

**Всероссийская студенческая олимпиада
по теоретической механике, КНИТУ, 2-6 декабря 2015 г.**

Решения задач компьютерного конкурса

Автор задач: доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштары Айрат Ильдарович.

Рецензент: доцент кафедры аэрогидродинамики КФУ Марданов Ренат Фаритович.

Решение задачи 1.

1.1. Отсчитывая s_1 вверх, по теореме о движении центра масс механической системы получим:

$$m\ddot{s}_1 = -mg + Q_z.$$

$$\ddot{s}_1 = \frac{1}{t+1} g.$$

Решаем это дифференциальное уравнение (ДУ) при начальных условиях $s_1(0) = 0$, $\dot{s}_1(0) = 0$. Задача имеет аналитическое решение. Однако при наличии типовой программы быстрее решить её численно. Можно использовать, например, метод Рунге-Кутты. Для требуемой точности достаточно выбрать шаг по времени $h = 10^{-6}$ с.

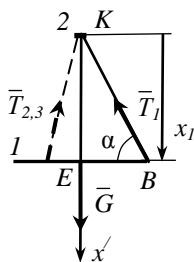


Рис. 1

1.2. Для удобства введем направленную вниз ось x' (рис. 1). В дальнейшем индекс «/» опускаем. Точку отсчета x совместим с неподвижным кольцом 2.

Введем обозначения: T – сила натяжения каждой из нитей, x_1 – координата кольца 1. ДУ движения кольца 1:

$$m\ddot{x}_1 = mg - 3T \sin \alpha. \quad (1)$$

Так как узел A невесом, то $Q = 3T$. Из треугольника BEK получим:

$$\sin \alpha = \frac{EK}{BK} = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}}. \quad (2)$$

Тогда из (1), (2):

$$m\ddot{x}_1 = mg - Q \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}}.$$

$$\ddot{x}_1 = g \left(1 - \frac{t+2}{t+1} \cdot \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + R^2}} \right).$$

Решаем численно это ДУ при начальных условиях $x_1(0) = R \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}/2$, $\dot{x}_1(0) = 0$. Искомое перемещение кольца 1 в этом, а также во всех последующих заданиях:

$$s_1 = |x_1 - x_1(0)|.$$

Для численного решения ДУ можно использовать, например, метод Рунге-Кутты. Для требуемой точности достаточно выбрать шаг по времени $h = 10^{-4}$ с. При $t = 0.6718$ с перестает выполняться условие $x_1 > 0$, т.е. плоскость кольца 1 достигает кольца 2. Поэтому в тестах предлагаются меньшие значения времени.

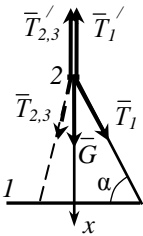


Рис. 2

1.3. ДУ движения кольца 1 имеет вид (1). Обозначим через x_2 координату кольца 2. Формально, ДУ движения кольца 2, рассматриваемого вместе с малыми участками нитей около этого кольца, имеет вид (рис. 2):

$$m\ddot{x}_2 = mg + 3T \sin \alpha - 3T. \quad (3)$$

Так как из условия очевидно $\ddot{x}_2 = 0$, то из (3):

$$3T = \frac{mg}{1 - \sin \alpha}. \quad (4)$$

Подставим (4) в (1):

$$m\ddot{x}_1 = mg - \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} mg.$$

$$\ddot{x}_1 = g \left(\frac{1 - 2 \sin \alpha}{1 - \sin \alpha} \right). \quad (5)$$

Так как все время $x_2 = 0$, то в (5) $\sin \alpha$ определяется соотношением (2). Подстановку (2) достаточно реализовать лишь в программе при численном моделировании.

Начальные условия для ДУ (5) те же, что и в задании 1.2.

При $t = 0.2272$ с плоскость кольца 1 достигает кольца 2. Поэтому в тестах предлагаются меньшие значения времени.

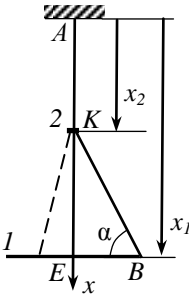


Рис. 3

1.4. 1 способ.

Точку отсчета x совместим с неподвижной точкой A . Тогда ДУ движения кольца 1 по-прежнему имеет вид (1).

