

Министерство образования и науки России  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

# **РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИ- МОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ НА ИЗГИБ И УСТОЙЧИВОСТЬ**

Методические указания  
к самостоятельной работе студентов

Казань 2015

В методических указаниях представлено изложение метода расчета стержневой конструкции, в котором учитываются особенности и взаимосвязь задач изгиба и устойчивости. Содержатся теоретические данные по основам метода сил и метода расчета стержней на устойчивость по коэффициенту снижения допускаемых напряжений. Приводятся необходимые для выполнения расчетно-проектировочной работы сведения, включающие исходные данные, порядок выполнения задания. Представлен пример выполнения расчетно-проектировочной работы.

### Задание к расчетно-проектировочной работе

Для заданной статически неопределимой стержневой системы определить размеры поперечных сечений балки и стойки. Размеры балки найти из условия прочности, размеры стойки – из условия устойчивости.

Схемы стержневых систем представлены на рис.1, исходные данные – в таблице 1. Поперечное сечение балки – двутавр, стойки – кольцо с заданным отношением внутреннего диаметра к наружному  $c = d / D$ . Материалы балки и стойки сталь (Ст.3), допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа. Полагается, что при расчете балки на прочность площадь поперечного сечения стойки  $A_c = \frac{20I_x}{l_c^2}$ , где  $I_x$  – осевой момент инерции балки,  $l_c$  – длина стойки.

Таблица 1

№	$M$ , кН·м	$F$ , кН	$q$ , кН/м	$l$ , м	$l_c$ , м	$c$
1	35	60	20	1,0	1,5	0,80
2	25	50	25	1,2	1,8	0,85
3	40	40	30	1,4	2,0	0,90
4	30	50	15	1,6	1,4	0,95
5	40	40	20	1,4	2,2	0,90
6	20	60	25	1,2	1,6	0,85
7	30	50	30	1,0	1,4	0,80
8	35	40	25	1,2	2,0	0,90
9	30	30	30	1,4	1,5	0,85

0	40	60	20	1,6	1,8	0,90
---	----	----	----	-----	-----	------

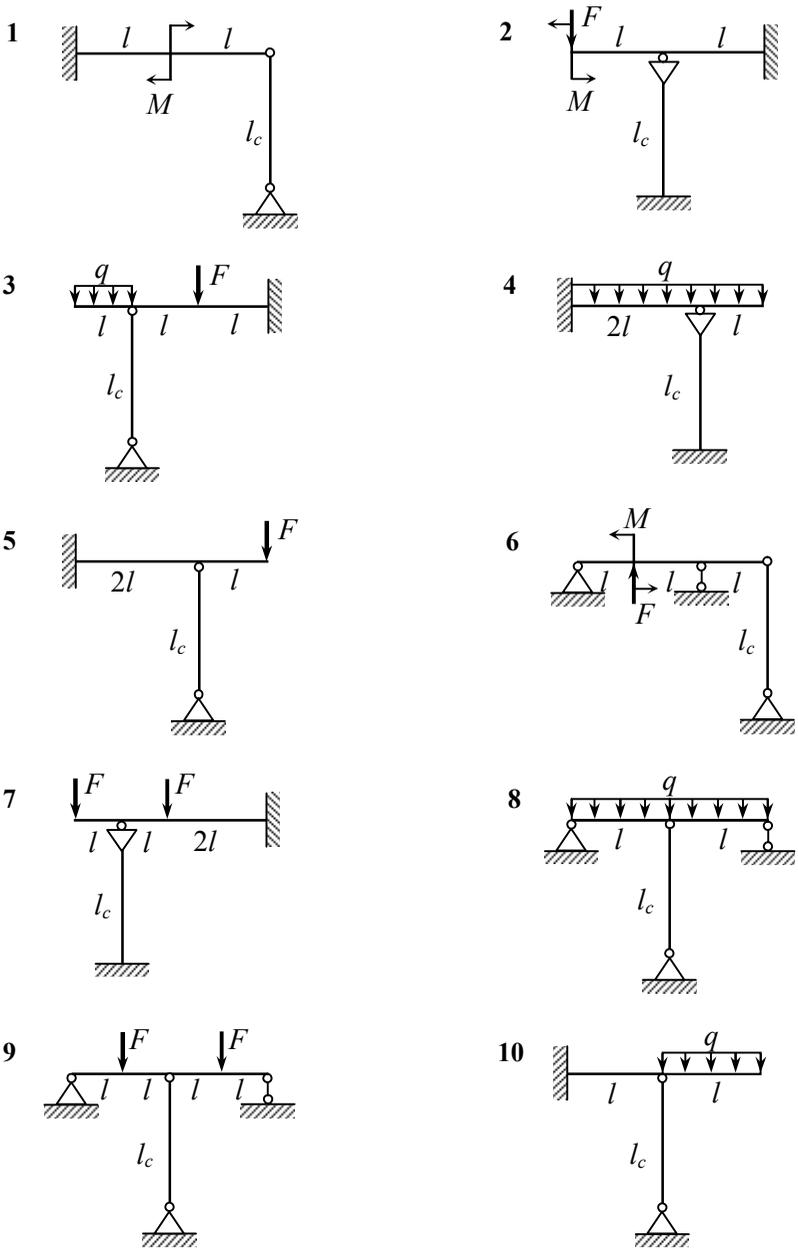


Рис. 1

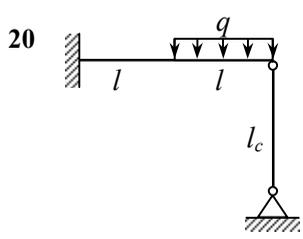
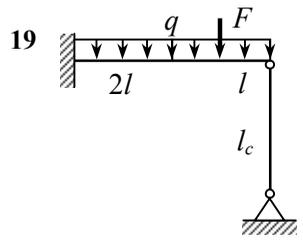
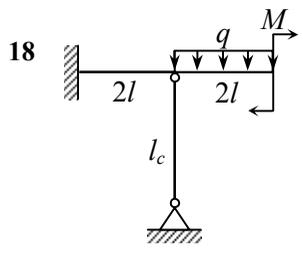
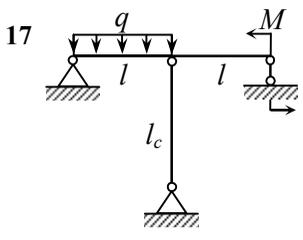
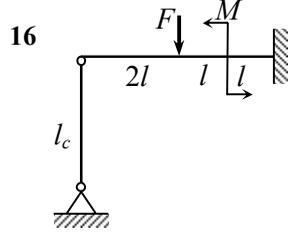
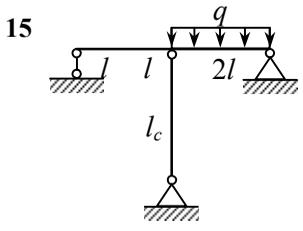
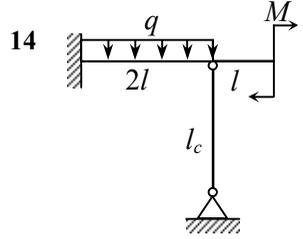
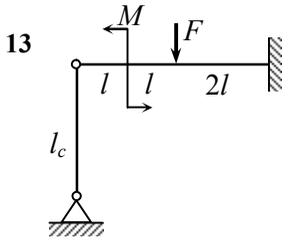
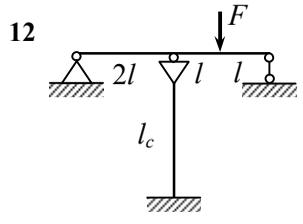
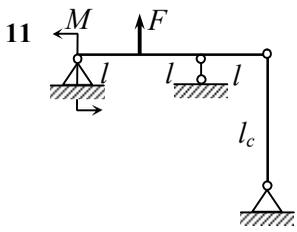


