v}_C получаем мгновенный центр скоростей (МЦС) P_1 для шатуна AC (рис. 8). Аналогично находим МЦС P_2 для шатуна BD .

$$\begin{aligned} \omega_{AC} &= \frac{v_A}{AP_1} = \frac{v_C}{CP_1}, & \omega_{BD} &= \frac{v_B}{BP_2} = \frac{v_D}{DP_2}. \\ v_A &= \frac{AP_1}{CP_1} v_C, & v_B &= \frac{BP_2}{DP_2} v_D. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда из (4):

$$\begin{aligned} \frac{AP_1}{CP_1} v_C &= \frac{BP_2}{DP_2} v_D. \\ \frac{v_C}{v_D} &= \frac{CP_1}{DP_2} \cdot \frac{BP_2}{AP_1} = \frac{OC}{OD} \cdot \frac{BP_2}{AP_1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь, обозначая $d = AC = BD$,

$$AP_1 = \frac{LC}{\cos \varphi} = \frac{d \cos \gamma}{\cos \varphi}, \quad BP_2 = \frac{KD}{\cos \varphi} = \frac{d \cos \gamma}{\cos \varphi}. \quad (6)$$

Из (6):

$$AP_1 = BP_2. \quad (7)$$

По теореме синусов для треугольников OAC и OBD :

$$\frac{\sin \varphi}{d} = \frac{\sin \alpha}{OC}, \quad \frac{\sin(180^\circ - \varphi)}{d} = \frac{\sin \beta}{OD}.$$

Отсюда с учетом $\sin(180^\circ - \varphi) = \sin \varphi$ получим:

$$\frac{OC}{OD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (8)$$

Учитывая (7) и (8) в (5), приходим к ответу (3).

Ответ. $\frac{v_C}{v_D} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}.$

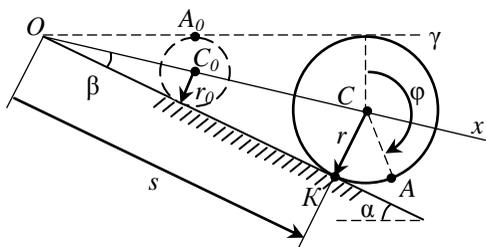


Рис. 9

Решение задачи K2.

Обозначим через O точку пересечения наклонной плоскости и прямой γ (рис. 9). От точки O отложим ось x , проходящую через центр шара C_0 в начальный момент. Из геометрических соображений очевидно, что ось x

проходит через центр шара C в любой момент времени. Расстояние от точки O до точки контакта K шара с наклонной плоскостью в произвольный момент времени обозначим через s , а радиус шара через r . Угол между наклонной плоскостью и осью x обозначим $\beta = \alpha/2$.

Перемещение шара за малый промежуток времени $dt = t_1 - t$ можно представить как комбинацию следующих двух элементарных перемещений.

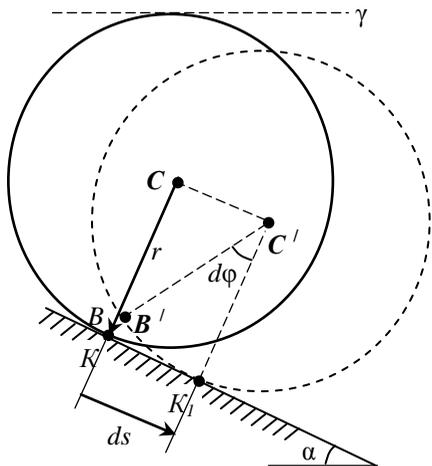


Рис. 10

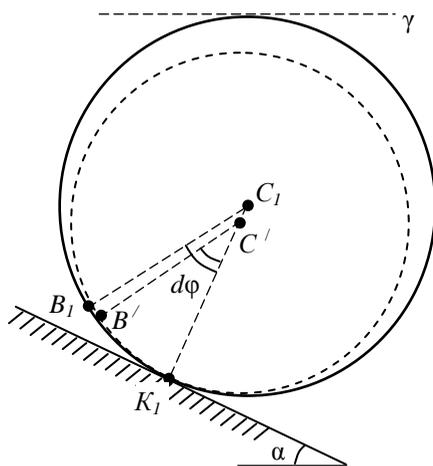


Рис. 11

1). Скатывание шара по наклонной плоскости на малое расстояние ds при сохранении постоянного радиуса шара r (рис. 10). При этом точка K переходит в положение K_1 , а точка C переходит в промежуточное положение C' .

2). Малое увеличение радиуса (расширение) шара до достижения его верхней точкой прямой γ при сохранении положения точки K_1 контакта шара с плоскостью (рис. 11). При этом шар не поворачивается, а центр шара смещается вдоль перпендикуляра к плоскости, переходя из положения C' в положение C_1 .

Обозначим через B точку, принадлежащую шару, которая в момент t находилась в положении K . После первого элементарного перемещения она оказалась в положении B' , а после второго – в положении B_1 . Очевидно, длина дуги $\cup K_1B' = \cup KK_1 = ds$. С другой стороны, длина дуги $\cup K_1B' = r d\varphi$, где $d\varphi$ – малый угол поворота шара. Второе элементарное перемещение не влияет на угол поворота. Таким образом,

$$ds = r d\varphi. \quad (1)$$

Отметим, что при втором элементарном перемещении увеличение радиуса до $r + dr$ оказывает влияние на (1) лишь в том, что в (1) величина r является переменной. (Поэтому (1) надо интегрировать не так, как в случае катящегося твердого диска, где после интегрирования сразу получается $s = r\varphi$. В нашей задаче эта запись неверна!)

Если комбинацию двух элементарных перемещений рассмотреть в обратной последовательности, получили бы $ds = (r + dr)d\varphi$, что, с учетом меньшего порядка малости величины $dr d\varphi$, эквивалентно (1).

