

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Казанский государственный технологический университет

ОТВЕТЫ НА ПРОСТЕЙШИЕ ВОПРОСЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

ИЗДАНИЕ ШЕСТОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

КАЗАНЬ
2006

УДК 531.8

Составитель: доц. А. И. Муштари

Ответы на простейшие вопросы по теоретической механике:
метод. указания / Сост.: А.И. Муштари; Казан. гос. технол. ун-т; Казань,
2006. – 48 с.

Предназначено для подготовки к защите расчетных работ и к экзамену по теоретической механике. Представлены отдельные ключевые темы, являющиеся базовыми для всего курса теоретической механики. Приведен теоретический материал в кратком изложении. Рассмотрены примеры решения простейших типовых задач. Предложены аналогичные задачи для самостоятельной подготовки (с ответами).

Предназначено для студентов механических и технологических специальностей всех форм обучения.

Печатается по решению методической комиссии по циклу механических дисциплин.

Рецензенты: доц. И.Г.Коноплев
доц. С.Г.Сидорин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
Часть 1. Типовые примеры ключевых вопросов.....	6
Часть 2. Необходимая теория и решение примеров.....	9
I. СТАТИКА.....	9
1. Проекция силы на ось.....	9
2. Алгебраический момент силы относительно точки.....	11
3 ^{мех} . Перенос силы параллельно её линии действия.....	13
4. Уравнения равновесия плоской системы сил.....	14
II. КИНЕМАТИКА.....	18
5. Скорость точки при координатном и естественном способах задания движения.....	18
6. Ускорение точки при координатном способе задания движения.....	19
7. Направление вектора скорости точки.....	19
8. Угловая скорость твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси.....	21
9. Угловое ускорение твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси.....	22
10. Направления векторов скорости и ускорения точки при вращении тела вокруг неподвижной оси.....	23
11. Величина скорости точки при вращении тела вокруг неподвижной оси.....	24
12. Величины ускорений точки при вращении тела вокруг неподвижной оси.....	24
13 ^{мех} . Скорости точек при плоском движении твердого тела (теорема о проекциях скоростей).....	25

III. ДИНАМИКА.....	28
14. Дифференциальное уравнение движения материальной точки.....	28
15. Теорема об изменении количества движения материальной точки.....	29
16 ^{мех} . Коэффициент жесткости.....	31
17 ^{мех} . Круговая частота и период свободных колебаний материальной точки.....	32
18 ^{мех} . Круговая частота и период вынужденных колебаний материальной точки.....	33
19 ^{мех} . Условие резонанса и подбор частот.....	34
20 ^{мех} . Моменты инерции твердых тел.....	35
21 ^{мех} . Теорема об изменении кинетической энергии твердого тела (при вращении вокруг неподвижной оси).....	36
22 ^{мех} . Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.....	37
Ответы на вопросы 1–22.....	39
Часть 3. Вопросы для тренировки.....	40
Часть 4. Чуть более сложные вопросы для тренировки.....	43
Ответы на вопросы 23–66.....	47
Библиографический список.....	48

ВВЕДЕНИЕ

Хотите увереннее чувствовать себя на экзамене или зачете по термеху? Хотите владеть вопросами, составляющими фундамент теоретической механики и общинженерных предметов? Представленный здесь материал поможет вам в этом.

Некоторые вопросы помечены значком «^{мех}». Они адресованы прежде всего студентам механических специальностей. Остальные вопросы пригодятся в равной степени как механикам, так и технологам.

Как работать с этой методичкой? Вы можете *сначала себя проверить*. Для этого *самостоятельно прорешайте* типовые примеры 1–22 из части 1. Для студента, уже занимавшегося по лекциям, большинство вопросов будут достаточно простыми. В конце части 2 приводятся ответы на эти вопросы.

Что делать, если возникают сложности при решении некоторых (или всех) типовых примеров? Здесь есть два варианта. Можно ещё позаниматься по лекциям или по учебникам [1–3]. В то же время *всю необходимую теорию и примеры решения вы найдете в части 2.*

После того как вы будете теоретически подкованы, проверьте себя снова. Прорешайте вопросы для тренировки 23–44 из части 3 (самостоятельно!), чтобы выяснить степень своей готовности к экзамену. Ответы на эти вопросы приведены в самом конце.

Чтобы быть ещё более уверенными в своей готовности, вы можете прорешать чуть более сложные вопросы 45–66 из части 4. Вот тогда вы будете помнить ключевые темы из теоретической механики в течение всей учебы в университете. А это очень пригодится при изучении курсов «Соппротивление материалов», «Теория машин и механизмов», «Детали машин», «Гидравлика» и некоторых специальных дисциплин на старших курсах.

Два слова об оформлении. Жирным шрифтом выделены наиболее важные места в тексте. Подчеркнуты фразы или словосочетания, на которые стоит обратить внимание.

Желаем вам успехов!

Часть 1. Типовые примеры ключевых вопросов

1. Чему равны проекции силы $\vec{F}$ на оси координат x и y (рис. 1)?
2. Чему равен алгебраический момент силы $\vec{F}$ относительно точки O (рис. 2)?