Рис. 1 (продолжение)

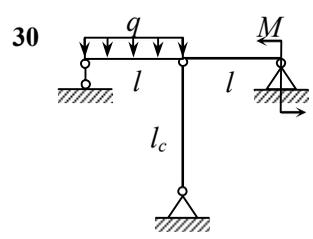
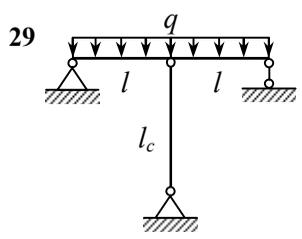
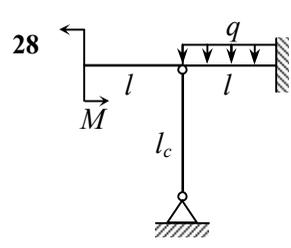
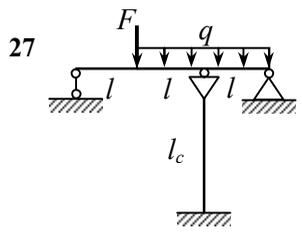
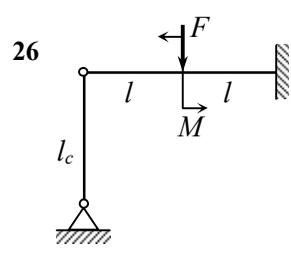
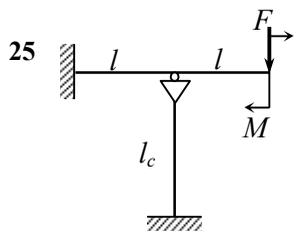
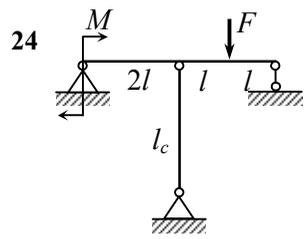
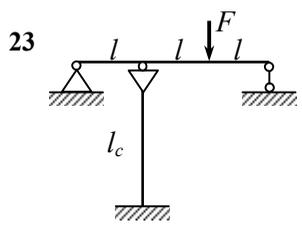
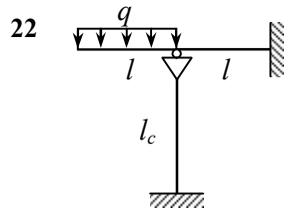
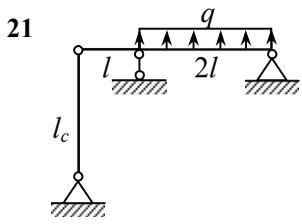


Рис. 1 (продолжение)

## 1. Метод сил.

Для расчета статически неопределимых систем часто используется **метод сил**, который заключается в том, что в стержневой системе «дополнительные» связи (внешние и внутренние) отбрасываются и заменяются неизвестными силами и моментами. Величины этих сил и моментов в дальнейшем подбираются так, чтобы перемещения стержневой системы соответствовали тем ограничениям, которые накладываются отброшенными связями. Неизвестными, при этом способе решения, являются силы и моменты, введенные вместо дополнительных связей. Отсюда и название – "метод сил".

Система, освобожденная от дополнительных связей, становится статически определимой, и ее называют **основной системой**. Система, в которой дополнительные связи заменены неизвестными силами и моментами, называется **эквивалентной системой**.

При освобождении от дополнительных связей, в тех сечениях, в которых становятся возможными линейные перемещения, вводятся сосредоточенные силы, а там, где стали возможны углы поворота, вводятся сосредоточенные моменты.

Вводимые неизвестные силы и моменты называются обобщенными силами и обозначаются  $X_i$ , где  $i$  – номер неизвестной силы. Количество обобщенных сил определяет **степень статической неопределимости системы**. Линейные перемещения или углы поворота сечений стержней в точках приложения сил  $X_i$  называют обобщенными перемещениями и обозначают  $\delta_i$ .

Для каждой статически неопределимой стержневой системы можно подобрать, как правило, несколько основных (эквивалентных) систем. Например, балка, показанная на рис. 2а, является дважды статически неопределимой. Здесь три связи являются «необходимыми», а оставшиеся две связи – «дополнительными». Отбрасывая две дополнительные связи в различных комбинациях, заменяя их неизвестными силами и моментами  $X_1$ ,  $X_2$ , можно получить различные эквивалентные системы (рис. 2,б – 2,г).

Следует помнить, что не всякая система с отброшенными связями может быть принята как основная (эквивалентная). Необходимо, чтобы оставшиеся связи обеспечивали кинематическую неизменяе-

мость системы. На рис. 2, в показана балка, которая не может быть использована в качестве эквивалентной системы, так как является кинематически изменяемым механизмом (может перемещаться в горизонтальном направлении).

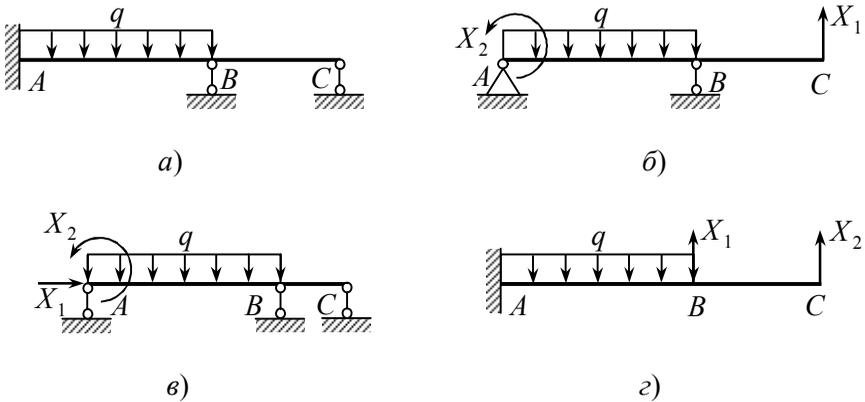


Рис. 2

зонтальном направлении).