Так как $F = G$, а массой кольца 2 пренебрегаем, то из ДУ (3) вновь получим соотношение (4), затем подстановкой в (1) вновь придем к ДУ вида (5).

Однако в отличие от заданий 1.2, 1.3 в (5) будет (рис. 3):

$$\sin \alpha = \frac{EK}{BK} = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + R^2}}. \quad (6)$$

Выразим x_2 через x_1 , учитывая, что длина l нити AB постоянна:

$$KB^2 = EK^2 + BE^2.$$

$$(l - x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + R^2.$$

$$l^2 - 2lx_2 + x_2^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + R^2.$$

$$l^2 - 2lx_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + R^2. \quad (7)$$

$$x_2 = \frac{l^2 - R^2 - x_1^2}{2(l - x_1)}. \quad (8)$$

Подстановку (8) в (6), а затем (6) в ДУ (5) достаточно осуществить лишь в программе при численном моделировании.

В отличие от заданий 1.2, 1.3 начальные условия будут:

$$x_1(0) = (AK + KE)|_{t=0} = \left(l - \frac{R}{\cos 60^\circ} \right) + R \operatorname{tg} 60^\circ = l - 1 + (\sqrt{3}/2), \quad (9)$$

$$\dot{x}_1(0) = 0. \quad (10)$$

Очевидно, что значение l не может повлиять на искомое значение s_1 . Поэтому в программе l можно выбрать произвольно, лишь бы все время выполнялось условие $x_2 > 0$. Численная реализация показывает, что для предлагаемых в тестах интервалах движения это условие выполняется. Поэтому достаточно, чтобы было $l > KB|_{t=0}$, т.е. $l > 1$.

При $t = 0.198833$ с перестает выполняться условие $x_1 > x_2$, т.е. плоскость кольца 1 поднимается до уровня кольца 2. (При этом программа выдает $s_1 = 0.366025$, что совпадает с аналитическим значением $s_1 = (\sqrt{3}/2) - (1 - 0.5)$). Поэтому в тестах предлагаются меньшие значения t .

2 способ. Можно решить задачу с помощью теоремы об изменении кинетической энергии. Схема решения приведена после аналогичного решения задания 1.5.

1.5. 1 способ (с использованием ДУ движения).

Перепишем ДУ движения колец (1) и (3):

$$m\ddot{x}_1 = mg - 3T \sin \alpha,$$

$$m\ddot{x}_2 = mg - 3T(1 - \sin \alpha).$$

Исключая отсюда T , получим:

$$\frac{m\ddot{x}_1 - mg}{\sin \alpha} = \frac{m\ddot{x}_2 - mg}{1 - \sin \alpha}.$$

$$\ddot{x}_1 = g + \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha} (\ddot{x}_2 - g).$$

Здесь обозначим для сокращения записей в дальнейшем:

$$q_\alpha = \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}, \quad (11)$$

где $\sin \alpha$ по-прежнему определяется из (6). Тогда

$$\ddot{x}_1 = q_\alpha \ddot{x}_2 + (1 - q_\alpha)g. \quad (12)$$

Чтобы выразить \ddot{x}_2 через \ddot{x}_1 , продифференцируем, например, (7):

$$-2l\dot{x}_2 = 2x_1\dot{x}_1 - 2\dot{x}_1x_2 - 2x_1\dot{x}_2.$$

$$(x_1 - l)\dot{x}_2 = (x_1 - x_2)\dot{x}_1. \quad (13)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - l} \dot{x}_1. \quad (14)$$

Дифференцируем (13):

$$\dot{x}_1\dot{x}_2 + (x_1 - l)\ddot{x}_2 = (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\dot{x}_1 + (x_1 - x_2)\ddot{x}_1.$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - l} \ddot{x}_1 + \frac{\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2}{x_1 - l} \dot{x}_1. \quad (15)$$

