

Авторские задачи для математических олимпиад: технология творчества

Смольянова Елена Григорьевна
старший преподаватель кафедры математического анализа
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
им. Н.П. Огарёва
ул. Большевикская, д. 68, г. Саранск, 430005, (8342) 476569, 270242
janovaeg@mail.ru

Аннотация

В статье предлагаются некоторые «технологические» приёмы, помогающие придумывать (конструировать) задачи повышенной сложности специально для математических олимпиад, а также набор авторских задач с решениями и указаниями.

The article presents some techniques that enable development of more complex problems specifically for math olympiads as well as set of original tasks with solutions and tips.

Ключевые слова

Математические олимпиады, задачи математических олимпиад, технологии творчества

Math olympiads, math problems for olympiads, technologies of creativity

Введение

Задачи, которые предлагают участникам всевозможных математических конкурсов (олимпиад, турниров), в большинстве своём принципиально отличаются от стандартных школьных задач, поскольку математическая сущность олимпиадной задачи не может и не должна целиком относиться только к тому набору знаний, который привычно именуется «школьной математикой». Цель создания задач этой категории — воспитание в будущих математиках таких профессиональных качеств как творческий подход, нестандартное (креативное) мышление, умение воспринимать любую задачную ситуацию как проблему, которая требует разностороннего исследования. Для успешного решения даже той части задач, которые относят к олимпиадной «классике», требуются определённые знания из таких разделов математики, как комбинаторика и теории вероятностей, алгебра и теория чисел, теория графов, элементы математического анализа и др. Алгоритм Евклида, принцип Дирихле, диофантовы уравнения, элементы поведения функции, неравенства, связанные со средними величинами, инварианты, избранные теоремы планиметрии, уравнения с параметрами – это далеко не полный перечень традиционных тем занятий любого математического кружка. Разумеется, более высокий статус математического состязания подразумевает и более высокий уровень сложности предлагаемых для решения задач. Такие задачи, как правило, авторские и поэтому могут в основе своей иметь достаточно серьёзные математические проблемы из разных разделов современной математики. Это и отличает, по мнению авторов [1], олимпиаду по математике от соревнования по разгадыванию всевозможных ребусов и головоломок. Фундаментальная же цель математики – раскрывать внутреннюю простоту сложных на первый взгляд вопросов [2]. Поэтому предполагается, что школьник сможет либо угадать идею автора, либо придумать свой собственный способ решения, что иногда

оказывается ещё более ценным обстоятельством при оценке его работы членами жюри, либо сформулировать разумные гипотезы исследования. Иногда участники олимпиады, не ограничиваясь решением предложенной задачи, развивают её идеи до какой-либо более общей научной формулировки или предлагают некие интересные «ответвления» от основной задачи. В итоге школьник может неожиданно для жюри и самого себя «переквалифицироваться» из непосредственного участника математического состязания в автора новых задач. При организации олимпиад регионального и Всероссийского уровней создаётся специальная Методическая комиссия в основном из учёных-математиков, которая разбивается на секции («геометрия», «теория чисел», «логические задачи», «математические игры» и пр.) с учётом соответствующих математических приоритетов. Члены этой комиссии какое-то время занимаются «конструированием» задач и их решений. Они же вырабатывают рекомендации по рейтингу сложности этих задач для включения их на разные по сложности позиции и критерии оценки. Затем они обсуждают результаты своего творческого труда всем коллективом авторов и окончательно отбирают самые интересные задачи. На это уходит иногда достаточно много времени. Тем самым традиционно поддерживается высокое (в том числе, и научное) качество олимпиадных задач.

Задачная «база» для подготовки и проведения всевозможных математических конкурсов и для кружковой работы – огромная. Известные авторы книг и пособий по решению олимпиадных задач внесли и вносят неоценимый вклад в дело формирования кадрового научного потенциала страны. Но как придумать собственную, оригинальную задачу для математической олимпиады? Бесспорно, это процесс исключительно творческий. В основу результата, который мы ожидаем получить, должна быть положена какая-то новая идея (эвристика). «Секреты» технологии математического творчества неизменно привлекают внимание различных специалистов, как профессиональных математиков, так и учителей-методистов. В хорошо известных математическому и педагогическому сообществу книгах [3-5] выдающийся американский математик и педагог Д.Пойа подробно рассказывает о том, как возникают новые математические идеи (в том числе и как основа новых математических задач) и даёт соответствующие методические рекомендации – технологические приёмы творчества.

