

Министерство образования Российской Федерации
Казанский государственный технологический университет

Оболочки и пластины

Методические указания
к курсовому и дипломному проектированию

2000



Составители:

проф. О.А.Перелыгин,
проф. С.И.Поникаров,
проф. В.А.Булкин,
ассист. С.А.Вилохин.

Оболочки и пластины.: Метод. указания/ Казан. гос. технол. ун-т;
Сост.: О.А.Перелыгин, С.И.Поникаров, В.А.Булкин, С.А.Вилохин. Казань,
2000. 48с.

Приведены теоретические основы и рекомендации по расчету
оболочек и пластин с учетом краевых моментов.

Предназначены для студентов, занимающихся по специальности
170500 "Машины и аппараты химических производств и предприятий
строительных материалов" и по другим механическим специальностям,
при выполнении курсовых и дипломных проектов.

Подготовлены на кафедре "Машины и аппараты химических
производств".

Печатаются по решению методической комиссии специальностей
механического профиля.

Рецензенты: доц. Д.И. Сагдеев,
доц. А.Д. Васенев.

1. Элементарные сведения по геометрии оболочек вращения

Основные элементы сосудов и аппаратов - корпуса, крышки и днища
- представляют собой оболочки вращения. Напомним, что под
оболочкой понимается тело, одно из измерений которого (толщина h)
меньше двух других, а под оболочкой вращения - такая оболочка, у
которой срединная поверхность, т.е. геометрическое место точек,
равноотстоящих от обеих поверхностей этой оболочки, образована
вращением какой-либо плоской кривой - образующей вокруг оси. Так,
сфера образована вращением полуокружности, конус - вращением
прямой и т.д.

Кривую, вращением которой образована срединная поверхность
оболочки, будем называть образующей, точки пересечения срединной
поверхности с осью - полюсами. Кривую, получающуюся при
пересечении срединной поверхности с плоскостью, проходящей через
ось вращения, будем называть меридианом. Очевидно, меридианы
совпадают с образующими. Плоскости, перпендикулярные к оси
оболочки, пересекают срединную поверхность по окружностям, которые
называются параллельными кругами или кольцевыми сечениями.
Радиус кривизны меридиана в какой-либо точке срединной поверхности

называется её первым главным радиусом кривизны R_1 в данной точке; радиус кривизны кривой, полученной от пересечения срединной поверхности с плоскостью, перпендикулярной к меридиану в данной точке, - вторым главным радиусом кривизны R_2 . Этот радиус равен отрезку нормали, заключенному между серединой поверхностью и осью оболочки.

Концы K_1 и K_2 радиусов кривизны (рис.1) называются центрами кривизны. Из аналитической геометрии следует, что второй центр кривизны K_2 поверхности вращения лежит на оси оболочки и оба радиуса - на одной прямой, перпендикулярной к срединной поверхности. Угол φ между нормалью к поверхности и осью вращения назовем широтой рассматриваемой точки. Линию, по которой срединная поверхность пересекает плоскость, нормальную к меридиану в данной точке, назовем линией нормального сечения.

Пусть r - радиус параллельного круга, тогда $r = R_2 \sin \varphi$, и длина элемента параллельного круга $ds_2 = r d\alpha = R_2 \sin \varphi d\alpha$,

где $d\alpha$ - угол между смежными меридиональными плоскостями.

Длина элемента меридиана $ds_1 = R_1 d\varphi$.

Площадь элемента срединной поверхности

$$dF = ds_1 \cdot ds_2 = R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha.$$

Будем полагать в дальнейшем, что нагрузка, действующая на оболочку вращения, равномерно распределена по её поверхности и обладает свойствами симметрии, т.е. остается постоянной в плоскостях, параллельных окружностям. Для таких оболочек задача расчета значительно упрощается, т.к. внутренние силы в них не будут изменяться вдоль параллельного круга.

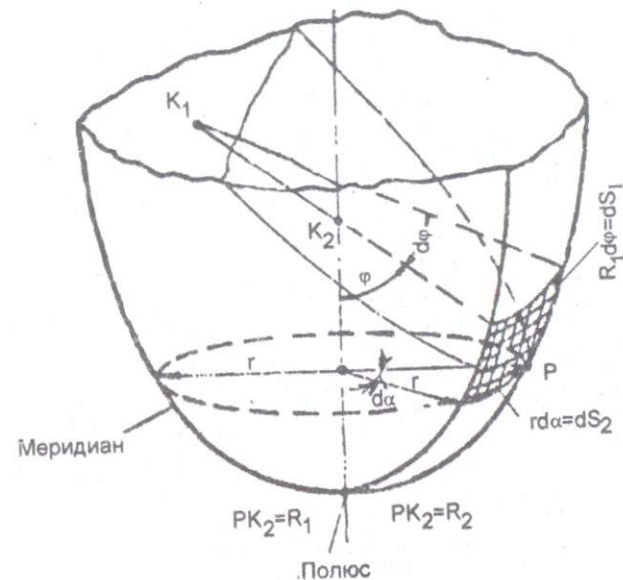


Рис. 1

Для решения вопроса о прочности оболочки вращения в условиях осесимметричного нагружения рассмотрим равновесие выделенного из неё элемента под действием внешних и внутренних силовых факторов, а для этого выясним, какие внутренние силовые факторы возникают в этих оболочках.

Рассмотрим цилиндрическую оболочку, заполненную жидкостью и закрытую снизу жестким днищем (рис.2).

Очевидно, что в результате нагружения образующая оболочки будет растянута, а это означает, что в оболочках, нагруженных осесимметрично, возникают растягивающие или сжимающие внутренние силы, направленные по касательной к меридиану.

Обратимся в этой оболочке к дуге АВ параллельного круга (рис.2а). Под действием внутреннего давления радиус R дуги увеличится и примет значение $R+\Delta R$, а дуга АВ после деформации станет равной $A'B'$. Растянем дугу АВ касательными к параллельному кругу силами T до длины до $AB''=A'B'$ (рис.2б). Теперь, если наложить AB'' на $A'B$, то очевидно, что эти дуги не совпадут. Чтобы достигнуть их совпадения, необходимо дугу $A'B''$ разогнуть, приложив к её концам моменты K (рис.2в). Отсюда следует, что в оболочках, нагруженных осесимметрично, кроме внутренних растягивающих сил T , возникают также изгибающие моменты K , лежащие в плоскости параллельных кругов.

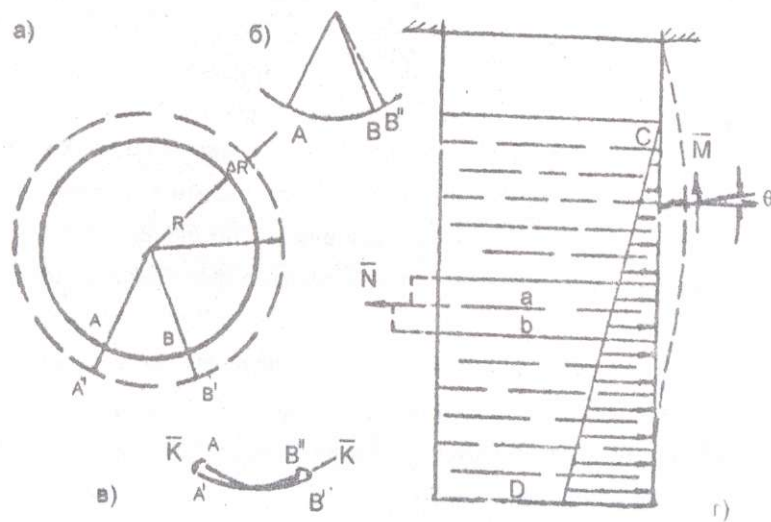


Рис. 2

Известно, что давление на стенки сосуда, заполненного жидкостью, распределится по прямой CD (рис.2г). Выделим в цилиндрической оболочке два смежных кольца а и б. Легко усмотреть, что соприкасающиеся сечения колец а и б стремятся скользнуть одно по другому, вследствие чего в оболочках, нагруженных осесимметрично, возникает перерезывающая сила N . Кроме того, под действием гидростатического давления срединная поверхность цилиндрической оболочки будет стремиться принять вид усеченного конуса. Однако вследствие жесткости днища, не допускающего расширения и поворота края цилиндра, стенка его выпучится и примет форму, показанную на рис.2г пунктиром, а в оболочке возникнут изгибающие моменты M , лежащие в плоскости меридиана.

Таким образом в нагруженных осесимметрично оболочках вращения, возникают пять внутренних силовых факторов: меридиональная сила - S , кольцевая сила - T , изгибающий кольцевой момент - K , изгибающий меридиональный момент - M и перерезывающая сила - N , направленная вдоль радиусов кривизны оболочки.

2. Уравнения равновесия элемента оболочки

Теория оболочек основана, главным образом, на двух упрощающих предположениях. Первое из них - предположение о неизменности нормали - предполагает, что прямые, нормальные к срединной поверхности оболочки до деформации, остаются прямыми и нормальными и после деформации. Этот постулат означает, что угловыми деформациями оболочек можно пренебречь по сравнению с угловыми перемещениями. Это приемлемо в той мере, в какой толщина оболочки меньше других её размеров.

Другое предположение состоит в том, что внутренними силами сжатия (или растяжения), действующими нормально к срединной поверхности оболочки (в направлении радиусов кривизны), также можно пренебречь. Справедливость этих предпосылок в дальнейшем мы обсудим более подробно.