Подставляем (15) в (12):

$$\ddot{x}_1 = q_\alpha \frac{x_1 - x_2}{x_1 - l} \ddot{x}_1 + q_\alpha \frac{\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2}{x_1 - l} \dot{x}_1 + g(1 - q_\alpha).$$

$$\ddot{x}_1(x_1 - l - q_\alpha(x_1 - x_2)) = q_\alpha(\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2)\dot{x}_1 + g(1 - q_\alpha)(x_1 - l).$$

$$\ddot{x}_1 = \frac{q_\alpha(\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2)\dot{x}_1 + g(1 - q_\alpha)(x_1 - l)}{x_1 - l - q_\alpha(x_1 - x_2)}. \quad (16)$$

Чтобы (16) имело завершённый вид $\ddot{x}_1 = f(x_1, \dot{x}_1)$, в правой части (16) надо подставить выражения для x_2 из (8) и для \dot{x}_2 из (14). Сделать эти подстановки во избежание громоздких записей удобнее уже в самой программе.

Численно решаем ДУ (16), где в программе последовательно учтены (8), (14), (6), (11), при начальных условиях (9), (10).

При $t = 0.4594$ с плоскость кольца 1 поднимается до уровня кольца 2. Поэтому в тестах предлагаются меньшие значения t .

2 способ (по теореме об изменении кинетической энергии механической системы).

По теореме об изменении кинетической энергии для системы, состоящей из колец с нитями, получим:

$$\frac{m\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2} = A_{G,1} + A_{G,2}. \quad (17)$$

Здесь учтено, что силы натяжения \bar{T} в сечениях нитей вблизи точки A работу не совершают. Так как ось x направлена вниз, то работы сил тяжести равны:

$$A_{G,1} = mg(x_1 - x_{1,0}), \quad A_{G,2} = mg(x_2 - x_{2,0}), \quad (18)$$

где $x_{1,0}$ определяется из (9), $x_{2,0} = l - \frac{R}{\cos 60^\circ} = l - 1$.

Тогда из (17), с учетом (18) и (14):

$$\frac{\dot{x}_1^2}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 - l} \right)^2 \dot{x}_1^2 = g(x_1 - x_{1,0} + x_2 - x_{2,0}).$$

$$\dot{x}_1^2 = \frac{2g(x_1 - x_{1,0} + x_2 - x_{2,0})}{1 + \left(\frac{x_1 - x_2}{x_1 - l} \right)^2}.$$

$$\dot{x}_1 = \pm \sqrt{\frac{2g(x_1 - x_{1,0} + x_2 - x_{2,0})}{1 + ((x_1 - x_2)/(x_1 - l))^2}}, \quad (19)$$

где x_2 выражается в программе через x_1 по формуле (8).

Получили ДУ 1-го порядка (19) с начальным условием (9).

Нужно определиться с выбором знака «+» или «-» перед квадратным корнем в правой части (19). Так как вначале система находится в покое, то сразу не ясно, при данном начальном положении колец 1 и 2 будут ли они двигаться навстречу друг другу или наоборот. Строгое рассуждение для выбора знака предполагает исследование положения равновесия системы с помощью уравнений равновесия или с использованием условия минимальности потенциальной энергии системы. Однако прояснить вопрос можно при численном решении ДУ (19). Если в (19) выбрать «+», то программа выдаст ошибку из-за отрицательного значения под корнем. При выборе «-» программа работает успешно. При численном моделировании в течение рассматриваемого

промежутка времени будет $\dot{x}_1 < 0$, при этом кольцо l поднимается вверх. Таким образом, смены знака в (19) не происходит.

Итак, в рамках данной постановки задачи разрешающее ДУ имеет вид:

$$\dot{x}_1 = -\sqrt{\frac{2g(x_1 - x_{1,0} + x_2 - x_{2,0})}{1 + ((x_1 - x_2)/(x_1 - l))^2}}. \quad (20)$$

Преимущество 2-го способа по сравнению с 1-м способом состоит в более быстром получении ДУ. С другой стороны, 2-й способ приводит к ДУ (20) первого порядка, что вроде бы должно давать более высокую точность по сравнению с ДУ второго порядка (16). Однако в данном случае это не так. Дело в том, что при $t = 0$ правая часть (20) равна нулю. Поэтому при любом численном методе решения такого ДУ для любого $t \geq 0$ получится $x_1(t) \equiv x_1(0)$, чего, очевидно, быть не должно. (В этом легко убедиться, решив аналитически и попробовав решить численно, например, ДУ $\dot{x} = \sqrt{x}$ при начальном условии $x(0) = 0$). Тем не менее, за счет машинной погрешности вычислений точное значение $x_{2,0} = l - 1$ может чуть-чуть отличаться от значения $x_2(0)$, полученного из (8) на первом шаге численного метода. Тогда в программе правая часть (20) чуть отличается от нуля. Это снимает проблему, однако приводит в дальнейшем к небольшой погрешности вычислений. Для тестовых значений t эта погрешность у автора оказалась в 4-й значащей цифре после запятой.