Как видно из рис. 9, $s = r \operatorname{ctg} \beta$. Отсюда

$$ds = dr \operatorname{ctg} \beta. \quad (2)$$

Учтем (2) в (1), разделим переменные r , φ и проинтегрируем:

$$\begin{aligned} dr \operatorname{ctg} \beta &= r d\varphi, \\ \int_{r_0}^r \frac{dr}{r} &= \operatorname{tg} \beta \int_0^\varphi d\varphi, \end{aligned}$$

$$\ln \frac{r}{r_0} = \varphi \operatorname{tg} \beta,$$

$$r = r_0 e^{\varphi \operatorname{tg} \beta}. \quad (3)$$

Как видно из рис. 9, $r = x \sin \beta$. Здесь, с учетом равномерного движения точки C : $x = x_0 + vt$.

$$r = x_0 \sin \beta + vt \sin \beta. \quad (4)$$

С учетом $r_0 = x_0 \sin \beta$, получим из (4):

$$r = r_0 + vt \sin \beta. \quad (5)$$

В момент, когда точка A во второй раз окажется сверху шара, будет $\varphi = 2\pi$. Из (3) и (5):

$$r_0 e^{2\pi \operatorname{tg} \beta} = r_0 + vT \sin \beta,$$

где T – искомое время. Отсюда находим первый ответ:

$$T = \frac{r_0 (e^{2\pi \operatorname{tg}(\alpha/2)} - 1)}{v \sin(\alpha/2)}.$$

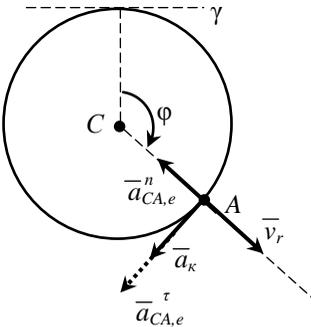


Рис. 12

Движение точки A рассмотрим как сложное. Переносное движение связано с движением точки A вместе с точкой C и вращением вокруг неё (без изменения радиуса вращения). Относительное движение – движение точки A вдоль радиуса вращения. Ускорение точки A в произвольный момент времени (рис. 12):

$$\bar{a}_A = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_\kappa. \quad (6)$$

$$\bar{a}_e = \bar{a}_C + \bar{a}_{AC,e}^\tau + \bar{a}_{AC,e}^n,$$

$$a_C = \frac{dv}{dt} = 0, \quad a_{AC,e}^\tau = r\ddot{\varphi}, \quad a_{AC,e}^n = r\dot{\varphi}^2. \quad (7)$$

На рис. 12 указано предположительное направление $\bar{a}_{AC,e}^\tau$ (в направлении отсчета φ по часовой стрелке). Как будет далее следовать из отрицательного знака $\ddot{\varphi}$, истинное направление $\bar{a}_{AC,e}^\tau$ будет противоположно указанному на рисунке.

Из (5):

$$v_r = \dot{r} = v \sin \beta, \quad (8)$$

откуда

$$a_r = \ddot{r} = 0, \quad a_\kappa = 2\omega_e v_r = 2\dot{\varphi} \dot{r}. \quad (9)$$

Найдем $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$. Дифференцируем по времени $s = x \cos \beta$ (рис. 9), учитывая $\dot{x} = v$:

$$\dot{s} = v \cos \beta. \quad (10)$$

С другой стороны, деля обе части (1) на dt , получим

$$\dot{s} = r \dot{\varphi}. \quad (11)$$

Из (10), (11):

$$\dot{\varphi} = \frac{v \cos \beta}{r}. \quad (12)$$

Учитывая (8), из (12) получим:

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dr} \cdot \dot{r} = -\frac{v \cos \beta}{r^2} \cdot v \sin \beta = -\frac{v^2}{r^2} \sin \beta \cos \beta. \quad (13)$$

Проецируем (6) на взаимно перпендикулярные оси (рис. 12), применяем теорему Пифагора и учитываем (8), (9), (12), (13), а также (3):

$$\begin{aligned} a_A &= \sqrt{(a_{AC,e}^\tau + a_\kappa)^2 + (a_{AC,e}^n)^2} = \\ &= \sqrt{\left(-\frac{v^2}{r} \sin \beta \cos \beta + 2 \frac{v \cos \beta}{r} v \sin \beta\right)^2 + \left(\frac{v^2 \cos^2 \beta}{r}\right)^2} = \frac{v^2 \cos \beta}{r} = \frac{v^2 \cos(\alpha/2)}{r_0 e^{\varphi \operatorname{tg}(\alpha/2)}}. \end{aligned}$$

При $\varphi = 2\pi$ получаем окончательно:

$$a_A = \frac{v^2 \cos(\alpha/2)}{r_0 e^{2\pi \operatorname{tg}(\alpha/2)}}. \quad (14)$$

Замечание. Ускорение точки A можно также найти, используя аналитический метод (рис. 13). Если, к примеру, направить ось x не вдоль траектории точки C , а вдоль наклонной плоскости, а ось y , соответственно, перпендикулярно ей, и отсчитывать угол φ от оси y по часовой стрелке, то получим следующий закон движения точки A :

$$x_A = s + r \sin \varphi, \quad y_A = r + r \cos \varphi. \quad (15)$$

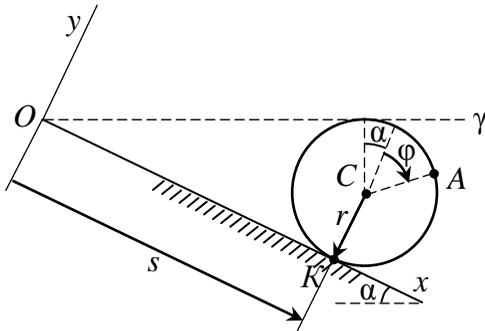


Рис. 13

При таком выборе отсчета угла φ получим из $\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = \text{tg}\beta \int_{-\alpha}^{\varphi} d\varphi$ вместо (3):

$$r = r_0 e^{(\varphi + \alpha) \text{tg}\beta}. \quad (16)$$

Дважды дифференцируя по времени (15) и учитывая (8), (9), (10), (12), (13), получим:

$$\ddot{x}_A = -\frac{v^2 \cos\beta}{r} \sin(\varphi - \beta), \quad \ddot{y}_A = -\frac{v^2 \cos\beta}{r} \cos(\varphi - \beta).$$

$$a_A = \sqrt{(\ddot{x}_A)^2 + (\ddot{y}_A)^2} = \frac{v^2 \cos\beta}{r}.$$

Отсюда при $\varphi = 2\pi - \alpha$ в (16) приходим к ответу (14).