Для определения неизвестных сил  $X_1$ ,  $X_2$  используется система канонических уравнений метода сил. Для дважды статически неопределимой системы эта система имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{2F} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\delta_{ik}$  – перемещение точки приложения силы  $X_i$  по направлению силы  $X_i$  от действия единичной силы  $\tilde{X}_k = 1$  ( $i=1,2; k=1,2$ );  $\delta_{iF}$  – перемещение точки приложения силы  $X_i$  по направлению силы  $X_i$  от действия внешних нагрузок;  $\delta_{ik} X_k$  – перемещение точки приложения силы  $X_i$  по направлению силы  $X_i$  от действия силы  $X_k$ .

Если система  $n$  раз статически неопределима, то система канонических уравнений будет содержать  $n$  уравнений относительно неизвестных сил  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ .

Геометрический смысл канонических уравнений заключается в том, что они являются условиями равенства нулю перемещений точек

приложения сил  $X_i$  в направлении сил  $X_i$ . Если в качестве эквивалентной выбрать систему, приведенную на рис. 2,б, то первое уравнение (1.1) определяет равенство нулю прогиба балки в точке  $C$ , второе уравнение – равенство нулю угла поворота балки в точке  $A$ . Эти условия должны выполняться, т.к. в заданной статической неопределимой системе (рис. 2,а) вертикальное перемещение точки  $C$  и поворот в точке  $A$  должны быть равны нулю.

Если в качестве эквивалентной выбрана система, приведенная на рис. 2,з, то уравнения (1.1) определяют условия равенства нулю вертикальных перемещений точек  $B$  и  $C$ .

Перемещения  $\delta_{ik}, \delta_{iF}$  ( $i=1,2; k=1,2$ ) определяются с помощью интегралов Мора:

$$\delta_{ik} = \int_{\ell} \frac{M_{xi} M_{xk}}{EI_x} ds + \int_{\ell} \frac{N_i N_k}{EA} ds, \quad \delta_{iF} = \int_{\ell} \frac{M_{xF} M_{xi}}{EI_x} ds + \int_{\ell} \frac{N_F N_i}{EA} ds, \quad (1.2)$$

где  $M_{xi}, N_i$  – изгибающий момент и продольная сила от действия единичной силы  $\tilde{X}_i = 1$ ;  $M_{xF}, N_F$  – изгибающий момент и продольная сила от действия внешних нагрузок;  $E$  – модуль упругости;  $I_x, A$  – момент инерции и площадь поперечного сечения стержня.

В большинстве случаев перемещения, вызванные изгибом, значительно превышают перемещения, обусловленные растяжением и сжатием стержня. Поэтому в выражениях (1.2) интегралами, содержащими продольные силы, можно пренебречь. Следовательно,

$$\delta_{ik} = \int_{\ell} \frac{M_{xi} M_{xk}}{EI_x} ds, \quad \delta_{iF} = \int_{\ell} \frac{M_{xF} M_{xi}}{EI_x} ds. \quad (1.3)$$

Очевидно, что  $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ .

При использовании метода сил используется следующий порядок решения задачи:

1. Определяется степень статической неопределимости системы.
2. Выбираются основная и эквивалентная системы.
3. Записывается система канонических уравнений метода сил.
4. Определяются изгибающие моменты от внешних и единичных сил.
5. Вычисляются коэффициенты канонических уравнений.

6. Решается система канонических уравнений и определяются введенные неизвестные силы  $X_i$ .

### 2. Расчет балки на прочность.

Для расчета балки на прочность строится эпюра изгибающего момента  $M_x$  и определяется опасное сечение, в котором изгибающий момент максимален:  $\max|M_x| = M_{\max}$ .

Используется условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad (2.1)$$

из которого находится момент сопротивления поперечного сечения балки  $W_x$ . По значению момента сопротивления  $W_x$  из таблицы сортамента подбирается номер двутавра.

### 3. Расчет сжатой стойки на устойчивость.

Для расчета сжатой стойки на устойчивость (рис.3) применяется метод расчета стержней на устойчивость по коэффициенту снижения допускаемых напряжений.

Как известно для сжатых стержней кроме условия прочности должно выполняться и условие устойчивости:

$$|\sigma| \leq [\sigma]_y, \quad (3.1)$$

где  $[\sigma]_y$  – допускаемое напряжение на устойчивость.

Величина  $[\sigma]_y$  определяется через используемое при расчетах на прочность допускаемое напряжение  $[\sigma]$  следующим образом:

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma]. \quad (3.2)$$

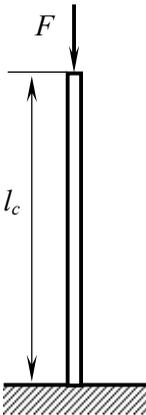


Рис. 3

Здесь  $\varphi$  – коэффициент снижения основного допускаемого напряжения (коэффициент продольного изгиба), зависящий от материала и гибкости  $\lambda$  стержня, коэффициент  $\varphi$  задается в таблицах (таблица 2).

Таблица 2

Гибкость $\lambda$	Коэффициент снижения допускаемых напряжений $\phi$			
	Ст.2, Ст.3	Сталь 45	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,35	-	0,25
120	0,45	0,30	-	0,22
130	0,40	0,26	-	0,18
140	0,36	0,23	-	0,16
150	0,32	0,21	-	0,14
160	0,29	0,19	-	0,12
170	0,26	0,17	-	0,11
180	0,23	0,15	-	0,10
190	0,21	0,14	-	0,09
200	0,19	0,13	-	0,08

Подставляя (3.2) в неравенство (3.1), условие устойчивости представляется в виде:

$$|\sigma| = \frac{F}{A} \leq \phi [\sigma], \quad (3.3)$$

где  $F$  – сжимающая сила,  $A$  – площадь поперечного сечения стойки,

При расчетах стержней на устойчивость могут возникнуть две задачи. Если заданы размеры стержня и требуется определить макси-

мально допускаемую сжимающую силу, то из формулы (3.3) следует:  
 $F_{\max} = A\varphi[\sigma]$ .

Если же требуется определить размеры поперечного сечения стержня, то задача усложняется. Коэффициент  $\varphi$ , входящий в правую часть неравенства (3.3), зависит от гибкости, которая в свою очередь зависит и от размеров поперечного сечения стержня. Поэтому в этом случае для решения задачи используется метод последовательных приближений. В первом приближении задается величина коэффициента  $\varphi = \varphi_1$  (рекомендуется принимать  $\varphi_1 = 0.5$ ). Из условия устойчивости (3.3) определяется площадь

$$A \geq \frac{F}{\varphi_1[\sigma]}, \quad (3.4)$$

затем вычисляются минимальный момент инерции поперечного сечения стержня  $I_{\min}$ , радиус инерции  $i_{\min}$  и гибкость стержня  $\lambda = \frac{\mu l_c}{i_{\min}}$ .

Здесь  $\mu$  – коэффициент приведенной длины,  $l_c$  – длина стержня. По полученному значению  $\lambda$  из таблицы 2 находят соответствующее значение  $\varphi = \varphi'_1$ .