Итак, с чего можно начать? Будущий автор новой задачи должен в этот момент определиться с выбором собственных математических предпочтений. Автору данной статьи, например, всегда было интересно исследовать свойства различных функциональных зависимостей и соответствующих преобразований, выяснять их геометрический смысл. Поэтому все «задачные» истории далее будут связаны так или иначе с функциями и графиками функций. Для начала выберем конкретную элементарную функцию и попробуем осуществить какую-нибудь не хитрую манипуляцию с её графиком. А затем попытаемся развить исследование до того момента, когда можно будет говорить об обнаружении некоего нового свойства, зависимости, закономерности, неожиданной связи с «не смежными» знаниями и т.п.

График элементарной функции

Пусть, например, Γ_p – график функции $f(x) = \frac{p}{x}$, ($p > 0, x > 0$), т.е. правая ветвь гиперболы с положительным параметром p . Зафиксируем положительное число k и будем строить всевозможные хорды Γ_p длины k , отмечая одновременно середины этих хорд. Исследуем геометрическое место T середин хорд. Ясно, что если $A\left(a; \frac{p}{a}\right)$ и $B\left(b; \frac{p}{b}\right)$ – две различные точки Γ_p , то

$$AB^2 = (a - b)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{p}{a \cdot b}\right)^2\right).$$

Фиксируя длину отрезка AB , будем иметь:

$$(a - b)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{p}{a \cdot b}\right)^2\right) = k^2. \quad (1)$$

Если $C(x_c; y_c)$ – середина отрезка AB , то

$$x_c = \frac{a + b}{2}; y_c = p \cdot \frac{a + b}{2 \cdot a \cdot b}.$$

Так как

$$x_c = \frac{a \cdot b}{p} \cdot y_c,$$

то равенство (1) примет вид:

$$(a - b)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{y_c}{x_c}\right)^2\right) = k^2 \Leftrightarrow \frac{(a - b)^2}{x_c^2} = \frac{k^2}{x_c^2 + y_c^2}. \quad (2)$$

А поскольку

$$\frac{(a - b)^2}{x_c^2} = \frac{a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2}{a^2 \cdot b^2 \cdot y_c^2} \cdot p^2 = \frac{p^2}{y_c^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{2}{a \cdot b}\right)$$

и

$$2 \cdot y_c = p \cdot \frac{a + b}{a \cdot b} = p \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right),$$

то

$$\frac{(a - b)^2}{x_c^2} = \frac{p^2}{y_c^2} \cdot \left(\left(\frac{2 \cdot y_c}{p}\right)^2 - \frac{4}{a \cdot b}\right) = \frac{p^2}{y_c^2} \cdot \left(\left(\frac{2 \cdot y_c}{p}\right)^2 - \frac{4 \cdot y_c}{p \cdot x_c}\right) = \frac{4}{y_c} \cdot \left(y_c - \frac{p}{x_c}\right).$$

Следовательно, (2) равносильно равенству

$$\frac{4}{y_c} \cdot \left(y_c - \frac{p}{x_c}\right) = \frac{k^2}{x_c^2 + y_c^2}.$$

Последнее означает, что найдено уравнение множества T :

$$\frac{K^2}{x^2 + y^2} + \frac{p}{x \cdot y} = 1, \quad (3)$$

где $K = k/2$ – половина длины хорды.

Теперь мы можем приступить к формулировке нашей первой задачи. Это будет задача с функционально-геометрическим содержанием.

Задача 1. Найти уравнение геометрического места середин хорд правой ветви гиперболы $y = \frac{p}{x}$ при условии, что длина хорд фиксирована и $p > 0$.

Замечание. В статье [6] авторы применили (3) для исследования геометрического смысла решений биквадратного уравнения. Так что одна и та же «конструкция» может дать разные направления исследования.

Обратимся теперь к классам функций, обладающих особыми свойствами, что, бесспорно, представляет неисчерпаемый источник новых идей в математике (размерность аргумента функции может быть и больше единицы). Особыми мы называем такие свойства функций, как, например, инвариантность и квазиинвариантность (в частности, – чётность (нечётность)), периодичность, инволютивность, цикличность при перестановке аргументов и пр.