Ответ. $T = \frac{r_0 (e^{2\pi \text{tg}(\alpha/2)} - 1)}{v \sin(\alpha/2)}, \quad a_A = \frac{v^2 \cos(\alpha/2)}{r_0 e^{2\pi \text{tg}(\alpha/2)}}.$

Решение задачи Д1.

Самое нижнее возможное положение M_0 достигается, если участок нити между A и стержнем OB располагается перпендикулярно стержню, то есть вдоль оси y , а далее участок нити до точки M вертикален. Вектор начальной скорости \vec{v}_0 и действующие на M силы тя-

жести \vec{G} и натяжения нити \vec{T} расположены в вертикальной плоскости. Поэтому перемещение точки M вплоть до положения M_1 происходит в вертикальной плоскости.

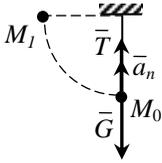


Рис. 14

1). Уравнение движения точки M в проекции на вертикальную ось в начальный момент (рис. 14):

$$ma_n = T - mg,$$

где $a_n = \frac{v_0^2}{R}$, v_0 – начальная скорость, R – длина участка нити от точки M до точки прикрепления к стержню. С учетом $T = 3mg$, отсюда получим:

$$mv_0^2 = 2mgR.$$

С другой стороны, по теореме об изменении кинетической энергии материальной точки:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgR.$$

$$\frac{mv_1^2}{2} - mgR = -mgR.$$

$$v_1 = 0.$$

2). Для произвольного момента времени до соприкосновения M со стержнем обозначим через C точку нити, контактирующую со стержнем в этот момент (рис. 15). На неё действуют с двух сторон силы натяжения нити \vec{T}_1 , \vec{T}_2 и составляющие силы нормальной реакции со стороны гладкого стержня \vec{N}_y , \vec{N}_z . Обозначим углы наклона \vec{T}_1 , \vec{T}_2 к осям y , z , соответственно, через φ_1 , φ_2 . Так как точка C невесома, то уравнения динамики для неё имеют вид уравнений статики:

$$\sum_k F_{kx} = -T_1 \sin \varphi_1 + T_2 \sin \varphi_2 = 0. \quad (1)$$

$$\sum_k F_{ky} = N_y - T_1 \cos \varphi_1 = 0, \quad \sum_k F_{kz} = N_z - T_2 \cos \varphi_2 = 0, \quad (2)$$

С учетом $T_1 = T_2 = T$ получим из (1):

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi. \quad (3)$$

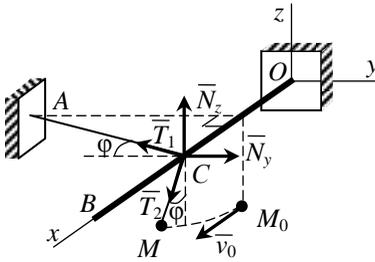


Рис. 15

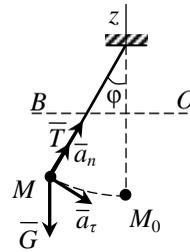


Рис. 16

Из (2), с учетом (3), получим, что полная нормальная реакция со стороны стержня, а значит, по третьему закону Ньютона, и сила давления нити на стержень равна:

$$N = \sqrt{N_y^2 + N_z^2} = \sqrt{2} T \cos\varphi. \quad (4)$$

Из (3) можно сделать необходимый для дальнейшего решения вывод. Если плоскость с горизонтальным участком нити мысленно повернуть вокруг оси x , подняв в вертикальную плоскость, то вся нить будет располагаться вдоль одной прямой под углом φ к вертикали, а действующие на точку M силы останутся теми же. Значит, траектория и закон движения по ней точки M совпадают с траекторией и законом движения точки на конце нити той же длины l , целиком располагающейся в вертикальной плоскости (рис. 16). Отсюда заключаем также, что радиус кривизны ρ точки M равен длине нити l .

Уравнение движения точки M массы m в проекции на ось нормали, проходящую вдоль нити:

$$ma_n = T - mg \cos\varphi, \quad (5)$$

где $a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{l}$.

Для положения M_0 при $\varphi = 0$, $v = v_0$, $T_0 = 3mg$ из (5) получим:

$$\frac{v_0^2}{l} = 2g. \quad (6)$$

Для положения M_2 из (5) получим, с учетом $v_2 = v_0/2$ и (6):

$$T = m \frac{v_2^2}{l} + mg \cos\varphi = m \frac{v_0^2}{4l} + mg \cos\varphi = mg \left(\frac{1}{2} + \cos\varphi \right). \quad (7)$$

По теореме об изменении кинетической энергии материальной точки при её подъеме от M_0 до M_2 : $\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgH$. В положении M_2 точка M стремится к точке C . Поэтому при этом будет $AC = l$. Тогда изменение высоты точки M : $H = l - l \cos\varphi$. С учетом условия $v_2 = v_0/2$ и (6) получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{v_0}{2} \right)^2 - \frac{v_0^2}{2} &= -g(l - l \cos\varphi), \\ \cos\varphi &= 1 - \frac{3v_0^2}{8gl} = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставим (7) и (8) в (4):

$$N = \sqrt{2} mg \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{16} mg.$$

Ответ. 1). $v_1 = 0$. 2). $N = \frac{3\sqrt{2}}{16} mg$.