Если разница между  $\varphi_1$  и  $\varphi'_1$  больше 5%, то следует повторить вычисление, задавшись новым значением

$$\varphi = \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2}.$$

Расчеты по указанной схеме повторяются до тех пор, пока различие между заданным значением  $\varphi$  и полученным из таблицы не будет превышать пяти процентов. Например, для  $k$ -го приближения должно выполняться неравенство

$$\Delta\varphi = \frac{|\varphi'_k - \varphi_k|}{\varphi_k} \cdot 100\% < 5\%.$$

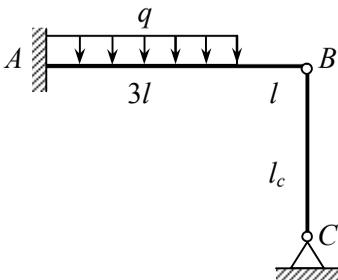


Рис. 4

**Пример 1.** Определить размеры поперечных сечений балки и стойки, соединенных между собой шарниром (рис.4), для следующих исходных данных:  $l_c = 1,2 \text{ м}$ ;  $l = 1 \text{ м}$ ;  $q = 30 \text{ кН/м}$ ;  $c = 0,9$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . При расчете балки полагать, что площадь поперечного сечения стойки  $A_c = \frac{20I_x}{l_c^2}$ .

Как следует из задания к расчетно-проектировочной работе, поперечные размеры балки следует находить из условия прочности, а размеры стойки – из условия устойчивости.

**Решение.** Данная стержневая система является один раз статически неопределимой, т.к. на систему наложены три связи в заделке  $A$  и одна связь в точке  $C$ . Разбиваем балочно-стержневую систему в точке  $B$  на две части (рис. 5). Действие частей друг на друга заменяем неизвестной силой  $X$ . Приведенная на рисунке 5,а система является эквивалентной системой.

**1. Определение силы  $X$ .** Каноническое уравнение метода сил получается из условия, что прогиб балки  $\delta_1$  в точке  $B$  равен величине уменьшения длины стойки  $\Delta l_c$ :  $\delta_1 = \Delta l_c$ . Учитывая, что  $\delta_1 = \delta_{11}X + \delta_{1F}$ , получим

$$\delta_{11}X + \delta_{1F} = \Delta l_c, \quad (4.1)$$

где  $\delta_{11}$  – прогиб балки в точке  $B$  от действия единичной силы  $\tilde{X} = 1$ ,  $\delta_{1F}$  – прогиб в точке  $B$  от действия внешних нагрузок,  $\Delta l_c$  – величина сжатия стойки. Указанные величины определяются с помощью интегралов Мора (1.3):

$$\delta_{11} = \int_{\ell} \frac{M_{x1} M_{x1}}{EI_x} ds, \quad \delta_{1F} = \int_{\ell} \frac{M_{xF} M_{x1}}{EI_x} ds. \quad (4.2)$$

Здесь  $M_{x1}$  – изгибающий момент от действия единичной силы  $\tilde{X} = 1$  (рис. 6,б),  $M_{xF}$  – изгибающий момент от действия внешних нагрузок (рис. 6,а). Выражения для этих моментов записываются по участкам.

Участок  $BD$ ,  $0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м}$ ,  $M_{xF} = 0$ ,  $M_{x1} = -\tilde{X}z_1 = -z_1$ .

$$\delta_{11}^{BD} = \int_B^D \frac{M_{x1} M_{x1}}{EI_x} ds = \frac{1}{EJ_x} \int_0^l z_1^2 dz_1 = \frac{l^3}{3EJ_x}.$$

$$\delta_{1F}^{BD} = \int_B^D \frac{M_{xF} M_{x1}}{EI_x} ds = 0.$$

Участок DA,  $0 \leq z_2 \leq 3M$ ,  $M_{xF} = q \frac{z_2^2}{2}$ ,  $M_{x1} = -\tilde{X}(l+z_2) = -(l+z_2)$ .

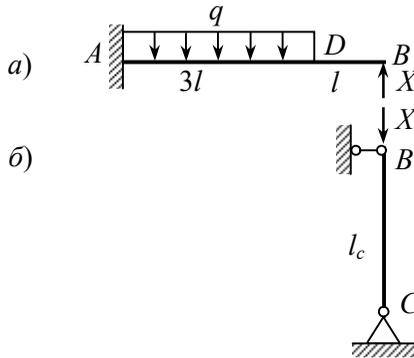


Рис. 5

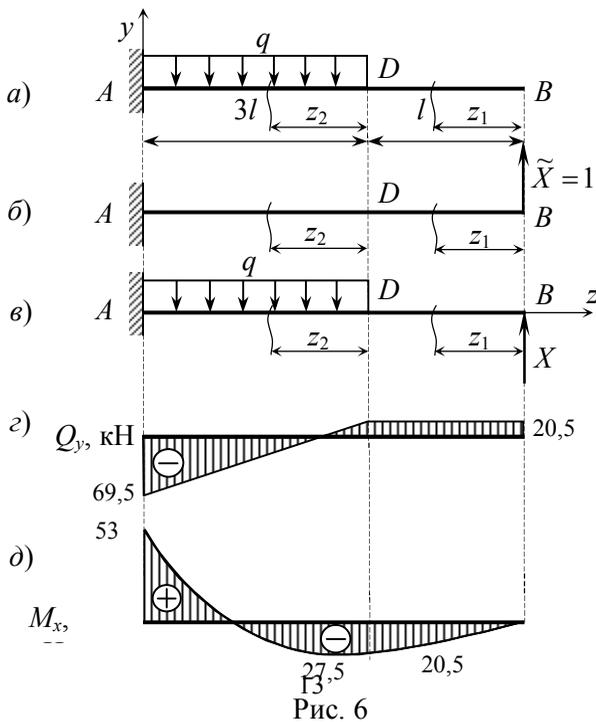


Рис. 6

$$\delta_{11}^{DA} = \frac{1}{EJ_x} \int_0^{3l} (l+z_2)^2 dz_2 = \frac{1}{EJ_x} \left[ \frac{(4l)^3}{3} - \frac{l^3}{3} \right] = \frac{63l^3}{3EJ_x}$$

$$\delta_{1F}^{DA} = \frac{1}{EI_x} \int_0^{3l} \left( q \frac{z_2^2}{2} \right) [- (l+z_2)] dz_2 = \frac{1}{EI_x} \left[ -\frac{ql}{2} \int_0^{3l} z_2^2 dz_2 - \frac{q}{2} \int_0^{3l} z_2^3 dz_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{EI_x} \left[ -\frac{ql}{2} \cdot \frac{(3l)^3}{3} - \frac{q}{2} \cdot \frac{(3l)^4}{4} \right] = -\frac{117ql^4}{8EI_x}.$$

Следовательно,

$$\delta_{11} = \delta_{11}^{BD} + \delta_{11}^{DA} = \frac{64l^3}{3EJ_x}, \quad \delta_{1F} = \delta_{1F}^{BD} + \delta_{1F}^{DA} = \frac{117ql^4}{8EJ_x}. \quad (4.3)$$

В поперечных сечениях стойки возникает продольная сила  $N = -X$  (рис. 5,б), следовательно

$$\Delta l_c = -\frac{X l_c}{E A_c}, \quad (4.4)$$

где  $A_c$  – площадь поперечного сечения стойки.