Существует способ, позволяющий избавиться от этой погрешности. Если разделить переменные в (20), то задача сведётся к вычислению интеграла с переменным верхним пределом. Получаем:

$$-\int_{x_{1,0}}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + ((x_1 - x_2)/(x_1 - l))^2}{2g(x_1 - x_{1,0} + x_2 - x_{2,0})}} dx_1 = t.$$

Интеграл в левой части имеет так называемую слабую сингулярность. Это означает, что подынтегральная функция при $x_1 \rightarrow x_{1,0}$ стремится к бесконечности, при этом интеграл является конечным числом. Применение квадратурных формул для «обычного» интеграла даже при

крайне малом шаге изменения x_1 привело бы к некоторой погрешности вычислений. Поэтому лучше применять специальные квадратурные формулы для слабосингулярных интегралов. Эти формулы не входят в программы общих вузовских курсов по методам вычислений и здесь не приводятся.

Задание 1.4 можно также решить по аналогии с вышеизложенным способом. При этом будет упрощение по сравнению с (17), связанное с отсутствием в левой части величины $\frac{m\dot{x}_2^2}{2}$. В итоге, по сравнению с (20) получим ДУ 1-го порядка более простого вида:

$$\dot{x}_1 = -\sqrt{2g(x_1 - x_{1,0} + x_2 - x_{2,0})}. \quad (21)$$

Заметим, что если попробовать решить ДУ (21) аналитически методом разделения переменных, то после преобразований потребовалось бы вычислить интеграл общего вида $\int \sqrt{\frac{y+a}{y^2+b}} dy$ либо

$$\int \sqrt{\frac{y}{y^2+ay+b}} dy. \text{ В таблицах интегралов от иррациональных функций}$$

такой интеграл обнаружить не удастся. Поэтому (21) решаем также численно.

Заметим также, что в заданиях 1.1-1.3 при применении теоремы об изменении кинетической энергии возникла бы проблема вычисления работы силы \bar{Q} .

1.6. Будем отсчитывать x_1 и x_2 от начального положения A_0 узла A (рис. 4). Механическая система имеет две степени свободы. Одна из них связана с перемещением узла A , а другая – с перемещением кольца 2 относительно кольца 1. Поэтому x_1 и x_2 являются независимыми друг от друга параметрами. С учетом $3T = \bar{Q}$, из (1), (3) получаем:

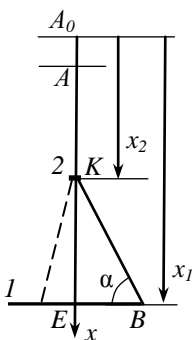


Рис. 4

$$\ddot{x}_1 = g - (Q/m)\sin\alpha, \quad (22)$$

$$\ddot{x}_2 = g - (Q/m)(1 - \sin\alpha). \quad (23)$$

Здесь $Q/m = \frac{t+2}{t+1}g$, а выражение для $\sin\alpha$ подставляется из (6).

Решаем систему двух ДУ второго порядка (22), (23) при начальных условиях:

$$x_1(0) = l - 1 + (\sqrt{3}/2), \quad x_2(0) = l - 1,$$

$$\dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0.$$

При использовании метода Рунге-Кутты для требуемой точности достаточно выбрать шаг по времени $h = 10^{-6}$ с.

Решение задачи 2.

Возникает интересный вопрос, при равновесии системы после отрыва от опорной плоскости верхнее кольцо n при $n \rightarrow \infty$ находится на пренебрежимо малом расстоянии от точки A либо это расстояние конечно?