Рассмотрим равновесие элемента оболочки вращения (рис.3), выделенного с помощью двух меридиональных сечений $abcd$ и $efgh$, разнесенных в плоскости параллельного круга на угол $d\alpha$, и двух сечений $bcfg$ и $adeh$, перпендикулярных к меридиану, разнесенных на угол $d\varphi$. Центр срединной поверхности выделенного элемента обозначим через P и разместим в нём систему прямоугольных координат x, y, z так, чтобы ось x была направлена по касательной к меридиану, в сторону возрастающих углов φ , ось y - по касательной к параллельному кругу в точке P , в сторону возрастающих углов α , ось z - по нормали к срединной поверхности, в сторону центров кривизны.

Учитывая симметричность нагрузки вокруг оси оболочки, можно заключить, что на грани $abcd$ и $efgh$ действуют одинаковые и обратно направленные нормальные силы T и моменты K , стремящиеся повернуть грань вокруг касательной к срединному меридиану этих граней. Моментов, лежащих в плоскости этих граней и стремящихся повернуть грани вокруг их центров, не существует, так как если бы такие моменты существовали, они имели бы обратные направления на обеих гранях и скручивали выделенный элемент, что по соображениям симметрии невозможно. По аналогичным соображениям на рассматриваемых гранях не может быть и поперечных сил.

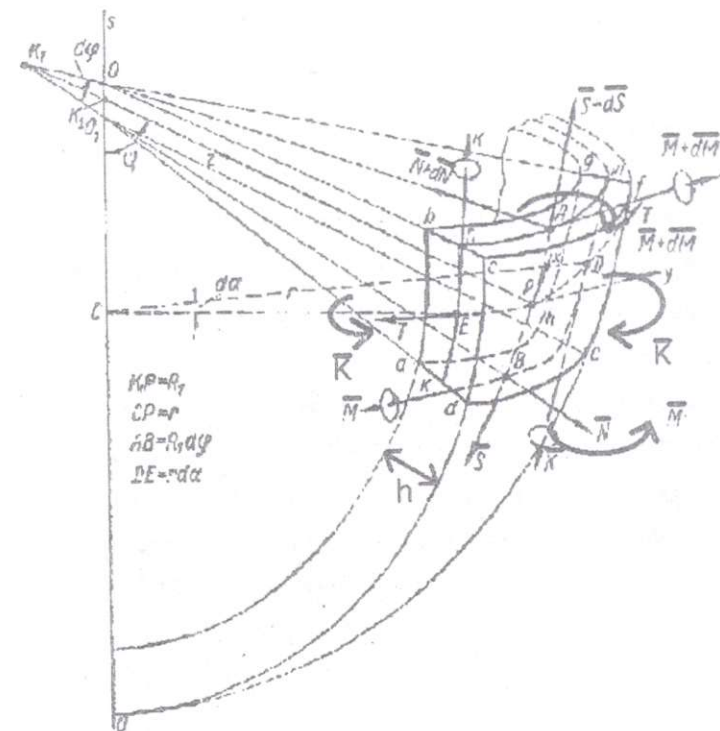


Рис.3

На гранях $adeh$ и $bcfg$ будут действовать меридиональные моменты M , стремящиеся повернуть эти грани вокруг касательных к параллельным кругам, проходящим через центры граней, нормальные силы S , направленные по меридиану, и перерезывающие силы N , направленные вдоль радиусов кривизны. В дальнейшем будем считать, что все перечисленные выше силовые факторы действуют равномерно по толщине стенки оболочки. Изобразим моменты K и M векторами на оси вращения, направление которых связано с направлением момента правилом правого винта.

Обозначим через $\bar{S}$ меридиональную силу, действующую на единицу длины параллельного круга срединной поверхности грани $adeh$, условимся считать эту силу положительной, если она является растягивающей, и отрицательной, если она будет сжимающей. Через $\bar{T}$ обозначим кольцевую силу, действующую на единицу длины меридиана на гранях $abcd$ и $efgh$. Для знака $\bar{T}$ примем то же условие, что и для $\bar{S}$. Очевидно, что $\bar{S}$ лежит в плоскости меридиана, а $\bar{T}$ - в плоскости параллельного круга.

Обозначим через $\bar{K}$ кольцевой изгибающий момент, действующий на единицу длины меридиана и стремящийся повернуть элемент вокруг меридиана, проходящего через точку P , а через $\bar{M}$ - меридиональный изгибающий момент, действующий на единицу длины параллельного круга и стремящийся повернуть элемент вокруг касательной к параллельному кругу в той же точке. Условимся считать $\bar{K}$ и $\bar{M}$ положительными, если они стремятся увеличить радиус кривизны оболочки.

Будем считать, что $\bar{N}$ - это перерезывающая сила, действующая на единицу длины параллельного круга и лежащая в плоскости сечений, нормальных к меридиану. Условимся силу $\bar{N}$ считать положительной, если она направлена в сторону центров кривизны. По соображениям, изложенным выше, сила $\bar{N}$ может действовать лишь на нижней и верхней грани элемента и будет направлена вдоль радиусов кривизны оболочки.

Будем считать, что внешние силы, действующие на оболочку, равномерно распределены по ее поверхности непрерывно, и обозначим через X , Y и Z составляющие равнодействующей внешних сил на

единицу площади поверхности в направлении осей x , y и z , соответственно.

Поскольку изменение радиуса кривизны меридиана и величины нагрузки по оси оболочки приводит к изменению силовых факторов S , N и M вдоль меридиана, перерезывающая, меридиональная силы и меридиональный изгибающий момент на верхней грани вырезанного элемента имеют приращения dS , dN и dT , соответственно. В плоскости параллельных кругов ни радиус последних, ни внешняя нагрузка не меняются, а потому кольцевая сила T и кольцевой изгибающий момент K приращений не имеют.

Теперь на грани оболочки (рис.4) действуют следующие силовые факторы:

на грани $abcd$ и $efgh$ - сила $|\bar{T}| = TR_1 d\varphi$ и момент $|KT| = KR_1 d\varphi$;

на грань $adeh$ - сила $|\bar{S}| = SR_2 d\alpha = SR_2 d\varphi$, сила $|\bar{N}| = Nr d\alpha = NR_2 \sin \varphi d\alpha$

и момент $|\bar{M}| = Mr d\alpha = MR_2 \sin \varphi d\alpha$; на грань $bcfg$ - сила

$$|S + dS| = SR_2 \sin \varphi d\alpha + d(SR_2 \sin \varphi d\alpha) = SR_2 \sin \varphi d\alpha + d(SR_2 \sin \varphi) d\alpha d\varphi / d\varphi = \\ = SR_2 \sin \varphi d\alpha + (SR_2 \sin \varphi)' d\alpha d\varphi$$

момент $|M + dM| = MR_2 \sin \varphi d\alpha + (MR_2 \sin \varphi)' d\alpha d\varphi$; и сила

$$|N + dN| = NR_2 \sin \varphi d\alpha + (NR_2 \sin \varphi)' d\alpha d\varphi$$

На площадку $klmn$ срединной поверхности оболочки вдоль оси x действует сила $Xr d\alpha R_1 d\varphi = X R_1 R_2 \sin \varphi d\alpha d\varphi$, а вдоль оси z :

$$Zr d\alpha R_1 d\varphi = Z R_1 R_2 \sin \varphi d\alpha d\varphi$$

Проведем через точку P меридиональную плоскость xOz , тогда силы S , $S+dS$, N , $N+dN$ будут лежать в этой плоскости. Спроектировав силы T

на радиус параллельного круга, будем иметь в этой плоскости силу $2T \sin \alpha / 2$.

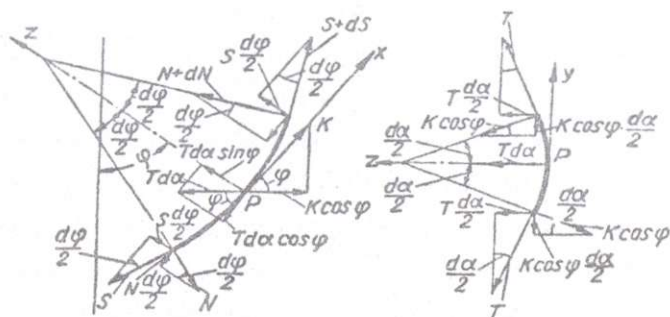


Рис.4 а) меридиональное сечение б) кольцевое сечение

Вследствие малости углов $d\alpha$ и $d\varphi$, можно принять, что $\sin d\alpha = d\alpha$, $\sin d\varphi = d\varphi$ и $\cos d\alpha = \cos d\varphi = 1$, тогда проекция сил T на радиус параллельного круга будет равна $Td\alpha$.