Подставляя формулы (4.3), (4.4) в (4.1), получим

$$\left( \frac{64l^3}{3EI_x} + \frac{l_c}{EA_c} \right) X = \frac{117ql^4}{8EI_x}. \quad (4.5)$$

Для расчета балки на прочность и стойки на устойчивость используется следующая схема:

1. Учитывая, что  $A_c = \frac{20I_x}{l_c^2}$ , из канонического уравнения (4.5)

находится величина неизвестной силы  $X$ .

2. Проводится расчет балки на прочность, определяется номер двутавра и соответствующий этому номеру момент инерции  $I_x$ .

3. С использованием найденного значения  $X$  проводится расчет стойки на устойчивость и вычисляется минимально допустимая площадь поперечного сечения стойки  $A_c^{\min}$ .

4. По формуле  $A_c = \frac{20I_x}{l_c^2}$  определяется площадь поперечного

сечения стойки и проверяется выполнение условия  $A_c \geq A_c^{\min}$ . Если это

условие выполняется, то определяются размеры поперечного сечения стойки. Если же  $A_c < A_c^{\min}$ , то делается заключение о необходимости увеличения размеров поперечного сечения стойки.

Выполним расчеты по описанной схеме для рассматриваемого примера.

**1. Определение силы X.** Подставляя выражение  $A_c = \frac{20I_x}{l_c^2}$  в

уравнение (4.5), получим:

$$\left( \frac{64l^3}{3EI_x} + \frac{l_c^3}{EI_x} \right) X = \frac{117ql^4}{8EI_x}.$$

Следовательно,

$$X = \frac{117ql^4}{8} \cdot \frac{3}{(64l^3 + 3l_c^3)} = \frac{20,5 \text{ (кН/м)} \text{ м}^4}{\text{м}^3} = 20,5 \text{ кН}.$$

**2. Расчет балки на прочность.** Для эквивалентной системы (рис. 6,в) определяются поперечная сила и изгибающий момент.

Участок BD,  $0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м}$

$$Q_y = X = 20,5 \text{ кН}, \quad M_x = -Xz_1.$$

$$z_1 = 0, \quad M_x = 0; \quad z_1 = 1 \text{ м}, \quad M_x = -20,5 \text{ кНм}.$$

Участок DA,  $0 \leq z_2 \leq 3 \text{ м}$

$$Q_y = X - qz_2, \quad M_x = -X(1 + z_2) + q \frac{z_2^2}{2}.$$

$$z_2 = 0, \quad Q_y = 20,5 \text{ кН}, \quad M_x = -20,5 \text{ кНм};$$

$$z_2 = 3 \text{ м}, \quad Q_y = -69,5 \text{ кН}, \quad M_x = 53 \text{ кНм}.$$

Так как, на этом участке поперечная сила  $Q_y$  в начале и в конце участка имеет разные знаки, определяется координата  $z_2^*$ , для которой на этом участке изгибающий момент  $M_x$  принимает экстремальное значение. Из условия  $Q_y = X - qz_2^* = 0$  находим  $z_2^* = \frac{X}{q} = 0,68 \text{ м}$ . Следовательно  $M_x(0,68) = 27,5 \text{ кНм}$ .

Эпюры  $Q_y$  и  $M_x$  представлены на рис. 6,з и 6,д.

В опасном сечении (в заделке)  $|M_x| = M_{\max} = 53 \text{ кНм}$ . Из условия прочности при изгибе (2.1) определяем момент сопротивления поперечного сечения балки

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{53 \text{ кНм}}{160 \text{ МПа}} = \frac{53 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{160 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 3,31 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 331 \text{ см}^3.$$

Из таблицы сортамента выбирается двутавр №25, у которого  $W_x = 317 \text{ см}^3$ ,  $I_x = 3800 \text{ см}^4$ .

**3. Расчет стойки на устойчивость.** Стойка *BC* (рис. 5,б) находится в состоянии сжатия и может потерять устойчивость. Для определения ее поперечных размеров проведем расчет на устойчивость методом последовательных приближений.

В первом приближении принимаем  $\varphi = \varphi_1 = 0,5$ . Из условия устойчивости (3.4) определяется площадь поперечного сечения стойки

$$A_c = \frac{X}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{20,5 \cdot 10^3 \text{ Н}}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 2,56 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,56 \text{ см}^2.$$

Учитывая, что площадь кольцевого сечения вычисляется по формуле  $A_c = \pi D^2 / 4 - \pi d^2 / 4 = \pi D^2 (1 - c^2) / 4$ , находим внешний радиус кольца

$$D = \sqrt{\frac{4A_c}{\pi(1-c^2)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,56 \text{ см}^2}{3,14(1-0,9^2)}} = 4,15 \text{ см}.$$

Гибкость стойки подсчитывается по формуле  $\lambda = \frac{\mu l_c}{i_{\min}}$ , где

$i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A_c}$  – минимальный момент инерции сечения. Для шарнирно закрепленной по концам стойки (рис. 5,б)  $\mu = 1$ . Момент инерции кольцевого сечения определяется по формуле  $I_{\min} = \frac{\pi D^4 (1 - c^4)}{64}$ .

Следовательно,

$$i_{\min} = \frac{D\sqrt{1+c^2}}{4} = \frac{4,15\sqrt{1+0,9^2} \text{ см}}{4} = 1,4 \text{ см}.$$

$$\text{Гибкость стойки } \lambda = \frac{\mu l_c}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 120 \text{ см}}{1,4 \text{ см}} = 86.$$

Из таблицы 2 для материала Сталь 3 по найденной величине  $\lambda$  определяем новое значение коэффициента  $\varphi = \varphi'_1$ . Для гибкости  $\lambda = 80$  коэффициент  $\varphi = 0,75$ , для гибкости  $\lambda = 90$  коэффициент  $\varphi = 0,69$ . Обозначим  $\lambda_1 = 80$ ,  $\lambda_2 = 90$ ,  $\varphi_1^T = 0,75$ ,  $\varphi_2^T = 0,69$ ,  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 10$ . Предполагая, что между этими значениями коэффициент  $\varphi$  меняется по линейному закону, для вычисленного значения гибкости стойки  $\lambda = \lambda^* = 86$  определяем  $\varphi'_1(\lambda^*)$ . Для этого используем формулу линейного интерполирования

$$\varphi'_1(\lambda^*) = \varphi_1^T + \frac{\varphi_2^T - \varphi_1^T}{\Delta\lambda} \cdot (\lambda^* - \lambda_1).$$

Следовательно,

$$\varphi'_1(86) = 0,75 + \frac{0,69 - 0,75}{10} \cdot (86 - 80) = 0,714.$$

Различие между значением  $\varphi_1$  и полученным  $\varphi'_1$  из таблицы  $\eta_\varphi = \frac{|\varphi'_1 - \varphi_1|}{\varphi_1} 100\% = 30\%$ .