Отметим вначале, что величина α_0 по условию равна именно предельному значению $\alpha(r)$ при $r \rightarrow 0$, а не «углу наклона нити при $r = 0$ » или «углу наклона нити выше кольца n ». Таким образом, величина α_0 определяет угол наклона нити на участке между кольцами $n-1$ и n при условии $n \rightarrow \infty$.

В решении задания 2.3 доказывается, что $\alpha_0 \rightarrow \pi/2$, если длина нити $L \rightarrow \infty$. При конечном значении L выполняется строгое неравенство $\alpha_0 < \pi/2$. Это отражено в условии задачи.

Обозначим через T натяжение каждой из нитей. Если предположить, что расстояние от точки A до кольца n было бы конечно, то был бы участок, где нити вертикальны. Тогда уравнение равновесия кольца n с учетом пренебрежимой малости его массы

$$\sum_k F_{kz} = 3T - 3T \sin \alpha_0 = 0$$

вступило бы в противоречие с неравенством $\alpha_0 < \pi/2$.

Таким образом, верхнее кольцо n при $n \rightarrow \infty$ стремится к точке A . Как будет далее видно, при решении заданий 2.1 и 2.2 это обстоятельство роли не играет и становится существенным лишь в ходе решения задания 2.3.

2.1. Малая масса dm кольца радиуса r связана с его малым объемом dV соотношением $dm = \rho dV$, где ρ – плотность. Здесь $dV = dS \cdot c$, где c – толщина вдоль вертикали, а площадь кольца: $dS = \pi((r + dr)^2 - r^2) = \pi(2rdr + (dr)^2) \approx 2\pi r dr$. Тогда

$$dm = \rho \cdot 2\pi r dr \cdot c. \quad (1)$$

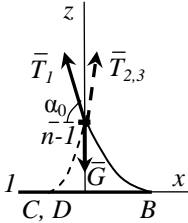


Рис. 5

Как было ранее отмечено, величина α_0 определяет угол наклона нити между кольцами $n-1$ и n при $n \rightarrow \infty$. Запишем уравнение равновесия системы, образованной кольцами 1, 2, ..., $n-1$ вместе с нитями от кольца 1 до вышеуказанных участков (рис. 5). Обозначим через M массу всех колец. Учтем, что масса кольца n пренебрежимо мала по сравнению с M . Получим:

$$\sum_k F_{kz} = 3T \sin \alpha_0 - Mg = 0.$$

$$3T = \frac{Mg}{\sin \alpha_0}.$$

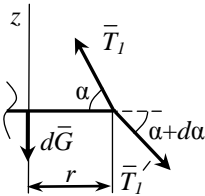


Рис. 6

По аналогии запишем уравнение равновесия кольца 1, обозначив $\alpha_R = \alpha(R)$, учитывая (2) и то, что его масса m_1 пренебрежимо мала по сравнению с M :

$$\sum_k F_{kz} = 3T \sin \alpha_R - m_1 g = 0.$$

$$\sin \alpha_R = \frac{m_1 g}{3T} = \frac{m_1 g \sin \alpha_0}{Mg} \approx 0, \quad (3)$$

т.е. при $n \rightarrow \infty$ получаем:

$$\alpha_R = 0. \quad (4)$$

Запишем уравнение равновесия произвольного кольца k ($0 < k < n$) (на рис. 6 не указаны силы натяжения нитей AC и AD). Если его внутренний радиус равен r ($0 < r < R$), внешний радиус равен $r + dr$, то углы наклона нити на участке чуть выше (между кольцами $k+1$ и k) и чуть ниже (между кольцами k и $k-1$) равны α и $\alpha + d\alpha$, соответственно. Из физических соображений функция $\alpha = \alpha(r)$ предполагается убывающей, поэтому ожидается $d\alpha < 0$. Получим:

$$\sum_k F_{kz} = 3T \sin \alpha - 3T \sin(\alpha + d\alpha) - dG = 0. \quad (5)$$

По формуле разности синусов:

$$\sin(\alpha + d\alpha) - \sin \alpha = 2 \sin \frac{d\alpha}{2} \cos \frac{(2\alpha + d\alpha)}{2} \approx \cos \alpha d\alpha.$$