Решение задачи Д2.

1). Так как в момент $t = 1$ с диск вращается по часовой стрелке, то момент трения при этом направлен против часовой стрелки. Запишем дифференциальное уравнение вращения диска вокруг неподвижной оси:

$$\begin{aligned} J_z \frac{d\omega_z}{dt} &= -F \cdot R + M_{mp}. \quad (1) \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= -4. \end{aligned}$$

Здесь ω_z – алгебраическая угловая скорость (т.е. с учетом знака). Так как направление углового ускорения также по часовой стрелке, то с течением времени вращение будет по-прежнему по часовой стрелке.

Поэтому момент трения все время будет направлен против часовой стрелки, и дифференциальное уравнение будет сохранять вид (1).

Разделяя переменные и интегрируя, получаем: $\omega_z = -4t + C$. При $t = 1$: $-2 = -4 + C$ (учли, что $\omega_z(1) = -2$, так как по часовой стрелке). Отсюда $C = 2$, и

$$\omega_z = -4t + 2. \quad (2)$$

При $t = 2$: $\omega_z(2) = -4 \cdot 2 + 2 = -6$. По модулю: $\omega(2) = 6$ рад/с.

2). Из (2) следует, что $\omega_z = 0$ выполняется при $-4t + 2 = 0$, т.е. при $t = 0,5$ с. Очевидно, при $0 \leq t < 0,5$ диск вращается против часовой стрелки (в противном случае его остановка в момент $t = 0,5$ с была бы невозможна). Поэтому при $0 \leq t < 0,5$ момент трения направлен по часовой стрелке. Дифференциальное уравнение вращения диска при этом имеет вид:

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = -F \cdot R - M_{mp}.$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = -6.$$

$$d\omega_z = -6dt.$$

Если использовать определенные интегралы, получим:

$$\int_{\omega_z(0)}^0 d\omega_z = -6 \int_0^{0,5} dt.$$

$$-\omega_z(0) = -6 \cdot 0,5 = -3.$$

$$\omega_0 = 3 \text{ (рад/с)}.$$

При этом

$$v_A = R\omega_0 = 0,5 \cdot 3 = 1,5 \text{ (м/с)}.$$

Замечание. Так как в условии задачи задано время, то удобно применить именно ДУ вращения твердого тела. Теорему об изменении кинетической энергии механической системы лучше было бы использовать, если бы был задан угол поворота диска.

Ответ. 1). $\omega(2) = 6$ рад/с. 2). $v_A = 1,5$ м/с.

Решение задачи Д3.

1 способ. Во время прыжка на кошку 2 со стороны дверцы 1 действует горизонтальная реакция \vec{F}_{21} (рис. 17). Её работа по условию $A_{21} = A$. По свойству внутренних сил для системы 1-2, со стороны

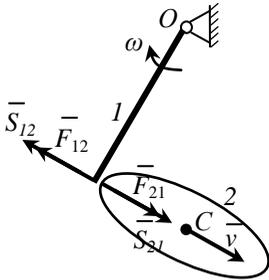


Рис. 17

кошки на дверцу действует сила $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (на рисунке приведен вид сверху). Импульсы этих сил: $\vec{S}_{12} = -\vec{S}_{21}$, $S_{12} = S_{21} = S$. Так как точки приложения сил \vec{F}_{21} и \vec{F}_{12} геометрически совпадают (в том смысле, что расстояние между этими точками равно нулю), то

$$A_{12} = -A_{21} = -A. \quad (1)$$

Введем обозначения: m – масса дверцы, равная массе кошки; l – ширина дверцы, z – ось вращения дверцы, J_z – момент инерции дверцы, ω – угловая скорость дверцы после прыжка кошки. Применим теорему об изменении кинетической энергии для дверцы:

$$\frac{J_z \omega^2}{2} - 0 = A_{12}.$$

Здесь было учтено следующее. Вертикальная составляющая силы, действующей на дверцу со стороны кошки, перпендикулярна перемещению точки приложения этой силы. Поэтому эта вертикальная составляющая работу не совершает. Также, очевидно, не совершают работу сила тяжести и силы реакции петель дверцы.

Заметим, что отсюда, с учетом (1), следует $A < 0$. По-другому объяснить $A < 0$ можно еще и так: направление силы \vec{F}_{21} противоположно направлению движения точки её приложения (которая «отходит назад»).

С учетом (1) и $J_z = ml^2/3$ (см. замечание 1), получаем:

$$\frac{ml^2 \omega^2}{6} = -A. \quad (2)$$

Наиболее короткое решение получается при использовании теоремы об изменении кинетического момента при ударе, записанной для дверцы:

$$K_{z1,дверцы} - K_{z0,дверцы} = M_z(\bar{S}_{12}).$$

$$-\frac{1}{3}ml^2\omega - 0 = -S \cdot l. \quad (3)$$

Из (2), (3) находим массу:

$$m = -\frac{3S^2}{2A}. \quad (4)$$

По теореме об изменении количества движения для системы «кошка» в проекции на направление её прыжка:

$$mv - 0 = S_{21}, \quad (5)$$

где v – скорость центра масс C кошки сразу после её отрыва от дверцы. Существенно, что импульсы внутренних сил кошки в теореме (5) не фигурируют. Из (5) и (4) получаем ответ:

$$v = \frac{S}{m} = -\frac{2A}{3S}.$$

2 способ. Теорема об изменении кинетической энергии для кошки:

$$T_{кошки} - 0 = A + A^i, \quad (6)$$

где $T_{кошки}$ – кинетическая энергия кошки сразу после прыжка, A^i – заранее неизвестная работа внутренних сил кошки. Если записать теорему еще и для всей системы 1-2:

$$T_{кошки} + \frac{J_z\omega^2}{2} - 0 = A^i, \quad (7)$$

вычесть (6) из (7), то придем к (2) из 1-го способа:

$$\frac{ml^2\omega^2}{6} = -A. \quad (8)$$

Вновь используем (5): $mv - 0 = S$. Разделив (8) на (5), исключаем m :

$$\frac{l^2\omega^2}{6v} = -\frac{A}{S}. \quad (9)$$

Осталось связать в (9) ω и v . Так как для всей системы 1-2: $\sum_k M_z(\bar{F}_k^e) = 0$, то по закону сохранения кинетического момента для системы 1-2:

$$K_{z1} = K_{z0}. \quad (10)$$

Вначале система 1-2 была в покое, отсюда $K_{z0} = 0$.