Напишем теперь уравнения равновесия выделенного элемента по оси x . Вдоль этой оси действуют следующие силы:

- 1) проекция на ось x равнодействующей сил S и $S+dS$:

$$[SR_2 d\varphi d\alpha + (SR_2 \sin \varphi)' d\varphi d\alpha] - SR_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha = (SR_2 \sin \varphi)' d\varphi d\alpha;$$

- 2) проекция на ось x сил N и $N+dN$, равная

$$-2NR_2 \sin \varphi d\alpha d\varphi / 2 - dNR_2 \sin \varphi d\alpha d\varphi = -NR_2 \sin \varphi d\alpha d\varphi - dNR_2 \sin \varphi d\alpha d\varphi,$$

однако слагаемым $dNR_2 \sin \varphi d\alpha d\varphi$ как имеющим более высокий порядок малости в уравнении равновесия можно будет пренебречь,

- 3) проекция на ось x от $Td\alpha$: $TR_1 d\varphi d\alpha$

- 4) проекция на ось x приложенных к элементу внешних сил

$$XdF = X R_1 R_2 \sin \varphi d\alpha d\varphi.$$

Для равновесия выделенного элемента вдоль оси x должно выполняться условие:

$$(SR_2 \sin \varphi)' d\varphi d\alpha - TR_1 d\varphi d\alpha \cos \varphi - NR_2 \sin \varphi d\alpha d\varphi + X R_1 R_2 \sin \varphi d\alpha d\varphi = 0. \quad (1)$$

Вдоль оси z действуют следующие силы:

- 1) проекция равнодействующей сил N и $N+dN$:

$$-NR_2 \sin \varphi d\alpha + [NR_2 \sin \varphi d\alpha + (NR_2 \sin \varphi)' d\alpha d\varphi] = (NR_2 \sin \varphi)' d\alpha d\varphi;$$

- 2) проекция от $Td\alpha$: $TR_1 \sin \varphi d\varphi d\alpha$;

- 3) сумма проекций сил S и $S+dS$: $2SR_2 \sin \varphi d\alpha / 2 = SR_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha$.

(В данном случае мы пренебрегаем слагаемым $dSR_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha$, как имеющим более высокий порядок малости в сравнении с другими членами уравнения равновесия)

- 4) равнодействующая приложенных к элементу внешних сил

$$ZdF = Z R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha.$$

Для равновесия вдоль оси z должно выполняться условие:

$$(NR_2 \sin \varphi)' d\varphi d\alpha + TR_1 \sin \varphi d\varphi d\alpha + SR_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha + Z R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi d\alpha = 0. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что проекции сил S , $S+dS$, N , $N+dN$ и $Td\alpha$ на ось y тождественно равны нулю, т.к. все эти силы лежат в плоскости xOz , а поэтому на ось y будем проектировать моменты. Проекций в этом случае будет три:

- 1) проекция равнодействующей моментов M и $M+dM$ равная

$$-MR_2 \sin \varphi d\alpha + [MR_2 \sin \varphi d\alpha + (MR_2 \sin \varphi)' d\varphi d\alpha] = (MR_2 \sin \varphi)' d\varphi d\alpha;$$

- 2) проекция момента пары сил N , $N+dN$ (рис.4а), для которой, пренебрегая малыми высшего порядка, можно записать:

$$-NR_2 \sin \varphi d\alpha \cdot R_1 d\varphi,$$

где $R_1 d\varphi$ - плечо пары сил N , $N+dN$. (Момент взят со знаком минус, так как стремится уменьшить радиус кривизны оболочки);

3) проекция равнодействующей моментов К, равная, как это видно из рис.4,

$$2KR_1 d\varphi \cos \varphi \frac{d\varphi}{2} = -KR_1 \cos \varphi d\varphi d\alpha.$$

Уравнение равновесия моментов относительно оси у будет иметь вид:

$$(MR_2 \sin \varphi)' d\varphi d\alpha - KR_1 \cos \varphi d\varphi d\alpha - NR_1 R_2 \sin \varphi d\varphi \cdot d\alpha = 0. \quad (3)$$

Сокращая уравнения (1) - (3) на $d\varphi d\alpha$, получим окончательно следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (SR_2 \sin \varphi)' - TR_1 \cos \varphi - NR_2 \sin \varphi + XR_1 R_2 \sin \varphi &= 0; \\ (NR_2 \sin \varphi)' + TR_1 \sin \varphi + SR_2 \sin \varphi + ZR_1 R_2 \sin \varphi &= 0; \\ (MR_2 \sin \varphi)' - KR_1 \cos \varphi - NR_1 R_2 \sin \varphi &= 0, \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где символом ()' мы обозначили производную по φ .

Напряжения, вызываемые силами и моментами $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{M}$, $\tilde{K}$ и $\tilde{N}$, определяются, как обычно.

Сила $\tilde{S}$ действует на прямоугольник, лежащий в плоскости меридионального сечения и имеющий основание равное единице, и высоту h . Поэтому

$$\sigma_S = \frac{S}{h}.$$

Аналогично напряжение, вызываемое силой $\tilde{T}$, равно

$$\sigma_T = \frac{T}{h},$$

и оно направлено по касательной к параллельному кругу в рассматриваемой точке (по кольцу).

Момент $\tilde{M}$ действует на такой же прямоугольник, что и момент от силы S , и вызываемое им напряжение будет равно

$$\sigma_M = \pm \frac{6M}{h^2}$$

и направлено, как σ_T .

Аналогично момент $\tilde{K}$ вызывает напряжение

$$\sigma_K = \pm \frac{6K}{h^2},$$

направленное, как σ_T .

Полные меридиональные σ_1 и кольцевые напряжения σ_2 в оболочке:

$$\sigma_1 = \frac{S}{h} \pm \frac{6M}{h^2}; \quad (5)$$

$$\sigma_2 = \frac{T}{h} \pm \frac{6K}{h^2}.$$

Кроме того, в оболочке возникает касательное напряжение:

$$\tau = \frac{N}{h} \quad (6)$$

Знаки плюс в уравнениях (5) относятся к внутренней, а знаки минус - к внешней поверхности оболочки, откуда следует, что напряжения в оболочках постоянны по её толщине только в том случае, когда изгибающие моменты оболочек отсутствуют.

3.Безмоментная теория расчета оболочек.

Система уравнений (4), состоящая из трех уравнений с пятью неизвестными S , T , N , K и M , допускает, очевидно, бесконечное число решений.

Для получения определенного решения необходимо либо дополнить эту систему уравнениями, например, учитывающими соотношения между упругими деформациями и напряжениями в оболочке, либо сократить число неизвестных в системе.

В зависимости от того, по какому пути мы пойдем, придем к моментной или безмоментной теории расчета оболочек.

Как показывает опыт, в случаях, когда оболочка не имеет защемлений и резких переходов, для ее расчета пользуются безмоментной теорией расчета, согласно которой влиянием моментов в тонкостенных оболочках можно пренебречь, т.е. можно допустить, что $M=K=0$

Из уравнения (1) в этом случае следует, что $N=0$, и система уравнений (4) превращается в систему

$$\left. \begin{aligned} (SR_2 \sin \varphi)' - TR_1 \cos \varphi + XR_1 R_2 \sin \varphi &= 0; \\ SR_2 + TR_1 + ZR_1 R_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Разделив второе уравнение в системе (7) на $R_1 R_2$ и перенеся Z вправо, получим уравнение, которое называется уравнением равновесия элемента (уравнение Лапласа):

$$\frac{S}{R_1} + \frac{T}{R_2} = -Z. \quad (8)$$

Умножив первое уравнение в системе (7) на $\sin \varphi$, второе - на произведение $\sin \varphi \cos \varphi$ и складывая эти уравнения, получим:

$$(SR_2 \sin^2 \varphi)' + R_1 R_2 (X \sin \varphi + Z \cos \varphi) \sin \varphi = 0,$$

откуда

$$SR_2 \sin^2 \varphi + \int_{\varphi_0}^{\varphi} R_1 R_2 (X \sin \varphi + Z \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi = C, \quad (9)$$

где C - постоянная, учитывающая нагрузку свободного края оболочки.

Чтобы пояснить это, рассмотрим условия равновесия зоны оболочки между параллельными кругами, характеризуемыми углами φ_0 и φ_1 (рис.5).

На элементарное кольцо с площадью $dF = 2\pi r R_1 d\varphi = 2\pi R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi$ действуют силы $X dF$ и $Z dF$, составляющие которых вдоль оси равны $X dF \sin \varphi$ и $Z dF \cos \varphi$.

Проекция на ось оболочки внешних сил, действующих на всю зону, будет

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} (X \sin \varphi + Z \cos \varphi) dF = 2\pi \int_{\varphi_0}^{\varphi} (X \sin \varphi + Z \cos \varphi) R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi$$

Кроме того, вдоль той же оси действуют составляющие краевых сил S_1 и S_0 :

$$2\pi r_1 S_1 \sin \varphi_1 - 2\pi r_0 S_0 \sin \varphi_0$$

Для обеспечения равновесия должно выполняться равенство

$$2(r_1 S_1 \sin \varphi_1 - r_0 S_0 \sin \varphi_0) = 2 \int_0^1 (X \sin \varphi + Z \cos \varphi) R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi$$

откуда, подставляя $r = R_2 \sin \varphi$ и полагая в (9) $\varphi = \varphi_0$ с учетом $R_2 \sin \varphi_0 = r_0$ (рис.1), получим $r_0 S_0 \sin \varphi_0 = C$. Тогда отбрасываем индексы:

$$SR_2 \sin^2 \varphi = - \int_{\varphi_0}^{\varphi} (X \sin \varphi + Z \cos \varphi) R_1 R_2 \sin \varphi d\varphi$$

Уравнение (9) выражает условие равновесия зоны оболочки в направлении ее оси. Это условие называется уравнением равновесия зоны.