Тогда из (5), с учетом $dG = dm \cdot g$ и (1), (2):

$$-3T \cos \alpha d\alpha = dm \cdot g. \quad (6)$$

$$-\frac{M}{\sin \alpha_0} \cos \alpha d\alpha = \rho \cdot 2\pi r dr \cdot c.$$

Учтем здесь, что $M = \rho V = \rho \pi R^2 c$:

$$-\frac{R^2}{\sin \alpha_0} \cos \alpha d\alpha = 2r dr.$$

Интегрируем это дифференциальное соотношение в таких пределах, чтобы учесть (4):

$$-\frac{R^2}{\sin \alpha_0} \int_{\alpha}^{\alpha_R} \cos \alpha d\alpha = 2 \int_r^R r dr.$$

$$-\frac{R^2}{\sin \alpha_0} (\sin 0 - \sin \alpha) = (R^2 - r^2).$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \alpha_0}{R^2} (R^2 - r^2). \quad (7)$$

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{\sin \alpha_0}{R^2} (R^2 - r^2) \right). \quad (8)$$

Искомое среднеинтегральное значение функции $\alpha(r)$:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{R} \int_0^R \arcsin\left(\frac{\sin\alpha_0}{R^2}(R^2 - r^2)\right) dr. \quad (9)$$

Интеграл в (9) вычисляется численно, например, по формуле прямоугольников с шагом интегрирования $\Delta r = 10^{-4}$ м. Пример вычислений для этого и последующих заданий приведен в тексте условия как пример для отладки.

Замечание. Соотношение (7) можно получить из (6), не проводя вышеизложенный вывод (2). Из (6), с учетом (4):

$$\begin{aligned} -3T \cos\alpha \, d\alpha &= \rho\pi c g \cdot 2r \, dr. \\ -3T \int_{\alpha}^{\alpha_0} \cos\alpha \, d\alpha &= \rho\pi c g \int_r^R 2r \, dr. \\ 3T \sin\alpha &= \rho\pi c g (R^2 - r^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Положим здесь $r = 0$, $\alpha = \alpha_0$:

$$\begin{aligned} 3T \sin\alpha_0 &= \rho\pi c g R^2. \\ 3T &= \frac{\rho\pi c g}{\sin\alpha_0} R^2, \end{aligned} \quad (11)$$

что эквивалентно (2). Поставляя (11) в (10), приходим к (7).

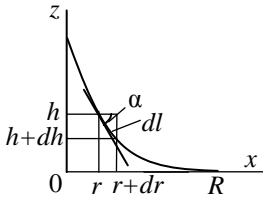


Рис. 7

2.2. В малом прямоугольном треугольнике с катетами, равными dr и соответствующим малым изменением высоты кольца dh (рис.7) имеем: $\operatorname{tg}\alpha = |dh|/|dr|$. Так как при $dr > 0$ будет $dh < 0$, то $\operatorname{tg}\alpha = -dh/dr$. Тогда из (8):

$$\frac{dh}{dr} = -\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(\frac{\sin\alpha_0}{R^2}(R^2 - r^2)\right)\right). \quad (12)$$

Другая форма записи ДУ, с учетом $dh/dr = -\sin\alpha/\cos\alpha$:

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}, \quad (13)$$

куда в правой части подставляем выражение для $\sin \alpha$ из (7). При желании можно вывести аналитически:

$$\frac{dh}{dr} = -\frac{(R^2 - r^2) \sin \alpha_0}{\sqrt{R^4 - (R^2 - r^2)^2 \sin^2 \alpha_0}}.$$

Однако подстановку (7) в (13) удобнее сделать в самой программе.

Для однозначного решения ДУ 1-го порядка (12) либо (13) имеем условие $h(R) = 0$. Если сделать замену переменной $r_1 = -r$, то $dr_1 = -dr$, $r_1^2 = r^2$. Тогда в правой части ДУ поменяется лишь знак. Например, вместо (12) получим ДУ:

$$\frac{dh}{dr_1} = \operatorname{tg} \left(\arcsin \left(\frac{\sin \alpha_0}{R^2} (R^2 - r_1^2) \right) \right),$$

которое решаем численно по стандартному алгоритму при уже начальном условии $h(-R) = 0$. При заданном r ($-R \leq -r < 0$) получаем искомое значение h . При использовании метода Рунге-Кутты для требуемой точности достаточно выбрать шаг $\Delta r = 10^{-4}$ м.