Проанализируем, корректно ли считать кошку материальной точкой при записи K_{z1} ? Если упрощенно считать кошку материальной точкой, то можно сразу записать:

$$K_{z1} = K_{z1,кошки} + K_{z1,дверцы} = mv \cdot l - J_z \omega. \quad (11)$$

Из (10), (11): $\frac{1}{3} ml^2 \omega = mv \cdot l$, откуда

$$l\omega = 3v. \quad (12)$$

Учитывая это в (9), получаем ответ как при 1-м способе:

$$v = -\frac{2A}{3S}. \quad (13)$$

В 1-м способе такой же ответ получается и в общем случае, когда известно лишь, что кошка мала по сравнению с дверцей, однако все-таки является механической системой. Поэтому (11) должно выполняться в случае, когда кошка – механическая система. Значит, должно быть $K_{z1,кошки} = \sum_i M_z(m_i \bar{v}_i) = mv \cdot l$ (где $m_i \bar{v}_i$ – векторы количеств движений точек кошки). Дадим независимое обоснование этого, не используя ссылку на 1-й способ. Используя известную формулы из теории, запишем:

$$K_{z,кошки} = K_{Cz,r} + M_{Oz}(m\bar{v}_C), \quad (14)$$

где $K_{Cz,r}$ – кинетический момент системы «кошка» относительно оси Cz , проходящей через её центр масс C , при относительном движении кошки относительно поступательно движущейся системы координат,

связанной с точкой C . $M_{Oz}(m\bar{v}_C)$ – момент вектора количества движения системы «кошка» относительно оси вращения дверцы. Так как при прыжке внешние по отношению к кошке силы не создают моментов относительно оси Cz и вначале было $K_{Cz,0} = 0$, то и после прыжка $K_{Cz,1} = 0$. Тогда из (14) получается, с учетом обозначения $\bar{v}_C = \bar{v}$: $K_{z1,кошки} = M_{Oz}(m\bar{v}_C) = mv \cdot l$. Отсюда следует (11), и далее ответ (13).

Замечание 1. Чтобы записать J_z , необязательно помнить значение момента инерции пластины. Достаточно использовать общее определение момента инерции твердого тела относительно оси. Мысленно представим пластину как совокупность однородных стержней массами m_k ($\sum_k m_k = m$) и длины l . Тогда

$$J_z = \sum_k J_{z,стержень} = \sum_k m_k l^2 / 3 = ml^2 / 3.$$

Замечание 2. Малость размеров кошки введена в условие задачи для корректности формулы (3). (Иначе, если учитывать размеры лап кошки, то правую часть (3) пришлось бы уточнять.) В то же время некорректно считать кошку материальной точкой (см. замечание 3).

Замечание 3. Считать, что в (6), (7) $T_{кошки} = mv^2 / 2$ было бы некорректно, так как скорость лап кошки в момент отрыва равна скорости точки дверцы, а скорость, например, её головы другая. При этом происходят повороты её лап и изгиб туловища. Таким образом, кошка движется как механическая система, а не как материальная точка.

Замечание 4. Для установления связи между ω и v непригодна теорема об изменении количества движения системы 1-2 в проекции на ось x , перпендикулярную плоскости дверцы:

$$mv - m\omega l / 2 = S_{x,петли}.$$

Дело в том, что в её правой части содержится проекция импульса реакций петель дверцы $S_{x,петли}$, которая заранее неизвестна.

Ответ. $v = -\frac{2A}{3S}.$

Решение задачи Д4.

1 способ. При $\varphi = 45^\circ$ углы между соседними стержнями прямые. Рассмотрим отдельно систему точек B и C вместе со стержнем BC (рис. 18). Внешними силами для неё будут силы реакции \bar{S}_{BA} , \bar{S}_{CD} . Обозначим через K центр масс этой системы. Из формулы для центра масс легко найти:

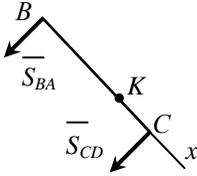


Рис. 18

$$BK = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l, \quad (1)$$

где l – длина стержня. Теорема о движении центра масс для этой системы: $(m_1 + m_2)\bar{a}_K = \bar{S}_{BA} + \bar{S}_{CD}$. Спроецируем её на ось $x \parallel BC$:

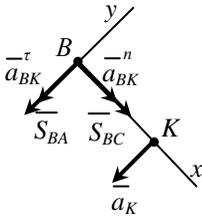


Рис. 19

$$a_{K,x} = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим отдельно точку B (рис. 19). $\bar{a}_B = \bar{a}_K + \bar{a}_{BK}^\tau + \bar{a}_{BK}^n$. По второму закону динамики для точки B :

$$m_2(\bar{a}_K + \bar{a}_{BK}^\tau + \bar{a}_{BK}^n) = \bar{S}_{BA} + \bar{S}_{BC}.$$

Спроецируем на ось x с учетом (1): $m_2 a_{BK}^n = S_{BC}$. Отсюда, из $a_{BK}^n = BK \cdot \omega_{BC}^2$ и (1):

$$S_{BC} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l \omega^2. \quad (3)$$