Квадратное уравнение? Это сложно!

Попробуем придумать ещё одну задачу. Выберем для этого самую простую, на первый взгляд, тему: «Квадратные уравнения». Как известно, квадратными называют алгебраические уравнения второй степени. Многие задачи, как алгебраические, так и геометрические, сводятся к решению таких уравнений. Уже ученики восьмых классов знают о том, что в общем случае задача поиска корней квадратного уравнения решается с помощью дискриминанта – основной числовой характеристики такого типа уравнений. Ещё один известный способ исследования уравнений второй степени – применение прямой и обратной теорем Виета. Кроме того, у любой квадратической функции имеется линейный инвариант. Последнее обстоятельство можно с успехом использовать при решении определённого типа задач, сводящихся к исследованию квадратных уравнений. Например, таких, в которых присутствуют числовые параметры, какие-либо ограничения на значения неизвестной величины и т.п. Попробуем сконструировать задачу, в которой бы одновременно с квадратными уравнениями обсуждались бы нелинейные инварианты. Дадим сначала определение инварианта функции. Пусть $f(x)$ – некоторая функция, определённая на интервале (a, b) . Говорят, что функция $\varphi(x)$ является инвариантом функции $f(x)$, если равенство

$$f(\varphi(x)) = f(x) \quad (4)$$

выполняется для всех x из этого интервала. Инвариант называют нетривиальным, если он не есть тождественное отображение. Далее мы будем обсуждать только нетривиальные инварианты. Так, очевидным инвариантом любой чётной функции является функция $\varphi(x) = -x$. Другой пример: если $f(x)$ – периодическая функция, то она имеет, как минимум, один нетривиальный инвариант, а именно, $\varphi(x) = x + T$, где T – период функции $f(x)$. Перейдём к изложению основной идеи.

Запишем квадратное уравнение в общем виде:

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0. \quad (5)$$

Как известно, квадратическая функция $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ имеет линейный инвариант $\varphi(x) = -\frac{b}{a} - x$. Поэтому в случае неотрицательного дискриминанта с каждым решением x_1 уравнения (5), отличным от абсциссы вершины соответствующей параболы, мы находим ещё одно его решение – число $\varphi(x_1)$. Следует заметить, что функция $\varphi(x)$ обладает особым свойством. А именно

$$\varphi(\varphi(x)) = x$$

при всех действительных x . Это означает, что $\varphi(x)$ совпадает с обратной функцией. Такие функции называют инволюциями. Их графики симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-его координатных углов. Попробуем привлечь именно нелинейные инварианты при решении уравнения (5). Для этого преобразуем его следующим образом:

$$\frac{a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1}{a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2} = A, \quad (a_1 \neq 0, a_2 \neq 0). \quad (6)$$

Если допустить, что знаменатель дроби обращается в нуль при $x = x_1$ или при $x = \varphi(x_1)$, то хотя бы одно из этих чисел является и нулём числителя. Это означает, что рациональная дробь – сократима. Следовательно, будем дополнительно требовать, что последнее преобразование не приводит к сократимой дроби. Так, квадратное уравнение

$$3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 7 = 0,$$

равносильно, например, таким уравнениям вида (6):

$$\begin{aligned}\frac{4 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 3}{x^2 + 2 \cdot x + 4} &= 1, \\ \frac{-2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 15}{5 \cdot x^2 + 8} &= -1, \\ \frac{-9 \cdot x^2 + 22 \cdot x - 7}{-2 \cdot x^2 + 3 \cdot x} &= 6.\end{aligned}$$

Этот перечень можно продолжать как угодно долго. Функции вида

$$h(x) = \frac{a_1 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + c_1}{a_2 \cdot x^2 + b_2 \cdot x + c_2}$$

называют дробно-квадратическими (при условии несократимости дроби). Можно показать, что $h(x)$ имеет нетривиальный инвариант

$$\varphi(x) = -\frac{\beta \cdot x + \alpha}{\gamma \cdot x + \beta},$$

где $\alpha = b_1 \cdot c_2 - b_2 \cdot c_1$; $\beta = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$; $\gamma = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$ [7].