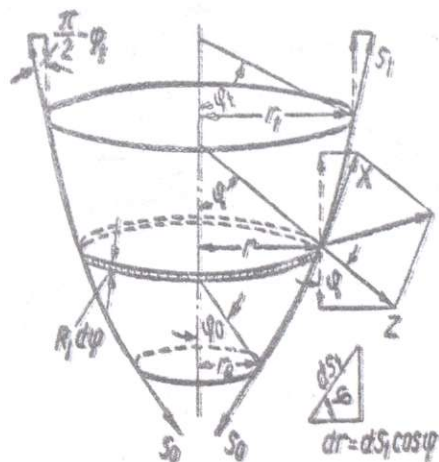


Рис.5

Что касается постоянной C , входящей в уравнение зоны, то она, очевидно, равна $Q/2\pi$. Здесь Q - нагрузка, действующая на нижний конец оболочки. Если же оболочка внизу имеет полюс, т.е. пересекает ось вращения, то $r_0=0$ и $C=0$.

Уравнение равновесия элемента оболочки и уравнение равновесия зоны являются основными в безмоментной теории оболочек.

Для удобства использования уравнения зоны в задачах расчета напряжений в нагруженных осесимметрично оболочках его записывают через радиус параллельного круга r . Из треугольника MNL (рис.6) следует

$$dr = MN \cos \varphi = R_1 d\varphi \cos \varphi.$$

И, как известно, $r = R_2 \sin \varphi$. Подставляя эти выражения в (9), будем иметь:

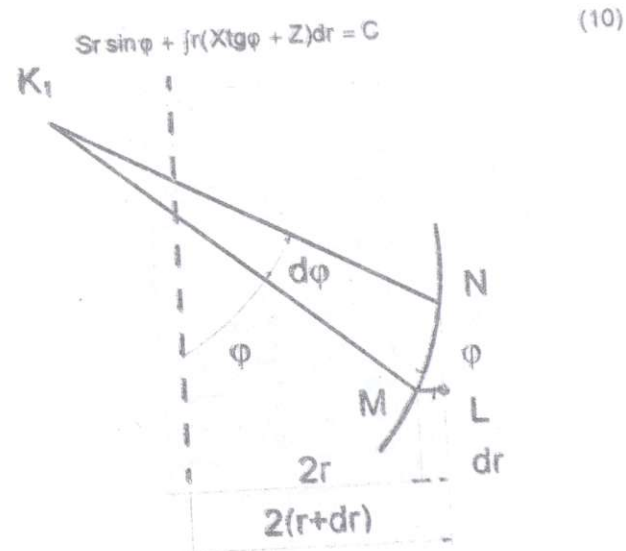


Рис.6

Рассмотрим оболочки вращения, нагруженные внутренним давлением.

Для цилиндрической оболочки, нагруженной внутренним давлением (рис.7), можно записать: $R_1 = \infty$, $R_2 = R = r = \text{const}$, $\varphi = \pi/2$, $X=0$, $Z=-p$, $C = p\pi R^2/2\pi = pR^2/2$.

Тогда уравнение Лапласа при $\varphi = \pi/2$ и $r=R$ принимает вид: $T = pR$, а уравнение зоны

$$Sr \sin \varphi - p \int r dr = pR^2/2, \quad S r \sin \varphi = pR^2/2, \quad S = pR/2. \quad (11)$$

Следовательно:

$$\sigma_s = pR/2h, \quad \sigma_t = pR/h. \quad (12)$$

Рассмотрим коническую оболочку под действием внутреннего давления. В этом случае (рис.8): $R_1 = \infty$, $R_2 \sin \varphi = r$, $\varphi = \pi - \alpha$, $X=0$, $Z=-p$, $C=0$.

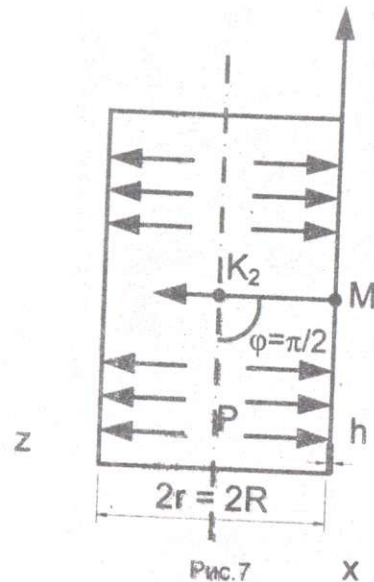


Рис.7

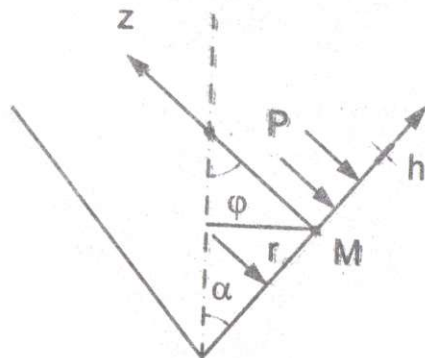


Рис.8

Тогда из уравнения Лапласа следует: $T = pr / \sin \varphi = pr / \cos \alpha$,
а из уравнения зоны: $Sr \sin \varphi = pr^2 / 2$, $S = pr / 2 \cos \alpha$. (13)

Следовательно: $\sigma_s = pr / (2h \cos \alpha)$; $\sigma_t = pr / (h \cos \alpha)$. (14)

Рассматривая сферическую оболочку под действием внутреннего давления (рис.9), имеем: $R_1 = R_2 = R$, $X = 0$, $Z = -p$, $C = 0$.

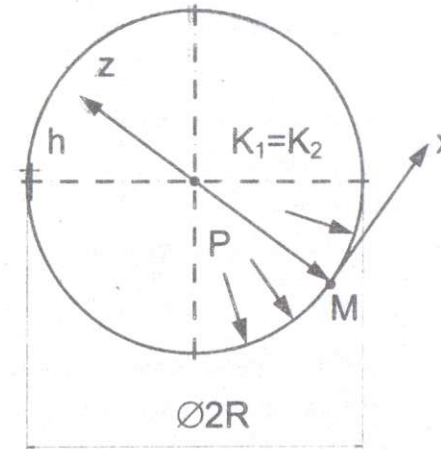


Рис.9

Из уравнения зоны следует: $Sr \sin \varphi = pr^2 / 2$; $S = pR / 2$. (15)

Подставляя это значение S в уравнение Лапласа имеем: $T = pR / 2$.

Следовательно:

$$\sigma_s = pR / 2h ; \quad \sigma_t = pR / 2h . \quad (16)$$

4. Моментная теория расчета оболочек.

Рассмотрим тонкостенный цилиндр радиуса R и постоянной толщины h, который находится под действием некоторой осесимметричной нагрузки (рис.10). Обратимся к уравнениям равновесия элемента оболочки с размерами h, $dx = R_1 d\varphi$, $dy = R_2 \sin \varphi d\alpha$ (здесь $\sin \varphi = 1$, т.к. $\varphi = \pi/2$) и приложим к его граням равнодействующие силы и моменты, величины которых равны S, T, M, и K, умноженным

соответственно на $dy = R_2 \sin \varphi d\alpha$ и $dx = R_1 \sin \varphi$. Кроме четырех перечисленных силовых факторов, прикладываем также поперечную силу $NR_2 \sin \varphi d\alpha$. Внешние силы характеризуются постоянным давлением, т.е. $p = \text{const}$. Поскольку ни внешняя нагрузка, ни радиусы кривизны оболочки не меняются вдоль её оси, $dNR_2 \sin \varphi d\alpha = 0$, т.е. $ds = \text{const}$.

Это значит, что осевая сила определяется условиями нагружения цилиндра на торцах. В дальнейшем будем считать эти условия заданными и силу S - известной.

Уравнение равновесия на ось z принимает вид:

$$-TR_1 d\varphi - dNR + pR_1 d\varphi R = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dN}{dx} = p - \frac{T}{R} \quad (17)$$

Наконец, третье уравнение равновесия получаем, приравнявая к нулю сумму моментов всех сил относительно оси y :

$$NR_2 \sin \varphi dx = dMR_2 \sin \varphi, \quad \text{откуда} \quad N = \frac{dM}{dx} \quad (18)$$

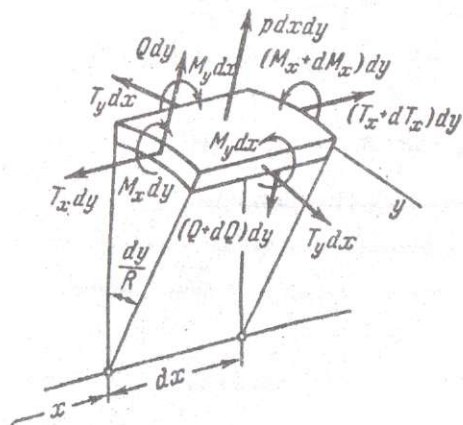


Рис.10

Деформации и напряжения, возникающие в оболочке, также обладают, очевидно, осевой симметрией, и деформированный цилиндр представляет собой некоторое тело вращения. Форма этого тела вполне определяется формой изогнутой образующей цилиндра.

Обозначим через ω радиальное перемещение, а через ϑ - угол наклона касательной к образующей срединной поверхности цилиндра (рис.11).

При этом

$$\frac{d\omega}{dx} = \vartheta. \quad (19)$$

Перемещение ω будем отсчитывать наружу - от оси цилиндра.

Относительное удлинение ϵ_x отрезка АВ (рис.12), расположенного на расстоянии z от срединной поверхности, складывается из двух составляющих: из удлинения ϵ_0 срединной поверхности и удлинения, обусловленного искривлением образующей цилиндра.

