Всероссийская студенческая олимпиада
по теоретической механике, КНИТУ, 2-6 декабря 2015 г.

Задачи компьютерного конкурса

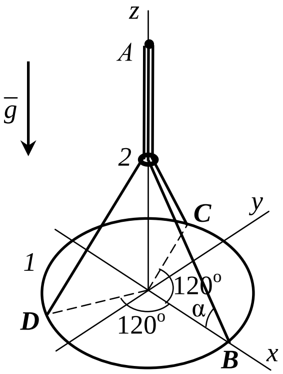

Рис. 1

Задача 1 (*32 балла*).

Однородное кольцо *1* радиуса $R = 0.5$ м и кольцо *2* пренебрежимо малого радиуса подвешены к узлу *A* с помощью трех нитей равной длины (рис. 1). Концы нитей прикреплены к кольцу *1* равноудаленно друг от друга в точках *B*, *C*, *D*. Нити проходят через кольцо *2*.

Нити нерастяжимы. Трением, весом нитей и узла *A*, а также толщиной колец пренебрегаем. В течение рассматриваемого промежутка времени кольцо *2* находится ниже узла *A* и выше кольца *1*. Принять ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с^2.

В момент $t = 0$ нити натянуты, угол между наклонным участком нити и горизонтальной плоскостью кольца *1* равен $\alpha = 60^o$, система находится в покое.

В текстах заданий 1.1-1.6 указаны дополняющие условия. (Эти дополняющие условия относятся только лишь к данному конкретному заданию!) Рис. 2-5 к заданиям приведены в проекции на плоскость *xz*.

В каждом из заданий 1.1-1.6 для заданного момента времени *t* определить перемещение s_1 кольца *1*. Перемещение s_1 отсчитывать от начального положения кольца *1*, в ответе привести значение s_1 по модулю.

Входные данные: *t*.

Выходные данные: s_1.

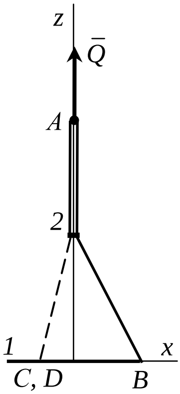

Рис. 2

Задание 1.1 (*3 балла*). Массой кольца *2* пренебрегаем. Кольцо *2* скреплено с нитями в точках контакта с ними (то есть не может перемещаться относительно нитей) (рис. 2). К незакрепленному узлу *A* приложили силу $\overline{Q}$, направленную вверх, проекция которой на ось *z* равна $Q_z(t) = \dfrac{t+2}{t+1} mg$, где m – масса кольца *1*.

Пример для отладки. При $t = 0.5$ с получим $s_1 = 1.06034$ м.

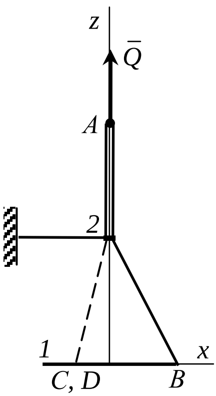

Рис. 3

Задание 1.2 (*4 балла*). Кольцо *2* прикреплено к неподвижной опоре (рис. 3). К незакрепленному узлу *A* приложили силу $\overline{Q}$, направленную вверх, проекция которой на ось *z* равна $Q_z(t) = \dfrac{t+2}{t+1} mg$, где m – масса кольца *1*.

Пример для отладки. При $t = 0.5$ с получим $s_1 = 0.64477$ м.

Задание 1.3 (*5 баллов*). Масса кольца *2* равна массе кольца *1* (рис.2). К незакрепленному узлу *A* приложили вертикально направленную переменную силу $\overline{Q}$, такую, что кольцо *2* остается в покое в течение рассматриваемого промежутка времени.

Пример для отладки. При $t = 0.2$ с получим $s_1 = 0.73266$ м.

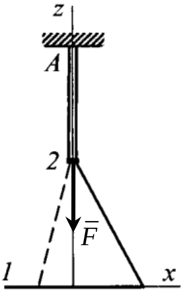

Рис. 4

Задание 1.4 (*6 баллов*). Массой кольца *2* пренебрегаем. Точка *A* неподвижно закреплена (рис.4). К кольцу *2* приложили силу $\overline{F}$, направленную вертикально вниз, величина которой равна весу кольца *1*.

Пример для отладки. При $t = 0.1$ с получим $s_1 = 0.16625$ м.

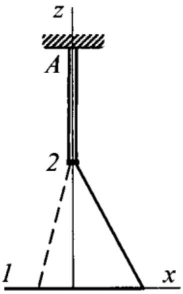

Рис. 5

Задание 1.5 (*8 баллов*). Масса кольца *2* равна массе кольца *1*. Точка *A* неподвижно закреплена (рис. 5).