Например, дробно-рациональным инвариантом функции $h(x) = \frac{4 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 3}{x^2 + 2 \cdot x + 4}$ является функция $\varphi(x) = -\frac{19 \cdot x + 30}{2 \cdot x + 19}$. Итак, с каждым решением x_0 уравнения (6), мы находим ещё одно его решение – число $\varphi(x_0)$ в случае, если равносильное квадратное уравнение имеет положительный дискриминант. Если же дискриминант равен нулю, то $\varphi(x_0) = x_0$. Несложно проверить, что $\varphi(\varphi(x)) = x$, т.е. $\varphi(x)$ тоже является инволюцией. Воспользуемся теоремой Виета при исследовании равенства $x_2 = \varphi(x_1)$. Будем иметь:

$$x_2 = -\frac{\beta \cdot x_1 + \alpha}{\gamma \cdot x_1 + \beta},$$

откуда последовательно получаем:

$$\begin{aligned}\gamma \cdot x_1 \cdot x_2 + \beta \cdot (x_1 + x_2) + \alpha &= 0, \\ \gamma \cdot \frac{c}{a} + \beta \cdot \left(-\frac{b}{a}\right) + \alpha &= 0, \\ a \cdot \alpha - b \cdot \beta + c \cdot \gamma &= 0.\end{aligned}\tag{7}$$

Поскольку последнее равенство не меняется при одновременной замене $(a, b, c) \rightarrow (\alpha, \beta, \gamma)$ и $(\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (a, b, c)$, то при выполнении условия (7) пары квадратных уравнений

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0; \alpha \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$$

выделяются в множестве всевозможных квадратных уравнений, поскольку в таком случае для первого из них функция-инвариант $\varphi(x) = -\frac{\beta \cdot x + \alpha}{\gamma \cdot x + \beta}$, а для второго соответственно $\varphi(x) = -\frac{b \cdot x + a}{c \cdot x + b}$. Так что в определённом смысле их можно считать сопряжённой парой квадратных уравнений при совместном условии:

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c > 0 \text{ и } \beta^2 - 4 \cdot \alpha \cdot \gamma > 0.$$

Условие сопряжённости выполняется, например, для квадратных уравнений с коэффициентами $(3, 4, -7)$ и $(7, -42, 27)$.

Таким образом, корни квадратного уравнения можно искать исходя из коэффициентов любого сопряжённого с ним квадратного уравнения.

Кроме того, если равенство (7) преобразовать так:

$$1 - \frac{-b}{a} \cdot \frac{-\beta}{\alpha} + \frac{c}{a} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} = 0,$$

то равносильно получим, что

$$(x_{11} + x_{12}) \cdot (x_{21} + x_{22}) = 1 + x_{11} \cdot x_{12} \cdot x_{21} \cdot x_{22}.$$

(Здесь x_{11}, x_{12} и x_{21}, x_{22} – пары корней сопряжённых квадратных уравнений). Так что предыдущее может быть связано с поиском, например, целочисленных корней уравнения вида

$$(u + v) \cdot (w + t) = 1 + u \cdot v \cdot w \cdot t.$$

Итак, результаты проведённого исследования «дают» нам ещё задачи.

Задача 2. Пусть известно, что уравнения

$$x^2 + p \cdot x + q = 0, \quad (D = p^2 - 4 \cdot q > 0)$$

и

$$\frac{A_1 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + C_1}{A_2 \cdot x^2 + B_2 \cdot x + C_2} = A$$

равносильны ($A_1 \neq 0, A_2 \neq 0$). Доказать, что если число x_0 – один из корней квадратного уравнения, то число

$$-\frac{(A_1 \cdot C_2 - A_2 \cdot C_1) \cdot x_0 + (B_1 \cdot C_2 - B_2 \cdot C_1)}{(A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1) \cdot x_0 + (A_1 \cdot C_2 - A_2 \cdot C_1)}$$

является вторым корнем этого уравнения.