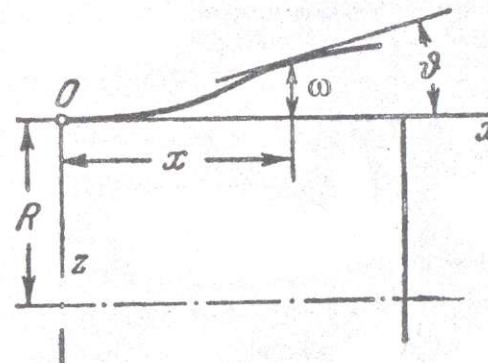


Рис.11

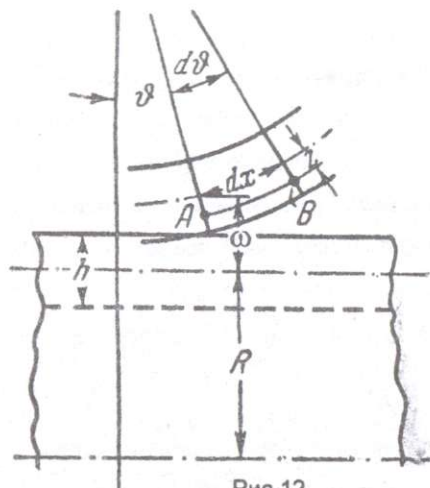


Рис.12

Последнее слагаемое имеет вид $z \frac{d\theta}{dx}$. Полное

удлинение слоя AB будет

$$\epsilon_x = \epsilon_0 + z \frac{d\theta}{dx} \quad (20)$$

Удлинение в окружном направлении;

$$\epsilon_y = \frac{\omega}{R} \quad (21)$$

Этим удлинениям соответствуют напряжения σ_s и σ_t ,

определяемые по закону Гука:

$$\sigma_s = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_x + \mu \epsilon_y); \quad \sigma_t = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_y + \mu \epsilon_x),$$

где μ - коэффициент Пуассона; или же согласно выражениям (20) и (21)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\epsilon_0 + \mu \frac{\omega}{R} + z \frac{d\theta}{dx} \right] \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\epsilon_0 + \frac{\omega}{R} + \mu z \frac{d\theta}{dx} \right] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

В сечениях цилиндра (как осевых, так и поперечных) возникают изгибающие моменты и нормальные силы. Они определяются через напряжения σ_s и σ_t (рис.13). Рассмотрим элемент цилиндрической оболочки с размерами $dx dy$. Нормальные силы в площадках $h dy$ и $h dx$, отнесенные к единице длины сечения элемента, будут иметь вид:

$$S = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_s dz,$$

$$T = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_t dz.$$

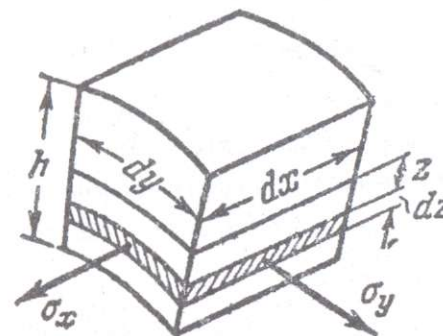


Рис.13

Определим в этих же сечениях изгибающие моменты:

$$M = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_s z dz; \quad K = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y z dz.$$

Учитывая выражения (19) и (22), определяем силы S и T и моменты M и K в зависимости от перемещения ω :

$$S = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\epsilon_0 + \mu \frac{\omega}{R} \right); \quad T = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\frac{\omega}{R} + \mu \epsilon_0 \right) \quad (23)$$

$$M = D \frac{d^2 \omega}{dx^2}; \quad K = \mu D \frac{d^2 \omega}{dx^2},$$

$$\text{где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (24)$$

Теперь преобразуем полученные уравнения. Из уравнений (23) исключаем ϵ_0 , а из (17) и (18) - поперечную силу N. Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{Eh}{R} \omega + \mu S \\ \frac{d^2 M}{dx^2} &= p - \frac{T}{R} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Исключая из этих уравнений T , имеем:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = p - \frac{Eh}{R^2} \omega - \frac{\mu}{R} S.$$

Наконец, если воспользоваться (24) и исключить изгибающий момент M , получим уравнение относительно одного неизвестного - перемещения ω :

$$\frac{d^4 \omega}{dx^4} + 4k^4 \omega = \frac{p}{D} - \frac{\mu S}{RD}, \quad (26)$$

$$\text{где } 4k^4 = \frac{Eh}{R^2 D} = \frac{12(1-\mu^2)}{R^2 h^2}. \quad (27)$$

Здесь $K = \frac{1,28}{\sqrt{R \cdot h}}$ - характеристический коэффициент.

Решение уравнения (26) имеет вид

$$\omega = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + \omega_0. \quad (28)$$

В этом уравнении C_1, C_2, C_3, C_4 - постоянные интегрирования; ω_0 - частное решение уравнения (26) при $p = \text{const}$:

$$\omega_0 = \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

Постоянные интегрирования определяются из граничных условий на концах оболочки. Например, в случае если длина оболочки $l > 5\sqrt{Rh}$, то, как показывают исследования, прогибы и напряжения у одного края мало влияют на прогибы и напряжения у другого края. Поэтому для

такой оболочки следует принять $C_3 = C_4 = 0$, так как иначе при увеличении x прогиб будет возрастать неограниченно.

В результате уравнение (28) будет иметь вид

$$\omega = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + \omega_0. \quad (29)$$

Зная уравнение для прогиба, можно определить действующие в оболочке усилия и моменты из следующих соотношений:

$$M = -D \frac{d^2 \omega}{dx^2}; \quad K = \mu M; \quad N = -D \frac{d^3 \omega}{dx^3}; \quad T = \mu S + \frac{Eh}{R} \omega.$$

В качестве примера рассмотрим полубесконечную цилиндрическую оболочку ($l > 5\sqrt{Rh}$), нагруженную внутренним давлением. Возникающие в месте защемления изгибающий момент и поперечную силу обозначим M_0 и Q_0 (рис. 14).

Для этой оболочки при $x=0$ прогиб ω и угол поворота $\frac{d\omega}{dx}$ равны нулю.

Кроме того, при $x = 0$:

$$\frac{d^2 \omega}{dx^2} = -\frac{M_0}{D}; \quad \frac{d^3 \omega}{dx^3} = -\frac{Q_0}{D}.$$

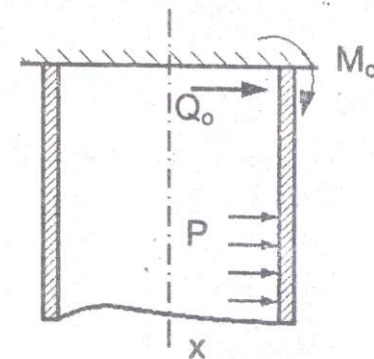


Рис. 14

Используя уравнение (29), получим

$$C_1 = -\frac{M_0}{2DK^2}; \quad C_2 = -\frac{M_0}{2DK^2} + \frac{Q_0}{2DK^2}.$$

Краевые нагрузки связаны с давлением следующими зависимостями:

$$M_0 = \frac{p}{2k^2} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right), \quad Q_0 = -\frac{p}{2k^2} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right),$$

или, если подставить значение k из (27), получим

$$M_0 = \frac{p \cdot Rh \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}}; \quad Q_0 = -\frac{p \cdot \sqrt{Rh} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{4\sqrt{3(1-\mu^2)}}. \quad (30)$$

Тогда уравнение (29) можно записать в виде

$$\omega = \frac{M_0}{2Dk^2} e^{-kx} (\cos kx - \sin kx) + \frac{Q_0}{Dk^3} e^{-kx} \cos kx + \omega_0. \quad (31)$$

Изгибающие моменты и усилия соответственно равны:

$$M = M_0 e^{-kx} (\cos kx + \sin kx) + \frac{Q_0}{k} e^{-kx} \sin kx \quad K = \mu M; \quad (32)$$

$$N = -2M_0 k e^{-kx} \sin kx + Q_0 e^{-kx} (\cos kx - \sin kx);$$

$$T = 2Rk^2 \left[M_0 e^{-kx} (\cos kx - \sin kx) + \frac{Q_0}{k} e^{-kx} \sin kx \right] + pR, \quad S = \frac{pR}{2}.$$

Нетрудно убедиться из анализа уравнений (32), что наибольшие изгибающие моменты и напряжения возникают в месте заделки оболочки ($x=0$).

$$M = \frac{pRh}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}}; \quad K = \frac{\mu pRh}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}}; \quad \sigma_s = 2.04 \frac{pR}{h}; \quad \sigma_t = 0.61 \frac{pR}{h}; \quad (33)$$

На рис.15 представлены эпюры меридиональных моментов и радиальных перемещений жесткозащемленной оболочки, нагруженной

внутренним давлением. Нетрудно видеть, что зависимость $M=M(x)$ представляет собою периодическую, быстро затухающую функцию. Очевидно, что аналогично изменяется по длине оболочки и кольцевой момент.