Другой способ решения (12) либо (13) использует возможность разделения переменных. Например, из (13):

$$\int_h^0 dh = - \int_r^R \frac{(R^2 - r^2) \sin \alpha_0}{\sqrt{R^4 - (R^2 - r^2)^2 \sin^2 \alpha_0}} dr.$$

$$h = \int_r^R \frac{(R^2 - r^2) \sin \alpha_0}{\sqrt{R^4 - (R^2 - r^2)^2 \sin^2 \alpha_0}} dr. \quad (14)$$

Интеграл в правой части (14) вычисляется численно. При использовании формулы прямоугольников для требуемой точности достаточно выбрать шаг $\Delta r = 10^{-5}$ м.

Если было бы выбрано $\alpha_0 = \pi/2$, то подынтегральная функция в (14) при $r \rightarrow 0$ стремилась бы, с учетом пренебрежимой малости r^4 по сравнению с r^2 , к виду $\frac{R^2}{\sqrt{2R^2r^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{r}$. Из-за односторонней сингулярности вида $1/r$ интеграл (14) при $r \rightarrow 0$ стремился бы к бесконечности. Поэтому, так как нить имеет конечную длину, то значе-

ние $\alpha_0 = \pi/2$ не может реализоваться. Поэтому в условиях заданий 2.1, 2.2 прописано строгое ограничение $\alpha_0 < \pi/2$.

При $\alpha_0 < \pi/2$ подынтегральная функция в (14) при $r \rightarrow 0$ имеет конечный предел и является непрерывной на всем отрезке $0 \leq r \leq R$. Если положить формально $r=0$, то можно получить высоту h для точки A . Например, при $\alpha_0 = \pi/3$, $r=0$ получим $h=0.4445$. Таким образом, строгое неравенство $r > 0$ в условии оговорено лишь по той формальной причине, что не существует кольца нулевого радиуса.

2.3. Для малого участка длины dl нити (рис. 7), с учетом (7):

$$dl = \frac{dr}{\cos \alpha} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{R^2}{\sqrt{R^4 - (R^2 - r^2)^2 \sin^2 \alpha_0}} dr.$$

Интегрируем по всей длине нити L :

$$L = \int_0^L dl = R^2 \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{R^4 - (R^2 - r^2)^2 \sin^2 \alpha_0}}. \quad (15)$$

При численном интегрировании, например, при $\alpha_0 = \pi/3$ получим $L = 0.7011$.

Подынтегральная функция в (15) при каждом фиксированном r будет тем больше, чем больше α_0 . Поэтому функция $L = L(\alpha_0)$ монотонно возрастает. Из (15) очевидно, что при $\alpha_0 \rightarrow 0$ будет $L \rightarrow R$. По аналогии с обоснованием в решении задания 2.2 получим, что при $\alpha_0 \rightarrow \pi/2$ будет $L \rightarrow \infty$.

Обозначим

$$f(\alpha_0) = L - R^2 \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{R^4 - (R^2 - r^2)^2 \sin^2 \alpha_0}}.$$

При заданном L искомое α_0 находим численно как решение нелинейного уравнения $f(\alpha_0) = 0$, например, методом деления отрезка пополам. Учтем при этом, что функция $f(\alpha_0)$ монотонно убывает. В качестве исходного отрезка возьмем $\alpha_0 \in [0; (\pi/2) - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ –

малое число, например, $\varepsilon = 0.001$. После получения искомого α_0 нужно проверить выполнение $\alpha_0 < (\pi/2) - \varepsilon$. В случае невыполнения нужно уменьшить ε .

Примеры вычислений для всех заданий приведены в условиях задач в примерах для отладки.

Критерии оценивания ответов участников

При записи ответов в бланки указывается ровно столько цифр после десятичной запятой, сколько их приведено в соответствующих примерах для отладки. Последняя значащая цифра пишется с учетом округления.

При проверке ответов участников во всех конкурсных заданиях полный балл присуждается, если либо предложенный ответ совпадает с правильным либо при абсолютной погрешности предложенного ответа $\Delta = 0.00001$. При большей погрешности предложенного ответа, если ответ близок к правильному, баллы присуждаются на основании разбалловки, выработанной жюри.