Задача 3. Пусть известно, что

1) x_1 и x_2 – корни квадратных уравнений

$$x^2 + 20 \cdot x - 17 = 0 \text{ и } 4 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 8 = 0$$

соответственно;

$$2) \varphi(x) = \frac{7 \cdot x + 4}{8 \cdot x - 7}; \quad \omega(x) = \frac{20 \cdot x + 1}{17 \cdot x - 20}.$$

Найти

$$A = x_1 + x_2 + \varphi(x_1) + \omega(x_2) + x_1 \cdot \varphi(x_1) + x_2 \cdot \omega(x_2).$$

Инволюционные преобразования в задачах

Как известно, преобразование (или отображение) – исключительно важный инструмент исследования как математических, так и не математических объектов. Инволюционное же преобразование особенно «ценно» по следующим соображениям: если какой-либо объект преобразуется под действием такого преобразования, то

восстановление этого объекта в прежнем его виде не потребует поиска нового преобразования. Широкое применение инволюционные преобразования находят, например, в криптографии, в задачах, связанных с геометрическим моделированием и пр. Полагаю, что читателям будет интересно почитать статью [8], результаты которой так же можно использовать в соответствующих целях.

Идея решения следующей задачи связана именно с таким свойством преобразования.

Задача 4. Пусть $x_0, y_0, \mu_0, \delta_0$ — действительные числа такие, что

$$\alpha(x_0, y_0) = \mu_0; \beta(x_0, y_0) = \delta_0,$$

где

$$\alpha(x, y) = -\frac{167 \cdot x + 132 \cdot y + 10}{2 \cdot (33 \cdot x + 1089 \cdot y + 1)};$$

$$\beta(x, y) = \frac{10 \cdot x + 4 \cdot y + 25}{4 \cdot (33 \cdot x + 1089 \cdot y + 1)}.$$

Выразить $\alpha(\mu_0, \delta_0)$ и $\beta(\mu_0, \delta_0)$ через x_0 и y_0 .

Пояснение. Предложенные в этой задаче функции двух переменных задают инволюционное преобразование плоскости, поскольку

$$\begin{cases} \alpha(x, y) = \mu, \\ \beta(x, y) = \delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\mu, \delta) = x, \\ \beta(\mu, \delta) = y. \end{cases}$$

Неочевидные квазиинварианты

Напомним, что квазиинвариантом функции $f(x)$ называется функция $g(x)$ такая, что

$$f(g(x)) = -f(x)$$

при всех допустимых значениях переменной x . Так, функция $g(x) = -x$ является квазиинвариантом любой нечётной функции на соответствующей области определения. Другие примеры легко найти в классе тригонометрических функций. Обобщим определение на функции двух переменных. А именно, в случае тождественного выполнения равенства

$$Q(u(x), v(y)) = -Q(x, y). \quad (8)$$

будем называть упорядоченную пару $(u(x), v(y))$ квазиинвариантом функции $Q(x, y)$ (на соответствующем подмножестве координатной плоскости). Свойство функции иметь квазиинвариант даёт возможность предложить следующую задачу.

Задача 5. Пусть

$$Q(x, y) = \frac{2xy - 1}{2(x + y) - 2xy - 1}.$$

Найти (нетождественные) замены x на $u(x)$ и y на $v(y)$ такие, что

$$|Q(u(x), v(y))| - |Q(x, y)| < 10^{-4}$$

при всех допустимых x и y .

Указание. Равенство (8) будет тождеством (на соответствующем множестве) при выборе $(u(x), v(y)) = (\varphi(x), \varphi(y))$, где

$$\varphi(t) = \frac{2t - 1}{2t - 2}.$$

Последнюю задачу можно предложить и как математическую игру. Вообще, придумать правильную (выигрышную или ещё какую-либо) стратегию математической игры удаётся далеко не всем участникам олимпиады. Поиск такой стратегии в большинстве случаев представляет достаточно серьёзное исследование. При этом повторить идею автора задачи иногда не получается вовсе. Залог успеха – опыт решения нестандартных задач и математическая интуиция.

Приведём переформулировку задачи 5.