Пример для отладки. При $t = 0.4$ с получим $s_1 = 0.25559$ м.

Задание 1.6 (*6 баллов*). Масса каждого из колец *1* и *2* равна m (рис. 2). К незакрепленному узлу *A* приложили силу $\overline{Q}$, проекция которой на ось z равна $Q_z(t) = \dfrac{t+2}{t+1} mg$.

Пример для отладки. При $t = 0.5$ с получим $s_1 = 0.41293$ м.

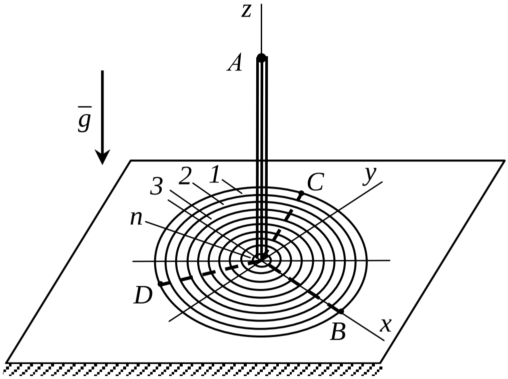

Рис. 6

Задача 2 (*28 баллов*).

Система состоит из последовательно вложенных друг в друга колец *1*, *2*, …, *n*, вначале расположенных на горизонтальной плоскости (рис. 6). Внешний радиус кольца *1* равен $R = 0.5$ м. Внешний радиус кольца *2* равен внутреннему радиусу кольца *1*, внешний радиус кольца *3* равен внутреннему радиусу кольца *2* и т.д. Внутренний радиус кольца *n* пренебрежимо мал. Разность внешнего и внутреннего радиусов для каждого из колец одинакова. Толщина вдоль вертикали для всех колец везде постоянна и одинакова. Все кольца однородны, их плотности одинаковы. Трение между кольцами отсутствует.

К равноудаленным друг от друга точкам *B*, *C*, *D* кольца *1* прикреплены три нити равной длины. Нити гладкие, нерастяжимые и невесомые. Нити пропущены под всеми кольцами, проходят через отверстие кольца *n*, выведены наверх и их концы образуют узел *A*. Рис. 6 соответствует этому положению системы.

Узел *A* медленно подняли вверх так, чтобы все кольца оторвались от опорной плоскости и система была при этом в равновесии.

Полагаем $n \to \infty$. Рассмотрим зависимость $\alpha = \alpha(r)$, где α – угол наклона к горизонтальной плоскости нити в точке касания с кольцом радиуса r ($0 < r \le R$). Обозначим через α_0 предельное значение угла α при стремлении радиуса кольца к нулю: $\alpha(r) \xrightarrow[r \to 0]{} \alpha_0$.

Задание 2.1 (*(10)+3 балла*, см. примечание 2 внизу).

При заданном α_0 ($0<\alpha_0<\pi/2$) определите $\overline{\alpha}$ – среднеинтегральное значение функции $\alpha(r)$.

Примечание 1. Среднеинтегральное значение функции $f(x)$ на интервале от a до b определяется по формуле $\bar{f} = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$.

Входные данные: α_0 .

Выходные данные: $\overline{\alpha}$.

Пример для отладки. При $\alpha_0 = 1.5$ рад получим $\overline{\alpha} = 0.82176$ рад.

Задание 2.2 (+*7 баллов*). При заданном α_0 ($0<\alpha_0<\pi/2$) определите, на какую величину h кольцо заданного радиуса r ($0<r\le R$) располагается выше кольца *1*.

Входные данные: α_0, r .

Выходные данные: h.

Пример для отладки. При $\alpha_0 = 1.5$ рад, $r = 0.2$ м получим $h = 0.19345$ м.

Задание 2.3 (+*8 баллов*). При заданной длине L ($L > R$) каждой из нитей определите α_0 .

Входные данные: L .

Выходные данные: α_0 .

Пример для отладки. При $L = 0.9$ м получим $\alpha_0 = 1.29727$ рад.

Примечание 2. Общий балл за задачу 2 складывается из двух составляющих: 1) при верном решении хотя бы одного задания участники получают 10 базовых баллов, 2) к этому добавляются баллы, указанные в заголовках верно решенных заданий.

Например, при решении только одного задания 2.2 присуждается $10+7=17$ баллов, при решении только двух заданий 2.1 и 2.3 присуждается $10+3+8=21$ балл и т.д.