Так как  $\Delta\varphi > 5\%$  проводим расчет во втором приближении.

Для коэффициента  $\varphi$  задаем новое значение:

$$\varphi = \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = 0,607. \text{ Повторяя расчеты, определяем } A_c = 2,11 \text{ см}^2,$$

$D = 3,76 \text{ см}$ ,  $i_{\min} = 1,26 \text{ см}$ ,  $\lambda = 95$ ,  $\varphi'_2 = 0,645$ . Вычисляя  $\Delta\varphi$ , получаем  $\Delta\varphi = 6,3\% > 5\%$ .

В третьем приближении  $\varphi_3 = 0,626$ ,  $A_c = 2,05 \text{ см}^2$ ,  $D = 3,7 \text{ см}$ ,  $i_{\min} = 1,24 \text{ см}$ ,  $\lambda = 97$ ,  $\varphi'_3 = 0,627$ ,  $\Delta\varphi = 0,16\% < 5\%$ . Следовательно, итерационный процесс по  $\varphi$  можно закончить и полагать  $\varphi = \varphi'_3 = 0,627$ , диаметр стойки  $D = 3,7 \text{ см}$ , минимально допустимая площадь поперечного сечения стойки  $A_c^{\min} = \pi D^2(1 - c^2)/4 = 2,05 \text{ см}^2$ .

Таким образом, для того чтобы стойка не потеряла устойчивость, площадь поперечного сечения стойки должна удовлетворять условию  $A_c \geq 2,05 \text{ см}^2$ .

**4. Определение размеров поперечного сечения стойки.** По условию задачи площадь поперечного сечения стойки  $A_c$  определяется по формуле

$$A_c = \frac{20 I_x}{l_c^2} = \frac{20 \cdot 3800}{120^2} = 5,28 \text{ см}^2.$$

Следовательно,  $A_c > A_c^{\min}$ , условие устойчивости стойки выполняется.

Внешний диаметр поперечного сечения стойки в виде кольца

$$D = \sqrt{\frac{4A_c}{\pi(1-c^2)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 5,28}{3,14(1-0,9^2)}} = 5,95 \text{ см}.$$

Таким образом, для балки выбирается двутавр №27, а внешний диаметр стойки  $D = 5,95 \text{ см}$ .

**Пример 2.** Определить размеры поперечных сечений балки и стойки для стержневой системы, показанной на рис. 7, для  $l = 1 \text{ м}$ ;  $l_c = 1,2 \text{ м}$ ;  $q = 30 \text{ кН/м}$ ;  $c = 0,9$ ;  $M = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . Площадь попе-

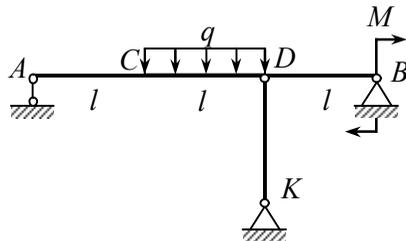


Рис. 7

речного сечения стойки  $A_c = \frac{20 I_x}{l_c^2}$ . Размеры поперечного сечения

балки в виде стандартного двутавра определить из условия прочности, размеры стойки – из условия устойчивости.

**Решение.** Данная система является один раз статически неопределимой, т. к. на нее наложено пять внешних связей и имеется шарнир в точке  $D$ , который устраняет одну связь. Получается, что на систему наложены четыре связи. Три связи являются необходимыми, одна –

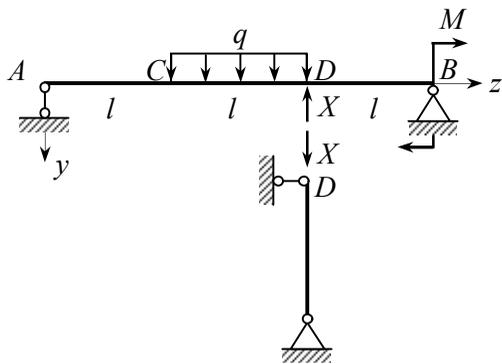


Рис. 8

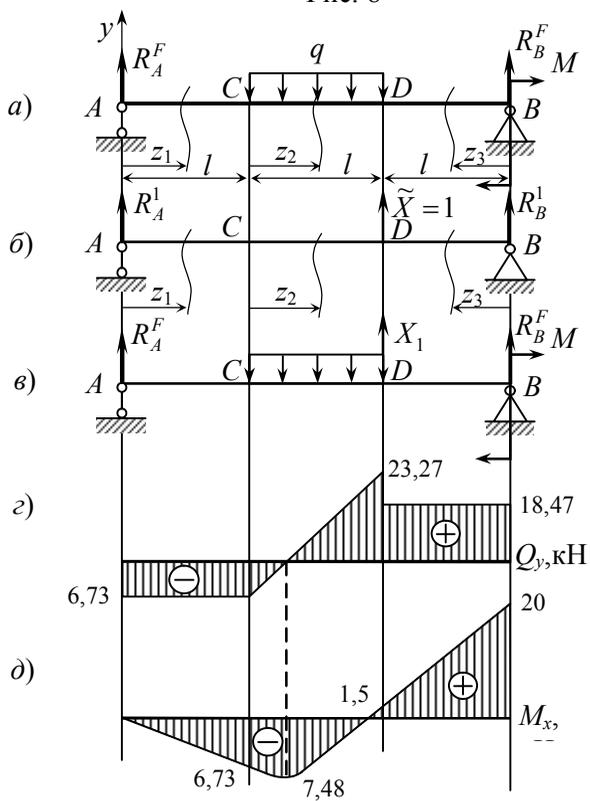


Рис. 9

дополнительной. Разбиваем балочно-стержневую систему на две части – балку и стойку (рис. 8). Действие этих частей друг на друга заменяем неизвестной силой  $X$ . Приведенная на рис. 8 система является эквивалентной.

**1. Определение силы  $X$ .** Каноническое уравнение метода сил получается из условия, что прогиб балки в точке  $D$  равен величине уменьшения длины стойки:

$$\delta_{11}X + \delta_{1F} = \Delta l_c,$$

где  $\delta_{11}$  – прогиб в точке  $D$  от единичной силы  $\tilde{X} = 1$ , приложенной вместо  $X$ ,  $\delta_{1F}$  – прогиб в точке  $D$  от действия внешних нагрузок,  $\Delta l_c$  – величина сжатия стойки.

Указанные величины определяются с помощью интегралов Мора:

$$\delta_{11} = \int_A^B \frac{M_{x1} M_{x1}}{EI_x} dl, \quad \delta_{1F} = \int_A^B \frac{M_{xF} M_{x1}}{EI_x} dl.$$

Здесь  $M_{xF}$  – изгибающий момент от действия внешних нагрузок (рис. 9,а),  $M_{x1}$  – изгибающий момент от действия единичной силы  $\tilde{X} = 1$  (рис.9,б).