По аналогии можно рассмотреть систему точек A и B вместе со стержнем AB . Проводя те же рассуждения, получим аналог формулы (2): $a_{L,y} = 0$, где L – центр масс AB , ось $y \parallel AB$. Далее, рассматривая отдельно точку B , получим $m_2 a_{BL}^n = S_{BA}$. Единственное отличие от вывода (3) в том, что так как $\omega_{AB} = 0$, то $a_{BL}^n = 0$. Отсюда

$$S_{AB} = 0. \quad (4)$$

Теперь, проецируя $m_2 \bar{a}_B = \bar{S}_{BA} + \bar{S}_{BC}$ на оси x, y , можно найти, учитывая (3), (4):

$$m_2 a_{B,x} = S_{BC}, \quad m_2 a_{B,y} = -S_{BA}.$$

$$a_{B,x} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l \omega^2, \quad a_{B,y} = 0. \quad (5)$$

Рассматривая систему точек A и D вместе со стержнем AD и далее точку D аналогично изложенному выше, придем к симметричным аналогам формул (3) и (4):

$$S_{AD} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l \omega^2, \quad S_{CD} = 0. \quad (6)$$

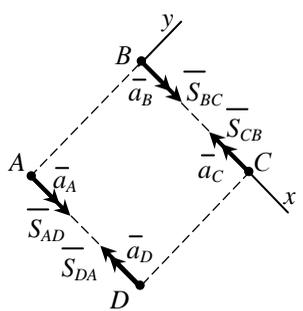


Рис. 20

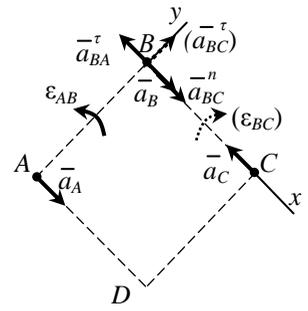


Рис. 21

Проецируя $m_1 \bar{a}_A = \bar{S}_{AD}$, $m_2 \bar{a}_C = \bar{S}_{CB}$ на оси x, y , с учетом (3), (6) (рис. 20):

$$a_{A,x} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \omega^2, \quad a_{A,y} = 0. \quad (7)$$

$$a_{C,y} = 0. \quad (8)$$

Определяем ϵ_{AB} и ϵ_{BC} (рис. 20). Проецируем $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^\tau$ ($a_{BA}^n = 0$) на x : $a_B = a_A - a_{BA}^\tau$, откуда $a_{BA}^\tau = a_A - a_B = l \epsilon_{AB}$ и

$$\epsilon_{AB} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \omega^2.$$

(Если $m_2 > m_1$, то $\varepsilon_{AB} > 0$ и ε_{AB} направлено против часовой стрелки. При $m_2 < m_1$ ε_{AB} по часовой стрелке). Проецируем $\bar{a}_B = \bar{a}_C + \bar{a}_{BC}^\tau + \bar{a}_{BC}^n$ на y : $a_{BA}^\tau = 0$, откуда

$$\varepsilon_{BC} = 0.$$

Замечание 1. Используемую в условии формулировку «систему свободно отпустили» можно трактовать по-разному: либо систему полностью лишили всех связей, кроме опоры на горизонтальную поверхность, либо систему лишили даже этой опоры. Во втором случае силы тяжести никак не повлияют на ход решения (в однородном поле сил тяжести дополнительные угловые ускорения возникнут не могут). Если бы система располагалась в наклонной плоскости, то это также никак не повлияло бы на ответ задачи.

Замечание 2. Из решения следует, что направление ω в условии роли не играет. Понятно, что угловые скорости стержней BC и AD должны быть направлены в одну и ту же сторону (так как $ABCD$ – ромб в любой момент времени), но неважно, по часовой стрелке или против неё.

Замечание 3. Из $\varepsilon_{BC} = 0$ следует $\bar{a}_{BK}^\tau = 0$ и $\bar{a}_K = 0$, т.е. рисунок для вывода (2) на самом деле еще проще (правда, заранее это неизвестно). В то же время $\bar{a}_L \neq 0$ (\bar{a}_L был введен в рассмотрение при обосновании (4)).

Замечание 4. То, что $S_{AB} = 0$, нуждалось в строгом обосновании. Опираясь на нестрогие соображения типа «очевидно, что движение систем $B-C$ и $A-D$ никак не связано» было бы недостаточно корректным. Кстати, несложно проверить, что при $\varphi \neq 45^\circ$ будет $S_{AB} \neq 0$.

Более длинное решение получается при сведении задачи к исследованию механической системы с двумя степенями свободы. Ниже приведены основанные на этом три различных способа решения.

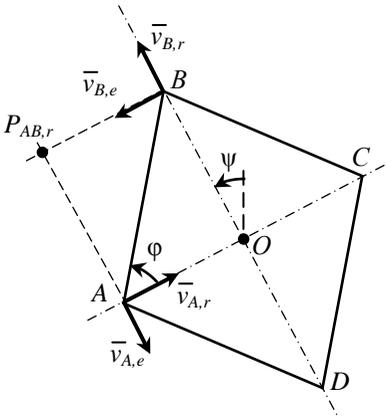


Рис. 22

2 способ. Для решения можно применить общее уравнение динамики. Способ приведен без промежуточных выкладок.

Рассмотрим движение каждой из точек A, B, C, D как сложное (рис. 22). Переносное движение каждой из этих точек связано с вращением $ABCD$ (при этом изменяется ψ – угол поворота прямой AC) вокруг точки O , находящейся на пересечении AC и BD , а также с движением самого центра O . Отметим, что

$\bar{a}_O = 0$, что сразу следует из теоремы о движении центра масс для $ABCD$. Относительное движение каждой из точек связано с изменением угла φ , т.е. с изменением формы ромба.