Задача 6. В игре участвуют два игрока: Игрок 1 (начинает игру) и Игрок 2. Игра длится чётное количество N туров. Игроки поочерёдно называют упорядоченные пары рациональных чисел $(A; B)$ как «предложение» для соперника и каждый из них рассчитывает соответствующее значение своего «выигрыша» по формуле:

$$Q(A; B) = \frac{2AB - 1}{2(A + B) - 2AB - 1}.$$

Из этих действий состоит отдельный тур. Обязательные условия: числа A , B и $2AB$ – отличны от единицы и, конечно, такие, при которых $Q(A; B)$ – существует. Если на каком-то этапе игры обнаружится, что $Q(A; B)$ не определено, то игра начинается сначала. Таким образом, «выигрыш» Игрока 1 зависит от выбора Игрока 2 и, наоборот. Ясно, что результаты расчётов могут оказаться отрицательными. По условиям игры это считается допустимым. Каждые два тура завершаются подсчётами «частичных выигрышей», которые рассчитываются как модуль суммы соответствующей пары «выигрышей». Суммарный (по всем N турам) «выигрыш» игрока есть сумма всех «частичных выигрышей». Цель игры: «минимизировать» суммарный «выигрыш» противника по отношению к собственному суммарному выигрышу, т.е. победителем игры будет тот игрок, у которого суммарный выигрыш окажется меньше. Ничья объявляется в случае равного суммарного «выигрыша». Требуется предложить какую-нибудь игровую тактику для Игрока 2, при которой у Игрока 1 не будет шансов стать победителем, если, конечно, Игрок 1 этим «секретом» не обладает. Иначе игрокам можно будет рассчитывать только на ничью.

Продemonстрируем ход трёх игр. Представим Протоколы 1 и 2 случайных (без определённой тактики) игр и Протокол 3 игры целенаправленной.

ПРОТОКОЛ 1

№ тура	«Предложение» Игрока 1	«Предложение» Игрока 2	«Выигрыш» Игрока 1	«Выигрыш» Игрока 2
1	(2; –3)	(7; –1)	$Q(7; -1) = -3/5$	$Q(2; -3) = -13/9$
	(–4; 2)	(4; 6)	$Q(4; 6) = -47/29$	$Q(-4; 2) = -17/11$
			Частичный выигрыш: 322/145	Частичный выигрыш: 296/99
2	(0; –5)	(–2; 5)	$Q(-2; 5) = -21/25$	$Q(0; -5) = 1/11$
	(3; 3)	(10; –2)	$Q(10; -2) = -41/55$	$Q(3; 3) = -17/7$
			Частичный выигрыш: 436/275	Частичный выигрыш: 180/77

			Суммарный выигрыш	Суммарный выигрыш
			30354/7975 $\approx 3,88$	3692/693 $\approx 5,33$

В результате победителем будет объявлен Игрок 2, так как суммарный выигрыш его противника оказался меньше его собственного. Но такой исход игры – случайный. Ни о каком конкретном (нацеленным на гарантированную победу) игровом поведении здесь и речи нет: Предложения для соперника выбирались мной, что называется, наобум. Полагаться на случайность в математической игре, конечно, не допустимо. Приведём в подтверждение наших слов пример случайной игры с прямо противоположным исходом.

ПРОТОКОЛ 2

№ тур а	«Предложение» Игрока 1	«Предложение» Игрока 2	«Выигрыш» Игрока 1	«Выигрыш» Игрока 2
1	(2; 3)	(7; -1)	$Q(7; -1) = -3/5$	$Q(2; 3) = -11/3$
	(-4; 2)	(4; -6)	$Q(4; -6) = -49/43$	$Q(-4; 2) = -17/11$
			Частичный выигрыш: 374/215	Частичный выигрыш: 172/339
2	(0; -5)	(-2; 5)	$Q(-2; 5) = -21/25$	$Q(0; -5) = 1/11$
	(-3; 3)	(10; 2)	$Q(10; 2) = -39/17$	$Q(-3; 3) = -19/7$
			Частичный выигрыш: 1332/425	Частичный выигрыш: 202/77
			Суммарный выигрыш	Суммарный выигрыш
			89066/18275 $\approx 4,87$	3692/693 $\approx 5,33$

Наконец, приведём протокол игры, которая подразумевает следующую тактику Игрока 2: каждое второе предложение для Игрока 1 будет иметь вид $(\varphi(A); \varphi(B))$, где $(A; B)$ – первое (в рамках одного тура) предложение Игрока 2.