Рассмотрим расчетную схему, представленную на рис. 9,а. Составим уравнения равновесия и найдем реакции опор:

$$\sum M_A = 0 \quad -1,5ql^2 + R_B^F \cdot 3l - M = 0;$$

$$R_B^F = \frac{1,5ql^2 + M}{3l} = 21,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0 \quad 1,5ql^2 - R_A^F \cdot 3l - M = 0;$$

$$R_A^F = \frac{1,5ql^2 - M}{3l} = 8,33 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность определения реакций. Используя уравнение  $\sum F_y = R_A^F - ql + R_B^F = 0$ , получим

$$8,33 - 30 + 21,67 \equiv 0.$$

Следовательно, реакции определены правильно.

Для расчетной схемы (рис. 9,б) составим уравнения равновесия и найдем реакции опор:

$$\sum M_A = 0 \quad R_B^1 \cdot 3l + \tilde{X} \cdot 2l = 0;$$

$$R_B^1 = -\frac{\tilde{X} \cdot 2l}{3l} = -0,67 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0 \quad -R_A^1 \cdot 3l - \tilde{X} l = 0;$$

$$R_A^1 = -\frac{\tilde{X} l}{3l} = -0,33 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность определения реакций. Из уравнения  $\sum F_y = R_A^1 + \tilde{X} + R_B^1 = 0$ , получим

$$-0,67 + 1 - 0,33 \equiv 0.$$

Следовательно, реакции определены правильно.

Запишем выражения для изгибающих моментов по участкам, для схем, показанных на рис. 9,а и 9,б.

Участок AC,  $0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м}$ .

$$\bar{M}_{x1} = -R_A^1 z_1 \quad M_{xF} = -R_A^F z_1.$$

Подставляя выражения для моментов в интегралы Мора, получим

$$\delta_{11}^{AC} = \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{x1}^2 dz_1 = \frac{1}{EI_x} \int_0^1 (-R_A^1 z_1)^2 dz_1 = \frac{1}{EI_x} \int_0^1 (0,33 \cdot z_1)^2 dz_1 = \frac{0,037}{EI_x},$$

$$\begin{aligned} \delta_{1F}^{AC} &= \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{xF} M_{x1} dz_1 = \frac{1}{EI_x} \int_0^1 (R_A^F z_1 \cdot R_A^1 z_1) dz_1 = \\ &= \frac{1}{EI_x} R_A^F R_A^1 \frac{z_1^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{EI_x} (-8,33) \cdot 0,33 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{0,92}{EI_x}. \end{aligned}$$

Участок CD,  $0 \leq z_2 \leq 1 \text{ м}$ .

$$M_{x1} = -R_A^1 (l + z_2) \quad M_{xF} = -R_A^F (l + z_2) + q \frac{z_2^2}{2}.$$

$$\begin{aligned} \delta_{11}^{CD} &= \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{x1}^2 dz_2 = \frac{1}{EI_x} \int_0^1 (R_A^1 (l + z_2))^2 dz_2 = \\ &= \frac{1}{EI_x} \int_0^1 R_A^{12} (l^2 + 2lz_2 + z_2^2) dz_2 = \frac{0,26}{EI_x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{1F}^{CD} &= \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{xF} M_{x1} dz_2 = \frac{1}{EI_x} \int_0^l (-R_A^F (l+z_2) + q \frac{z_2^2}{2}) (-R_A^1 (l+z_2)) dz_2 = \\
&= \frac{1}{EI_x} \int_0^l R_A^F R_A^1 (1+z_2)^2 dz_2 - \frac{1}{EI_x} \int_0^l R_A^1 (l+z_2) q \frac{z_2^2}{2} dz_2 = \\
&= \frac{1}{EI_x} \left( R_A^F R_A^1 \frac{(1+z_2)^3}{3} \Big|_0^l - R_A^1 \frac{q}{2} \cdot \frac{1}{3} - R_A^1 \frac{q}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) = \\
&= \frac{1}{EI_x} \left( R_A^F R_A^1 \cdot \frac{7}{3} - R_A^1 q \frac{1}{6} - R_A^1 q \frac{1}{8} \right) = -\frac{3,5}{EI_x}.
\end{aligned}$$

Участок DB,  $0 \leq z_3 \leq 1 \text{ м}$ .

$$\begin{aligned}
M_{x1} &= -R_B^1 z_3 & M_{xF} &= -R_B^F z_3 + M. \\
\delta_{11}^{DB} &= \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{x1}^2 dz_3 = \frac{1}{EI_x} \int_0^l (R_B^1 z_3)^2 dz_3 = \frac{1}{EI_x} \int_0^l (-0,67z_3)^2 dz_3 = \\
&= \frac{1}{EI_x} \int_0^l \frac{4}{9} z_3^2 dz_3 = \frac{0,148}{EI_x}, \\
\delta_{1F}^{DB} &= \frac{1}{EI_x} \int_0^l M_{xF} M_{x1} dz_3 = \frac{1}{EI_x} \int_0^l ((-R_B^F z_3 + M) \cdot (-R_B^1 z_3)) dz_3 = \\
&= \frac{1}{EI_x} \left( R_B^F R_B^1 \frac{1}{3} - MR_B^1 \frac{1}{2} \right) = \frac{1,89}{EI_x}.
\end{aligned}$$

Суммируя найденные величины коэффициентов по всем участкам, определяем искомые коэффициенты  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{1F}$ :

$$\begin{aligned}
\delta_{11} &= \delta_{11}^{AC} + \delta_{11}^{CD} + \delta_{11}^{DB} = \frac{0,037 + 0,26 + 0,148}{EI_x} = \frac{0,44}{EI_x}, \\
\delta_{1F} &= \delta_{1F}^{AC} + \delta_{1F}^{CD} + \delta_{1F}^{DB} = \frac{-0,92 - 3,5 + 1,89}{EI_x} = -\frac{2,5}{EI_x}.
\end{aligned}$$

Величина сжатия стойки определяется из закона Гука при растяжении-сжатии стержня:

$$\Delta l_c = -\frac{X l_c}{E A_c},$$

где

$$A_c = \frac{20I_x}{l_c^2}.$$

Подставляя полученные формулы в каноническое уравнение метода сил, получим

$$\frac{0,44}{EI_x} X - \frac{2,5}{EI_x} = -\frac{X l_c^3}{EI_x \cdot 20}.$$

Из этого равенства определяем значение силы  $X$

$$X = 4,8 \text{ кН}.$$

**2. Подбор сечения балки.** Для эквивалентной системы (рис. 9,б) найдем реакции опор, определим поперечную силу и изгибающий момент.