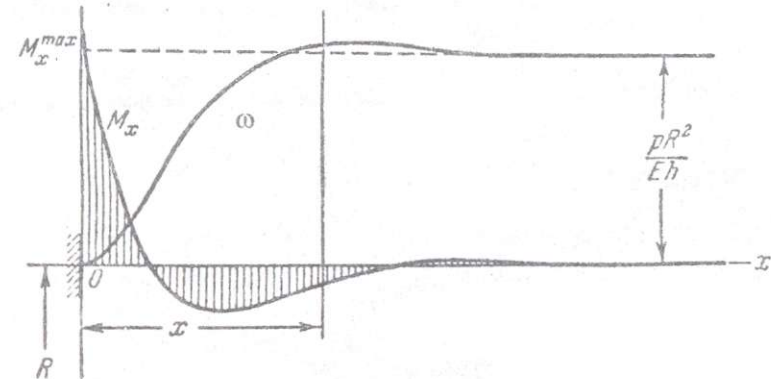


Рис.15

Итак, первый важный вывод, который вытекает из моментной теории оболочек, состоит в том, что изгибающие кольцевой и меридиональный моменты в нагруженной осесимметрично цилиндрической оболочке затухают очень быстро, и уже на расстоянии $l = 2.7\sqrt{Rh}$ величиной их можно пренебречь. Примерно такова же область действия изгибающих моментов в других видах оболочек.

Другой вывод, который будет нами использован ниже, заключается в том, что моментная теория оболочек позволяет рассчитать прогибы и углы поворота на концах оболочки, нагруженных единичным изгибающим моментом $M_0=1$ и единичной перерезывающей силой $Q_0=1$.

Обозначим:

δ_{MM} - угол поворота края оболочки от действия на краю момента $M_0=1$;

δ_{MQ} - угол поворота края оболочки от действия на краю поперечной силы $Q_0=1$;

δ_{QQ} - прогиб края оболочки от действия на краю поперечной силы $Q_0=1$;

δ_{QM} - прогиб края оболочки от действия на краю оболочки момента $M_0=1$.

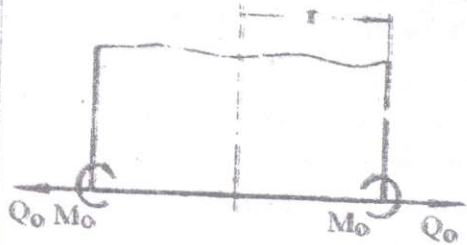
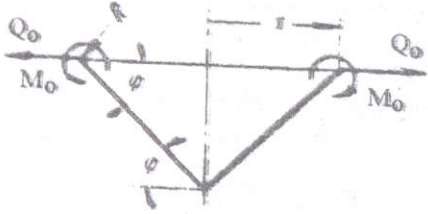
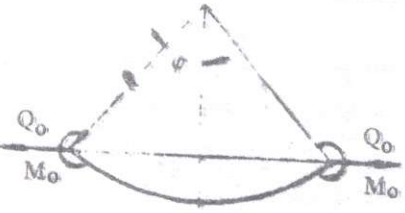
Из (31) следует, что при $Q_0=0$ и $M_0=1$:

$$\left. \begin{aligned} \omega \Big|_{x=0, M_0=1} &= \delta_{MM} = \frac{l}{kD} \\ \frac{d\omega}{dx} \Big|_{x=0, M_0=1} &= \delta_{QM} = \frac{l}{2k^2 D} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

а также то, что при $Q_0=1$ и $M_0=0$

$$\left. \begin{aligned} \omega \Big|_{x=0, Q_0=1} &= \delta_{QQ} = \frac{l}{2k^3 D} \\ \frac{d\omega}{dx} \Big|_{x=0, Q_0=1} &= \delta_{QM} = \frac{\delta_{MQ}}{2k^2 D} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Коэффициенты δ_{MQ} и δ_{QM} симметричны, т.е. $\delta_{MQ}=\delta_{QM}$. Значения коэффициентов для определения единичных перемещений наиболее распространенных в практике аппаратостроения оболочек табулированы и приведены в таблице:

Оболочка	Эскиз	k_1	k_2	k_3
Круговой цилиндр		1	1	1
Круговой конус		1	$\sin \varphi$	$\sin \varphi$
Сфера		1	$\sin \varphi$	$\sin^2 \varphi$

$$\delta_{MM} = \frac{l}{kD} k_1; \quad \delta_{MQ} = \delta_{QM} = \frac{\delta_{11}}{2k} k_2; \quad \delta_{MM} = \frac{\delta_{12}}{k} k_3 = \frac{\delta_{11}}{2k^2} k_2 k_3;$$

$$k = \sqrt[4]{\frac{3(1-\mu^2)}{R}}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

5. Определение напряжений в местах действия краевого эффекта

Рассмотренные выше расчетные формулы получены для нагруженных внутренним давлением оболочек, у которых не закреплены края. В реальных конструкциях сосудов и аппаратов в местах сопряжения или закрепления оболочек возникает краевой эффект. В этих узлах кроме меридиональных и окружных усилий, определяемых по безмоментной теории оболочек, возникают еще дополнительные (краевые) изгибающие моменты и поперечные силы, обусловленные локальным изгибом оболочек. В основу решения задач краевого эффекта положен, хорошо разработанный в курсе сопротивления материалов, метод сил.

При этом используют условие совместности деформации, заключающееся в требовании того, что в реальной конструкции при нормальной работе сосуда в узле сопряжения оболочек различной конфигурации не должно быть никаких относительных перемещений сопрягаемых элементов. В этом случае место сопряжения оболочек рассекают плоскостью, нормальной к их оси, так что основная (статически определимая) система представляется состоящей из двух оболочек. К обеим оболочкам прикладывают заданную внешнюю нагрузку, а в месте сечения - распорную силу, действующую на край оболочки, а также искомые краевые силы и моменты. Затем составляют канонические уравнения метода сил.

Для пояснения рассмотрим сосуд, состоящий из двух сопряженных оболочек и находящийся под действием внутреннего давления p (рис.16). Допустим, что обе оболочки деформируются в результате приложенных к ним внешних сил независимо одна от другой.

Обозначим радиальное перемещение под действием внутреннего давления p края оболочки I через δ'_{QP} и поворот его через δ'_{MP} , а радиальное перемещение и поворот края оболочки II соответственно через δ''_{QP} и δ''_{MP} .

В связи с тем, что в общем случае радиальное и угловое перемещения края оболочки I не равны соответствующим перемещениям края оболочки II, и вместе с тем обе оболочки не могут деформироваться независимо одна от другой, в краевых сечениях появляются противоположно направленные лежащие в плоскости параллельных кругов силы Q_0 , и меридиональные изгибающие моменты M_0 . Очевидно, что радиальные перемещения и углы поворота сечений в месте сопряжения двух оболочек, образующих сосуд, по абсолютной величине равны между собой.

На основании этого можно написать систему уравнений в следующей канонической форме:

$$\left. \begin{aligned} \delta'_{MM}M_0 + \delta'_{MQ}Q_0 + \delta'_{MP} &= \delta''_{MM}M_0 + \delta''_{MQ}Q_0 + \delta''_{MP} \\ \delta'_{QM}M_0 + \delta'_{QQ}Q_0 + \delta'_{QP} &= \delta''_{QM}M_0 + \delta''_{QQ}Q_0 + \delta''_{QP} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Здесь δ_{QP} , δ_{QM} - радиальные перемещения краев оболочек под действием соответственно единичных сил и моментов; δ_{MM} и δ_{MQ} - угловые перемещения краев оболочек под действием соответственно единичных моментов и сил.

В дальнейшем будем считать положительными радиальные перемещения, если они направлены от оси оболочки, а угловые - если они направлены по часовой стрелке. Будем считать положительными изгибающие моменты, если они вызывают растяжение внутренних волокон оболочки, а поперечные силы, усилия и нагрузки, - если они направлены от оси оболочки и вызывают ее растяжение. В случае если в результате решения моменты или усилия будут получены с обратным знаком, нужно поменять их направление.

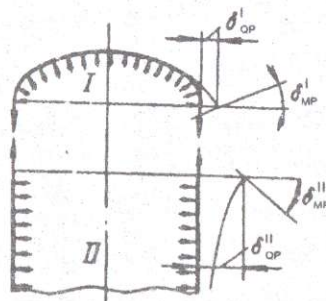


Рис.16

В качестве примера обратимся к цилиндрической оболочке длиной $l > 5 R_h$, жестко заделанной по краю и нагруженной внутренним давлением. Для определения неизвестных M_0 и Q_0 запишем канонические уравнения:

$$\left. \begin{aligned} M_0 \delta_{MM} + Q_0 \delta_{MQ} + \delta_{MP} &= 0 \\ M_0 \delta'_{QM} + Q_0 \delta'_{QQ} + \delta_{QP} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Первая строка этого уравнения составлена из условия, что в защемлении угол поворота равен нулю, а вторая из условия равенства нулю прогиба в точке защемления. Входящие в уравнения

коэффициенты определяют перемещение на краю оболочки от действия единичного изгибающего момента и единичной перерезывающей силы.

Значение коэффициентов для определения единичных перемещений табулированы и приведены в таблице. Для рассматриваемой задачи они частично получены нами выше (34) и (35), теперь мы определим δ_{QP} и δ_{MP} - радиальное и угловое перемещение образующей цилиндрической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления p .

На основании обобщенного закона Гука можно записать:

$$\epsilon_t = \frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{\Delta r}{r} = \epsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_s),$$

где ϵ_t - относительное удлинение срединной поверхности оболочки в окружном направлении, а ϵ_r - относительное радиальное удлинение оболочки.

Абсолютное удлинение радиуса оболочки

$$\delta_{QP} = \frac{r}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_s).$$

Подставив сюда σ_t и σ_s из уравнения (12), получим для цилиндрической оболочки

$$\delta_{QP} = \frac{pr}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2} \right).$$

Поскольку радиальное перемещение δ_{QP} постоянно по оси оболочки, угловое перемещение конца оболочки $\delta_{MP} = 0$. Аналогично могут быть получены угловые и радиальные перемещения концов оболочек другой формы (см. таблицу).