Для данного положения системы, когда углы между соседними стержнями прямые, полная картина распределения ускорений точек A, B приведена на рис. 23. (Для точек C, D ускорения определяются по аналогии с учетом симметрии.) Переносная и относительные угловые скорости: $\omega_e = \omega_r = \omega/2$, при этом $\omega_{AB,r}$ и $\omega_{BC,r}$ противоположны. $a_{A,e}^{\tau} = a_{B,e}^{\tau} = r\epsilon_e$, где $r = OA = OB$. $a_{A,e}^n = a_{B,e}^n = r\omega^2/4$. Для определения $v_{A,r}, v_{B,r}$ строится $P_{AB,r}$ – МЦС при относительном движении AB . $v_{A,r} = v_{B,r} = r\omega/2$. Тогда $a_{A,\kappa} = a_{B,\kappa} = r\omega^2/2$. Ускорения $a_{A,r}$ и $a_{B,r}$ при плоскопараллельном относительном движении AB можно выразить через $\epsilon_{AB,r} = \epsilon_r$:

$$a_{A,r} = r(\epsilon_r + (\omega^2/4)), \quad a_{B,r} = r(\epsilon_r - (\omega^2/4)).$$

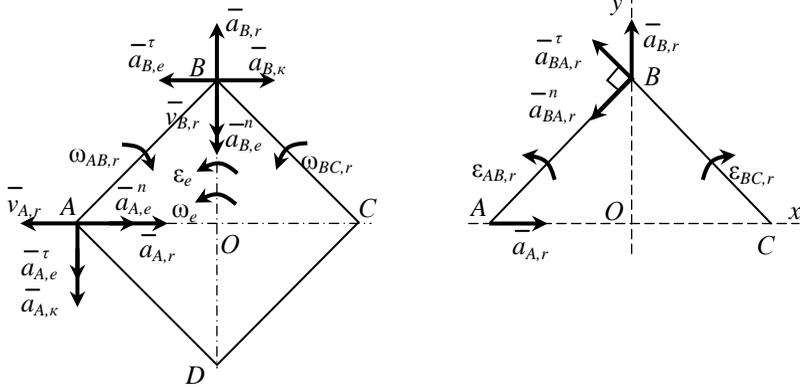


Рис. 23

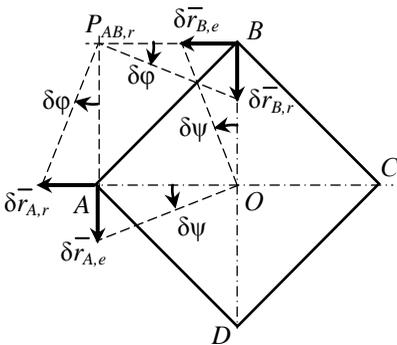


Рис. 24

Придадим системе возможное перемещение (рис. 24). Общее уравнение динамики:

$$\bar{\Phi}_A \delta \bar{r}_A + \bar{\Phi}_B \delta \bar{r}_B + \bar{\Phi}_C \delta \bar{r}_C + \bar{\Phi}_D \delta \bar{r}_D = 0.$$

Из соображений симметрии легко установить, что

$$\bar{\Phi}_C \delta \bar{r}_C + \bar{\Phi}_D \delta \bar{r}_D = \bar{\Phi}_A \delta \bar{r}_A + \bar{\Phi}_B \delta \bar{r}_B$$

Получаем уравнение: $\bar{\Phi}_A \delta \bar{r}_A + \bar{\Phi}_B \delta \bar{r}_B = 0$. После сокращения общего знака «-» в выражениях для сил инерции:

$$m_1((a_{A,e}^{\tau} + a_{A,\kappa}) \delta s_{A,e} + (-a_{A,e}^n - a_{A,r}) \delta s_{A,r}) + \\ + m_2((a_{B,e}^{\tau} - a_{B,\kappa}) \delta s_{B,e} + (a_{B,e}^n - a_{B,r}) \delta s_{B,r}) = 0.$$

Здесь $\delta s_{A,e} = \delta s_{B,e} = r \delta \varphi$, $\delta s_{A,r} = \delta s_{B,r} = r \delta \psi$. Учтываем это в уравнении, и затем варьируем раздельно по φ и ψ , т.е. полагаем сначала $\delta \varphi \neq 0$, $\delta \psi = 0$, а затем $\delta \varphi = 0$, $\delta \psi \neq 0$. Получаем два соотношения:

$$m_1(a_{A,e}^\tau + a_{A,\kappa}) + m_2(a_{B,e}^\tau - a_{B,\kappa}) = 0,$$

$$m_1(-a_{A,e}^n - a_{A,r}) + m_2(a_{B,e}^n - a_{B,r}) = 0.$$

Подставляя значения ускорений, получим систему двух уравнений относительно ε_e и ε_r . Решая её, находим:

$$\varepsilon_e = \varepsilon_r = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\omega^2}{2}.$$

Учитывая противоположные направления $\varepsilon_{AB,r}$ и $\varepsilon_{BC,r}$, получим окончательно:

$$\varepsilon_{AB} = \varepsilon_e + \varepsilon_r = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \omega^2.$$

$$\varepsilon_{BC} = \varepsilon_e - \varepsilon_r = 0.$$

3 способ. Задачу можно также решить с помощью уравнений Лагранжа 2-го рода.

Рассмотрим вначале произвольное положение системы. Обобщенные координаты – углы φ и ϕ , введенные во 2-м способе (будем отсчитывать их против часовой стрелки) (рис. 22).