ПРОТОКОЛ 3

№ тура	«Предложение» Игрока 1	«Предложение» Игрока 2	«Выигрыш» Игрока 1	«Выигрыш» Игрока 2
1	(2; -3)	(7; -1)	$Q(7; -1) = -3/5$	$Q(2; -3) = -13/9$
	(-4; 2)	$(\varphi(7); \varphi(-1)) = (13/12; 3/4)$	$Q(13/12; 3/4) = 3/5$	$Q(-4; 2) = -17/11$
			Частичный выигрыш: 0	Частичный выигрыш: 296/99
2	(0; -5)	(-2; 5)	$Q(-2; 5) = -21/25$	$Q(0; -5) = 1/11$

	(3; 3)	$(\varphi(-2); \varphi(5))$ $= (5/6; 9/8)$	$Q(5/6; 9/8)$ $= 21/25$	$Q(3; 3) = -17/7$
			Частичный выигрыш: 0	Частичный выигрыш: 180/77
			Суммарный выигрыш: 0	Суммарный выигрыш: 3692/693

Итак, для Игрока 2 мы предложили беспроигрышную стратегию в этой математической игре.

Функции с циклическими свойствами

Предложим ещё одну задачу на свойства функций.

Задача 7. Пусть

$$1) \quad g_m(x_1, \dots, x_m) = \frac{3624 \cdot \sum_{i=1}^m x_i - 179 \cdot \sum_{i,j=1}^m x_i x_j - 378}{358 \cdot \sum_{i=1}^m x_i - 3624},$$

где $x_1, \dots, x_m$ — действительные числа, $m \in \mathbb{N}$;

$$2) \quad u = g_9\left(2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \frac{26}{25}, \frac{37}{36}, \frac{65}{64}, \frac{82}{81}, \frac{101}{100}\right).$$

Вычислить

$$v = g_9\left(2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \frac{26}{25}, \frac{37}{36}, \frac{65}{64}, \frac{82}{81}, \frac{101}{100}\right);$$

$$w = g_{10}\left(2, \frac{5}{4}, \frac{10}{9}, \frac{17}{16}, \frac{26}{25}, \frac{37}{36}, \frac{65}{64}, \frac{82}{81}, \frac{101}{100}, u\right).$$

Указание. Общий вид функции $g_m(x_1, \dots, x_m)$:

$$g_m(x_1, \dots, x_m) = \frac{2C \cdot \sum_{i=1}^m x_i - A \cdot \sum_{i,j=1}^m x_i x_j - B}{2A \cdot \sum_{i=1}^m x_i - 2C}.$$

Например, при $m = 3$ и $(A; B; C) = (5; -3; 1)$ получаем такую функцию:

$$g_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{2 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) - 10 \cdot (x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3) + 3}{10 \cdot (x_1 + x_2 + x_3) - 2}.$$

Рекомендуется предварительно исследовать свойства $g_m(x_1, \dots, x_m)$, связанные с перестановкой её аргументов.

Циклические свойства функции $g_m(x_1, \dots, x_m)$ можно использовать для разных «задачных» целей. Например, в статье [9] эти свойства положены в основу математического фокуса.

Литература

1. Московские математические олимпиады 1993-2005 г. /Р.М. Фёдоров и др. Под ред. В.М.Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2006. — 456 с.

2. Стюарт И. Величайшие математические задачи. Пер. с англ. – М.: Альпина нон-фикшн, 2015. – 460 с.
3. Пойа Д. Как решать задачу. М.: Госучпедгиз, 1959. – 280 с.
4. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. – М.: Наука, 1976. – 449 с.
5. Пойа Д., Килпатрик Л. Сборник задач по математике Стэнфордского университета: с подсказками и решениями. – М.: НО Научный фонд «Первая исследовательская лаборатория имени академика В.А. Мельникова», 2002. – 96 с.
6. Смольянова Е.Г., Малышкина Н.В. Гипербола и биквадратные уравнения // Математическое образование. – 2018. – №1(85). – С. 5-9.
7. Чучаев И.И. Методы решения уравнений: учеб. пособие в 3 ч., ч. 1: Функциональные приёмы. – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2018. – 333 с.
8. Смольянова Е.Г. Применение инвариантов при инволюционном преобразовании треугольников // Математическое образование. – 2019. – №1(89). – С. 38-42.
9. Смольянова Е.Г., Нечипорук Н.А. Формула с «секретом» или как придумать математический фокус // Потенциал. Математика. Физика. Информатика. – 2018. – №4. – С. 28-32.