Подставив значение коэффициентов в уравнения (37) и решив эту систему, получим

$$M_0 = \frac{p \cdot Rh}{2\sqrt{3(1-\mu^2)}} \quad Q_0 = -\frac{p\sqrt{Rh}}{4\sqrt{3(1-\mu^2)}} \quad (38)$$

Аналогичное решение получено нами в (33).

Рассмотрим сопряжение цилиндрической оболочки со сферическим неотбортованным днищем (рис.17).

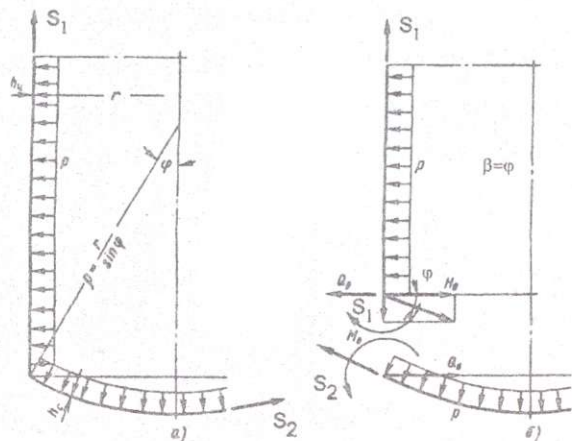


Рис.17

В этом случае на край цилиндрической оболочки действует меридиональное усилие:

$$S_1 = \sigma_{s1} h_1,$$

где σ_{s1} - возникающее в цилиндрической оболочке меридиональное напряжение.

Кроме усилия S_1 , к краю цилиндрической оболочки приложены краевой изгибающий момент M_0 и перерезывающая сила Q_0 . На край сферической оболочки действуют точно такие же по величине, но противоположно направленные краевой изгибающий момент и перерезывающая сила.

Меридиональная сила, действующая на край сферической оболочки:

$$S_2 = \sigma_{s2} h_2,$$

где σ_{s2} - возникающее в сферической оболочке меридиональное напряжение.

Разложим усилие S_2 на два направления - вдоль и перпендикулярно оси цилиндрической оболочки. Составляющая силы S_2 , направленная перпендикулярно оси цилиндрической оболочки, является распорным усилием: $H_0 = S_2 \cos \varphi = S_1 \operatorname{ctg} \varphi$.

Для рассматриваемого случая канонические уравнения метода сил запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \delta_{1MM} M_0 + \delta_{1MQ} (Q_0 - H_0) &= -\delta_{2MM} M_0 + \delta_{2MQ} Q_0 \\ \delta_{1QM} M_0 + \delta_{1QQ} (Q_0 - H_0) + \delta_{1QP} &= -\delta_{2QM} M_0 + \delta_{2QQ} Q_0 + \delta_{2QP} \end{aligned} \right\}$$

Из полученных уравнений находим:

$$M_0 = \frac{\delta_{1MQ} H_0}{\delta_{1MM} + \delta_{2MM}}; \quad Q_0 = \frac{\delta_{2QP} + \delta_{QQ} H_0 - \delta_{1QP}}{\delta_{1QQ} + \delta_{2QQ}}$$

С целью упрощения решения краевых задач в справочном приложении к ГОСТ 25859-83 "Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета при малоцикловых нагрузках" был сделан ряд упрощений и приведены решения, позволяющие в более удобной форме определять краевые усилия для случая сопряжения оболочек вращения различных типов.

6. Изгиб круглых симметрично нагруженных пластин.

Напомним, что под пластинами мы понимаем оболочки, у которых радиусы кривизны $R_1 = R_2 = \infty$. Рассмотрим поведение пластины под действием внешних сил, перпендикулярных к её срединной плоскости.

Очевидно, что пластина в этом случае будет менять свою кривизну, в результате чего образуется некоторая слабоизогнутая поверхность, форма которой характеризуется законом изменения прогибов пластины ω . При расчете пластин, когда прогиб ω существенно меньше толщины пластины h , изгиб пластины можно рассматривать независимо от растяжения, т.е. считать, что нормальные напряжения в пластине будут обусловлены не силами, а изгибающими моментами. Пластины, удовлетворяющие этому условию, называют иногда тонкими плитами.

Теория изгиба пластин, так же как и теория расчета оболочек, основана на некоторых гипотезах. Первой из них является гипотеза Кирхгофа, согласно которой точки, расположенные на некоторой прямой, нормальной к срединной поверхности до деформации, после деформации снова образуют прямую, нормальную к деформированной поверхности. Предположение обуславливает тот факт, что угловыми деформациями пластин можно пренебречь по сравнению с угловыми перемещениями. Это приемлемо в той мере, в какой толщина пластины мала по сравнению с другими ее размерами.

Далее будем считать, что нормальные напряжения в сечениях, параллельных срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с изгибными напряжениями. Аналогичное допущение принималось ранее при исследовании напряженного состояния оболочек.

Перейдем теперь к определению напряжений в круглых пластинах. Рассмотрим пластину постоянной толщины h , нагруженную симметричной относительно оси пластины z распределенной нагрузкой p . Деформации, перемещения и напряжения, возникающие в пластине, будут также симметричны относительно оси z . Прогиб пластины

обозначим через ω , а угол поворота нормали - через ϑ (рис.18). Величины ω и ϑ являются функциями только радиуса r и связаны между собой очевидным соотношением:

$$\vartheta = -\frac{d\omega}{dr} \quad (40)$$

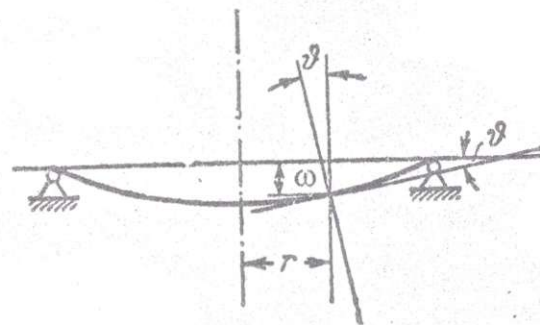


Рис.18

В силу малости ϑ здесь принято, что $\sin \vartheta = \vartheta$ и $\cos \vartheta = 1$. Знак минус свидетельствует о том, что с уменьшением прогиба ω угол ϑ возрастает, причем выбор знака не имеет принципиального значения и зависит только от направления отсчета.

На рис.19 показано диаметрально сечение пластины и положения нормалей, отстоящих одна от другой на расстоянии dr до и после деформации пластины.

Относительное удлинение отрезка ab , расположенного на расстоянии z от срединной поверхности будет:

$$\varepsilon_r = (z(\vartheta + d\vartheta) - z\vartheta) / dr = z d\vartheta / dr \quad (41)$$

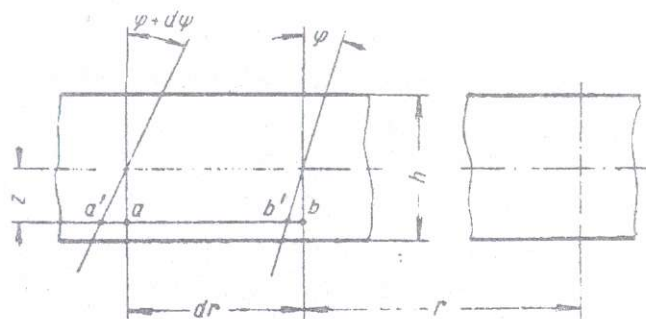


Рис.19

Относительное удлинение в точке a в окружном направлении может быть найдено из сравнения длин окружностей, на которых находится точка a , до и после деформации. До изгиба пластины длина окружности, проходящей через точку a , была равна $2\pi r$, а после изгиба она стала $2\pi(r+z\vartheta)$. Следовательно, относительное удлинение в окружном направлении:

$$\varepsilon_r = z\vartheta / r \quad (42)$$

Двумя диаметрными сечениями, разнесенными на угол $d\varphi$, и двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $r+dr$ выделим из пластины элемент, показанный на рис.20. Поскольку мы постулировали, что в сечениях, параллельных срединной плоскости, нормальные напряжения отсутствуют, связь между удлинениями и напряжениями в этом элементе определяется обобщенным законом Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_t), \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E} (\sigma_t - \mu \sigma_r). \end{aligned}$$

Если выразить напряжения в элементе через деформации, то получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r - \mu \varepsilon_t), \\ \sigma_t &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_t - \mu \varepsilon_r) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Используя уравнения (41) и (42), найдем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right), \\ \sigma_t &= \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

На гранях выделенного элемента (рис.20) возможно возникновение не только нормальных, но и касательных напряжений. Поскольку любое из диаметральных сечений пластины, например $B_1B_2A_2A_1$, можно рассматривать как плоскость симметрии, в них касательные напряжения отсутствуют. Такие напряжения могут возникать только на площадках, перпендикулярных к радиусу r и только в вертикальном направлении.

Рассмотрим теперь условия равновесия выделенного элемента. Для этого найдем сначала равнодействующие силы на его гранях. На грани $A_1B_1A_1'B_1'$ (рис.21) касательные напряжения дают равнодействующую поперечную силу, направленную по оси z . Интенсивность этой силы, т.е. величину силы, приходящейся на единицу дуги $rd\varphi$, будем по-прежнему обозначать через N . Величина поперечной силы N на грани $A_1B_1A_1'B_1'$ будет $Nrd\varphi$, а $N+dN$ на грани $A_2B_2A_2'B_2'$ будет равна $(N+dN)(r+dr)d\varphi$.