Рассмотрим движение системы в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы O . Относительно этой системы отсчета переносное и относительное движения точек A, B, C, D определяются по аналогии со 2-м способом, однако с учетом $v_O = 0$ относительно неё.

$$v_{A,e} = OA \cdot \dot{\phi} = l \cos \phi \cdot \dot{\phi}, \quad v_{A,r} = AP_{AB,r} \cdot \dot{\phi} = l \sin \phi \cdot \dot{\phi},$$

$$v_{B,e} = OB \cdot \dot{\phi} = l \sin \phi \cdot \dot{\phi}, \quad v_{B,r} = BP_{AB,r} \cdot \dot{\phi} = l \cos \phi \cdot \dot{\phi}.$$

Так как $\bar{v}_{A,e} \perp \bar{v}_{A,r}$, $\bar{v}_{B,e} \perp \bar{v}_{B,r}$, то кинетическая энергия системы:

$$\begin{aligned} T &= 2 \left(\frac{m_1 v_A^2}{2} + \frac{m_2 v_B^2}{2} \right) = m_1 (v_{A,e}^2 + v_{A,r}^2) + m_2 (v_{B,e}^2 + v_{B,r}^2) = \\ &= l^2 ((m_1 \cos^2 \phi + m_2 \sin^2 \phi) \dot{\phi}^2 + (m_1 \sin^2 \phi + m_2 \cos^2 \phi) \dot{\phi}^2). \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= l^2 (m_1 \sin^2 \varphi + m_2 \cos^2 \varphi) \cdot 2\dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= 2l^2 ((m_1 - m_2) \sin 2\varphi \cdot \dot{\varphi}^2 + (m_1 \sin^2 \varphi + m_2 \cos^2 \varphi) \cdot \ddot{\varphi}), \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} &= l^2 (m_2 - m_1) (\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}^2) \sin 2\varphi, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= l^2 (m_1 \cos^2 \varphi + m_2 \sin^2 \varphi) \cdot 2\dot{\phi}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} &= 2l^2 ((m_2 - m_1) \sin 2\varphi \cdot \dot{\phi} \dot{\varphi} + (m_1 \cos^2 \varphi + m_2 \sin^2 \varphi) \cdot \ddot{\phi}), \\ \frac{\partial T}{\partial \phi} &= 0. \end{aligned}$$

Потенциальная энергия системы: $\Pi = const$.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \phi} = 0.$$

Учтем, что $\omega_{AB} = \dot{\phi} + \dot{\varphi}$, $\omega_{BC} = \dot{\phi} - \dot{\varphi}$ (знак «-», т.к. относительное вращение BC происходит в направлении, противоположном относительному вращению AB). При $t = 0$: $\varphi(0) = \pi/4$, $\omega_{AB}(0) = 0$, $\omega_{BC}(0) = \omega$ (если считать направление ω_{BC} против часовой стрелки, в противном случае результат будет тот же). Из условий

$$\dot{\phi}(0) + \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) - \dot{\varphi}(0) = \omega$$

находим:

$$\dot{\varphi}(0) = -\omega/2, \quad \dot{\phi}(0) = \omega/2. \quad (10)$$

Все подставляем в уравнения Лагранжа 2-го рода при $t = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial T}{\partial \phi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \phi}. \quad (11) \\ 2l^2 \left((m_1 - m_2) \frac{\omega^2}{4} + (m_1 + m_2) \frac{\ddot{\phi}(0)}{2} \right) - 0 &= 0, \end{aligned}$$

$$2l^2 \left((m_2 - m_1) \cdot \left(-\frac{\omega^2}{4} \right) + (m_1 + m_2) \frac{\ddot{\phi}(0)}{2} \right) - 0 = 0.$$

Отсюда сразу находим:

$$\ddot{\phi}(0) = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\omega^2}{2}, \quad (12)$$

$$\ddot{\phi}(0) = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\omega^2}{2}. \quad (13)$$

$$\varepsilon_{AB}(0) = \ddot{\phi}(0) + \ddot{\phi}(0) = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \omega^2. \quad (14)$$

$$\varepsilon_{BC}(0) = \ddot{\phi}(0) - \ddot{\phi}(0) = 0. \quad (15)$$

4 способ. Задачу можно решить и с помощью двух теорем динамики механической системы: теоремы об изменении кинетического момента и теоремы об изменении кинетической энергии (продифференцированной по времени).

Как и в 3-м способе рассмотрим движение системы в инерциальной системе отсчета, связанной с центром масс системы O (рис. 22).

Моменты количеств движений точек A и B относительно неподвижной оси Oz :

$$k_{z(A)} = M_z(m_1 \bar{v}_{A,e}) + M_z(m_1 \bar{v}_{A,r}) = m_1 v_{A,e} \cdot OA + 0 = m_1 l^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\phi},$$

$$k_{z(B)} = M_z(m_2 \bar{v}_{B,e}) + M_z(m_2 \bar{v}_{B,r}) = m_2 v_{B,e} \cdot OB + 0 = m_2 l^2 \sin^2 \varphi \cdot \dot{\phi},$$

Кинетический момент системы:

$$K_z = 2(k_{z(A)} + k_{z(B)}) = 2l^2(m_1 \cos^2 \varphi + m_2 \sin^2 \varphi) \dot{\phi}.$$

Теорема об изменении кинетического момента, с учетом

$$\sum_i M_z(\bar{F}_i^e) = 0: \quad \frac{dK_z}{dt} = 0, \text{ т.е.}$$

$$2l^2((m_2 - m_1) \sin 2\varphi \cdot \dot{\phi} + (m_1 \cos^2 \varphi + m_2 \sin^2 \varphi) \cdot \ddot{\phi}) = 0. \quad (16)$$

Соотношение (16) совпадает со вторым уравнением Лагранжа (11) в предыдущем способе.

Дифференцируем по времени теорему $T - T_0 = \sum_i A_i$, где T записана в (9), с учетом $\sum_i A_i = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} = l^2 ((m_2 - m_1)(\dot{\phi}^2 - \dot{\psi}^2)\dot{\phi} \sin 2\varphi + 2(m_1 \cos^2 \varphi + m_2 \sin^2 \varphi) \cdot \dot{\phi} \ddot{\phi} + \\ + 2(m_1 \sin^2 \varphi + m_2 \cos^2 \varphi) \cdot \dot{\psi} \ddot{\psi}) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

При $t = 0$, с учетом (10), из (16) получаем (13), а из (17) получаем сначала $\dot{\phi}(0)\ddot{\phi}(0) + \dot{\psi}(0)\ddot{\psi}(0) = 0$, откуда следует (12). Тогда из (12), (13) получаем ответы (14), (15).

Ответ. $\varepsilon_{AB} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \omega^2, \quad \varepsilon_{BC} = 0.$