Составляя уравнения равновесия балки в виде суммы моментов относительно точек  $B$  и  $A$ , получим

$$R_A = R_A^F + X_1 R_A^1 = 6,73 \text{ кН}, \quad R_B = R_B^F + X_1 R_B^1 = 18,47 \text{ кН}.$$

Участок AC,  $0 \leq z_1 \leq 1 \text{ м}$ .

$$Q_y = -R_A = -6,73 \text{ кН};$$

$$M_x = -R_A z_1, \quad M_x(0) = 0, \quad M_x(1) = -6,73 \text{ кНм}.$$

Участок CD,  $0 \leq z_2 \leq 1 \text{ м}$ .

$$Q_y = -R_A + qz_2, \quad Q_y(0) = -6,73 \text{ кН}, \quad Q_y(1) = 23,27 \text{ кН};$$

$$M_x = -R_A(l + z_2) + q \frac{z_2^2}{2}, \quad M_x(0) = -6,73 \text{ кНм}, \quad M_x(1) = 1,5 \text{ кНм}.$$

Определяем координату  $z_2$ , для которой на этом участке момент максимален  $M_x(z_2^*)$ . Из условия  $Q_y = -R_A + qz_2^* = 0$ , находим

$$z_2^* = \frac{R_A}{q} = 0,224, \quad M_x(0,224) = -7,48 \text{ кНм}.$$

Участок DB,  $0 \leq z_3 \leq 1 \text{ м}$ .

$$Q_y = R_B = 18,47 \text{ кН};$$

$$M_x = -R_B z_3 + M, \quad M_x(0) = 20 \text{ кНм}, \quad M_x(1) = 1,5 \text{ кНм}.$$

Эпюры  $Q_y$ ,  $M_x$  представлены на рис. 9,з-9,д.

Как видно из графика  $M_x$ , в опасном сечении балки  $|M_x| = M_{\max} = 20 \text{ кНм}$ .

Из условия прочности балки при изгибе определяем момент сопротивления поперечного сечения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

следовательно

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{160 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 = 125 \text{ см}^3.$$

Из таблицы сортамента выбирается двутавр №18, у которого  $W_x = 143 \text{ см}^3$ ,  $I_x = 1290 \text{ см}^4$ .

**3. Подбор сечения стойки.** Стойка  $KD$  (рис. 7) сжимается и может потерять устойчивость. Для определения ее поперечных размеров произведем расчет на устойчивость методом последовательных приближений.

В первом приближении принимаем  $\varphi = \varphi_1 = 0,5$ . Из условия устойчивости определяем площадь поперечного сечения стойки

$$A_c = \frac{X}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{4,8 \cdot 10^3 \text{ Н}}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 0,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 0,6 \text{ см}^2$$

Площадь кольцевого сечения вычисляется по формуле  $A_c = \pi D^2(1 - c^2)/4$ , следовательно внешний диаметр кольца

$$D = \sqrt{\frac{4A_c}{\pi(1 - c^2)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 0,6 \text{ см}^2}{3,14(1 - 0,9^2)}} = 2 \text{ см}.$$

Учитывая, что  $\lambda = \frac{\mu l_c}{i_{\min}}$ ,  $i_{\min} = \sqrt{I_{\min} / A_c}$ ,  $\mu = 1$ ,  $I_{\min} = \frac{\pi D^4(1 - c^4)}{64}$ ,

получаем

$$i_{\min} = \frac{D\sqrt{1+c^2}}{4} = \frac{2\sqrt{1+0,9^2} \text{ см}}{4} = 0,67 \text{ см}, \quad \lambda = \frac{\mu l_c}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 120 \text{ см}}{0,67 \text{ см}} = 179,1.$$

По значению  $\lambda$  из таблицы 2 для коэффициентов  $\varphi$  найдем соответствующее значение  $\varphi_1$ . Учитывая, что

при  $\lambda = 170$   $\varphi = 0,26$ , при  $\lambda = 180$   $\varphi = 0,23$ ,  
 обозначим  $\lambda_1 = 170$   $\varphi_1^T = 0,26$ ,  $\lambda_2 = 180$   $\varphi_2^T = 0,23$ ,  
 $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = 10$ ,  $\lambda^* = 179,1$ .

Используя процедуру линейной интерполяции, получаем:

$$\varphi_1'(179,1) = \varphi_1^T + \frac{\varphi_2^T - \varphi_1^T}{\Delta\lambda} (\lambda^* - \lambda_1) = 0,26 + \frac{0,23 - 0,26}{10} \cdot 9,1 = 0,233,$$

$$\Delta\varphi = \frac{|\varphi_1' - \varphi_1|}{\varphi_1} 100\% = 53,4\%.$$

Различие между заданным значением и полученным из таблицы 2 больше 5%, поэтому проведем повторный расчет.

Во втором приближении для коэффициента  $\varphi$  задаем новое значение  $\varphi = \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = 0,366$ . Повторяя расчеты, определяем  $A_c = 0,82 \text{ см}^2$ ,  $D = 2,35 \text{ см}$ ,  $i_{\min} = 0,79 \text{ см}$ ,  $\lambda = 151,9$ ,  $\varphi_2' = 0,314$ ,  $\Delta\varphi = 14,2\% > 5\%$ .

В третьем приближении  $\varphi_3 = 0,34$ ,  $A_c = 0,88 \text{ см}^2$ ,  $D = 2,4 \text{ см}$ ,  $i_{\min} = 0,82 \text{ см}$ ,  $\lambda = 146,3$ ,  $\varphi_3' = 0,335$ ,  $\Delta\varphi = 1,47\% < 5\%$ . Следовательно, итерационный процесс по  $\varphi$  можно закончить.

Таким образом, условие устойчивости будет выполняться, если  $\varphi = \varphi_3' = 0,335$ , диаметр стойки  $D = 2,43 \text{ см}$ , минимальная площадь поперечного сечения  $A_c^{\min} = 0,88 \text{ см}^2$ .

**4. Определение размеров поперечного сечения стойки.** Из условия задачи площадь поперечного сечения стойки  $A_c$  определяется по формуле

$$A_c = \frac{20 I_x}{I_c^2} = \frac{20 \cdot 1290 \text{ см}^4}{(120 \text{ см})^2} = 1,8 \text{ см}^2.$$

Следовательно,  $A_c > A_c^{\min}$ , условие устойчивости стойки выполняется.

Внешний диаметр поперечного сечения стойки в виде кольца

$$D = \sqrt{\frac{4A_c}{\pi(1-c^2)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1,8 \text{ см}^2}{3,14(1-0,9^2)}} = 3,48 \text{ см}.$$

В результате расчетов получилось, что для балки следует использовать двутавр №18, внешний диаметр стойки  $D = 3,48 \text{ см}$ .

### **Библиографический список**

1. Горшков, А.Г. Соппротивление материалов: Учеб. пос. 2-е изд., испр. /А.Г.Горшков, В.Н.Трошин, В.И.Шалашилин – М.: Физ-матлит, 2008. – 544 с.
2. Серазугдинов М.Н., Хайруллин Ф.С. Расчет стержней на прочность, жесткость и устойчивость. Учебное пособие / Казан. гос. технол. ун-т. Казань, 2009. 140 с. ISBN 0-0000-0.