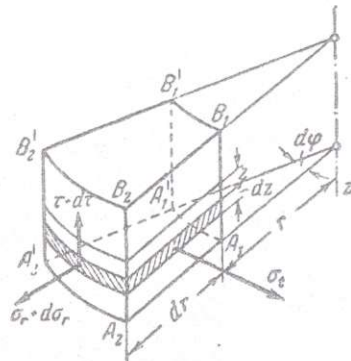


Рис.20

Поскольку напряжения в верхних и нижних слоях боковых граней вырезанного элемента одинаковы, но различны по знаку, нормальные силы S и T на гранях элемента отсутствуют. Нормальные напряжения σ_r и σ_ϕ на соответствующих гранях приводятся лишь к равнодействующим моментам K в кольцевой и M в диаметральной плоскостях. Интенсивность этих моментов, т.е. величины моментов, приходящихся на единицу длины сечения, будем по-прежнему обозначать через M и K.

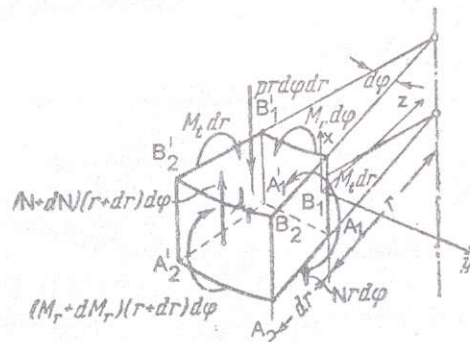


Рис.21

Зная напряжения σ_r и σ_ϕ , определяем равнодействующие моменты на гранях:

$$Mrd\phi = rd\phi \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r z dz;$$

$$Kdr = dr \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\phi z dz$$

Используя (44), получим:

$$M = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{d\theta}{dr} + \mu \frac{\theta}{r} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz;$$

$$K = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\theta}{r} + \mu \frac{d\theta}{dr} \right) \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz;$$

$$\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12},$$

следовательно,

$$\begin{aligned} M &= D \left(\frac{d\theta}{dr} + \mu \frac{\theta}{r} \right) \\ K &= D \left(\frac{\theta}{r} + \mu \frac{d\theta}{dr} \right) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\text{где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Эта величина, как мы уже знаем (24), называется жесткостью пластины (или оболочки) на изгиб.

Поскольку нормальные силы S и T на гранях элемента отсутствуют, а распределенная внешняя нагрузка p (давление, которое может меняться в функции радиуса r), и перерезывающая сила N перпендикулярны к оси x, сумма проекций всех сил на ось x тождественно равна 0.

Сумма проекций всех сил на ось y дает:

$$(N + dN)(r + dr)d\phi - Nr d\phi - pr dr d\phi = 0$$

$$\text{или } pr = \frac{d}{dr}(Nr). \quad (46)$$

Сумма моментов всех сил относительно оси y , приводит к уравнению:

$$K - \frac{d}{dr}(Mr) = Nr. \quad (47)$$

Подставляя M и K из выражений (45) в уравнение (47), получим:

$$r \frac{d^2 \vartheta}{dr^2} + \frac{d\vartheta}{dr} - \frac{\vartheta}{r} = -\frac{Nr}{D}, \text{ откуда } \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (\vartheta) \right] = -\frac{N}{D}. \quad (48)$$

Последнее преобразование легко проверить простым дифференцированием.

После двукратного интегрирования выражения (46) находим

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1}{Dr} \int [r] N dr, \quad (49)$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные интегрирования, которые надлежит определять из граничных условий в каждом конкретном случае. Интенсивность поперечной силы N может быть найдена из уравнения равновесия (46).

После того как функция ϑ (49) найдена, из выражений (44) легко найти и напряжения. Наибольшие напряжения будут иметь место при $z = \pm \frac{h}{2}$. Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{\max} &= \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} \right) \\ \sigma_t^{\max} &= \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\vartheta}{r} + \mu \frac{d\vartheta}{dr} \right) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Определим прогибы и напряжения в пластине, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой p , в двух случаях закрепления

пластины: а) при защемлении контура, б) при свободном опирании пластины на контур (рис.22). Радиус пластины R , толщина h .

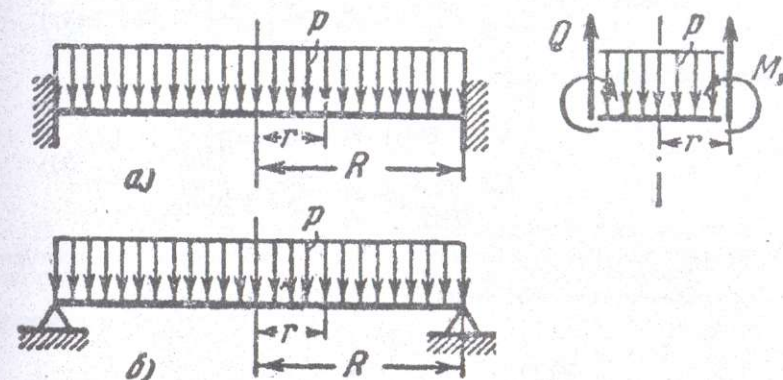


Рис.22

Решение задачи начинаем с определения N . Для центральной части пластины радиусом r (рис.22), независимо от способа закрепления на внешнем контуре, уравнение равновесия дает

$$N \cdot 2\pi r = p\pi r^2 \text{ или } N = \frac{pr}{2} \dots$$

Из выражения (49) после двукратного интегрирования находим

$$\vartheta = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{pr^3}{16D}.$$

Как в случае а), так и в случае б) (рис.22) угол поворота ϑ в центре пластины (при $r=0$) должен быть равен нулю, так как излом пластины отсутствует. Но это возможно только в том случае, если $C_2=0$. Таким образом,

$$\vartheta = C_1 r - \frac{pr^3}{16D} \quad (51)$$

Теперь рассмотрим случаи закрепления раздельно. При защемлении пластины на контуре при $r=R$ угол $\vartheta=0$, откуда

$$C_1 = \frac{pR^2}{16D} \vartheta = \frac{p}{16D} (R^2 r - r^3). \quad (52)$$

Теперь согласно (45) имеем:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{p}{16} [R^2(1+\mu) - r^2(3+\mu)] \\ K &= \frac{p}{16} [R^2(1+\mu) - r^2(1+3\mu)] \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

В случае свободного опирания пластины момент M на контуре пластины обращается в нуль, и тогда согласно (45) при $r=R$

$$\frac{d\vartheta}{dr} + \mu \frac{\vartheta}{r} = 0.$$

Из этого условия с учетом (51) можно определить постоянную C_1 :

$$C_1 - \frac{3pR^2}{16D} + \mu \left(C_1 - \frac{pR^2}{16D} \right) = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{pR^2}{16D} \frac{3+\mu}{1+\mu}; \quad \vartheta = \frac{p}{16D} \left[\frac{1+\mu}{3+\mu} R^2 r - r^3 \right].$$

Согласно (45) выражения для изгибающих моментов будут иметь следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{p}{16} (3+\mu) (R^2 - r^2) \\ K &= \frac{p}{16} (3+\mu) \left(R^2 - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Согласно выражениям (53) и (54) строятся эпюры изгибающих моментов, показанные на рис.23.

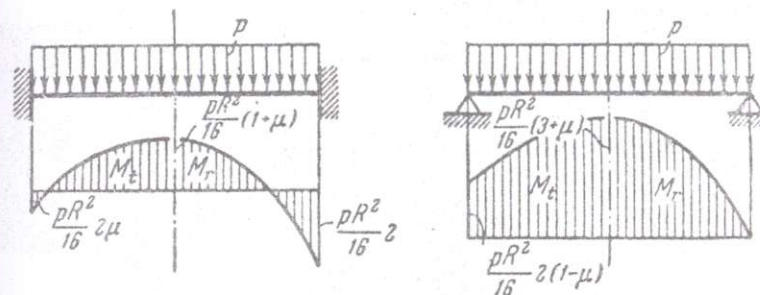


Рис.23

В случае защемленного контура наибольшие растягивающие напряжения возникают у верхней поверхности вблизи контура. Согласно формулам (50)

$$\sigma_1 = \sigma_r = \frac{2pR^2}{16} \frac{6}{h^2}, \quad \sigma_2 = \sigma_t = \frac{2\mu R^2}{16} \frac{6}{h^2}, \quad \sigma_3 = 0;$$

* эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{3}{4} \frac{pR^2}{h^2}.$$

В случае свободноопертого контура наибольшие растягивающие напряжения возникают в центре у нижней поверхности пластины:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{3+\mu}{16} \frac{pR^2}{h^2}, \quad \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_1 - k\sigma_3 = \frac{3}{8} (3+\mu) \frac{pR^2}{h^2}.$$

Редактор Л.Г.Шевчук
Корректор Ю.Е.Стрыхарь

Лицензия № 020404 от 6.03.97 г.

Подписано в печать 12.10.2000.	Формат 60x84 1/16.
Бумага писчая.	Печать офсетная.
3,0 уч.-изд.л.	2, 79 усл.печ.л.
Тираж 100 экз.	Заказ 202 «С» 157.

Издательство Казанского государственного технологического университета

Офсетная лаборатория Казанского государственного технологического университета

420015, Казань, К.Маркса, 68