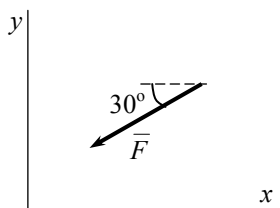


Рис. 1

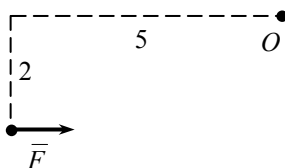


Рис. 2

- 3^{мех.} Произведите перенос силы $\vec{F}$ параллельно самой себе в точку O (рис. 3).

4. Запишите 1-е уравнение равновесия твердого тела: условие равенства нулю суммы проекций сил на ось x (рис. 3).

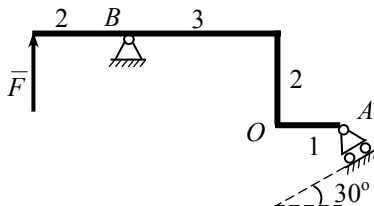


Рис. 3

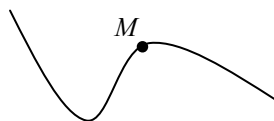


Рис. 4

5. Задано уравнение движения точки $x = 3t^2 + 4t$ м. Определите проекцию скорости v_x при $t = 1$ с.

6. Задано уравнение движения точки $x = 2t^3 - 3$ м. Определите проекцию ускорения a_x при $t = 1$ с.

7. Задана траектория движения точки (рис. 4). Постройте вектор скорости в заданной точке M (два возможных направления).

8. Задано уравнение вращения твердого тела вокруг оси z : $\varphi = -2t^2 - 4$ рад. Определите алгебраическую угловую скорость тела ω_z при $t = 2$ с (рис. 5).

9. Задано уравнение вращения стержня OA вокруг оси z : $\varphi = -2t^2 - 4$ рад (рис. 6). Определите алгебраическое угловое ускорение тела ε_z при $t = 1$ с.

10. Стержень OA вращается вокруг точки O (ось вращения z перпендикулярна плоскости рисунка) (рис. 7). Направления ω_z , ε_z заданы. Постройте векторы скорости, вращательного и центростремительного ускорений в точке A стержня (только направления векторов!).



Рис. 5

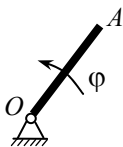


Рис. 6

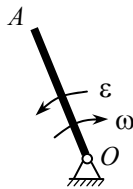


Рис. 7

11. Стержень OA вращается вокруг точки O (ось вращения z перпендикулярна плоскости рисунка) (рис. 7). Заданы длина стержня $OA = 0,3$ м, величина угловой скорости $\omega = 4$ рад/с. Определите величину скорости v_A .

12. Стержень OA вращается вокруг точки O (рис. 7). Заданы длина стержня $OA = 0,2$ м, величины угловой скорости $\omega = 3$ рад/с и углового ускорения $\varepsilon = 10$ рад/с². Определите величины обеих компонент ускорения точки A .

13^{мех}. Точка A шатуна AB в кривошипно-шатунном механизме движется со скоростью $v_A = 5$ м/с (рис. 8). Определите направление и величину скорости $\bar{v}_B$ ползуна B .

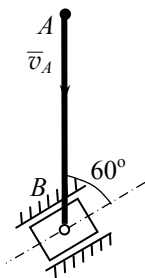


Рис. 8

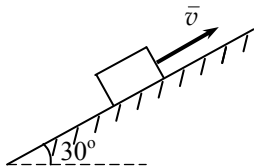


Рис. 9

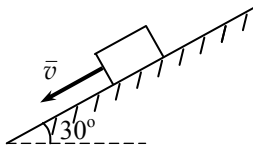


Рис. 10

14. Материальная точка массой m поднимается по плоскости без трения под углом $\alpha = 30^\circ$ под действием силы Q , сонаправленной движению точки (рис. 9). Запишите дифференциальное уравнение движения материальной точки.

15. Материальная точка (масса m произвольна) опускается по плоскости без трения под углом $\alpha = 30^\circ$ лишь под действием силы тяжести (рис. 10). Начальная скорость точки равна $v_0 = 4$ м/с. Найдите скорость точки v_1 в момент времени $t_1 = 3$ с.

16^{мех}. Для определения коэффициента жесткости пружины её растянули, приложив вдоль оси x постоянную силу $P = 80$ Н (рис. 11). При этом длина пружины увеличилась на величину статического отклонения $\delta_{\text{ст}} = 0,02$ м. Чему равен коэффициент жесткости c ?

17^{мех}. Коэффициент жесткости пружины равен $c = 9000$ Н/м (рис. 11). К концу пружины прикреплена материальная точка массой $m = 10$ кг. Определите круговую частоту свободных колебаний k .

18^{мех}. На материальную точку на конце пружины действует периодическая возмущающая сила $Q_x = 10 \sin 15t$ (рис. 11). Определите период вынужденных колебаний точки T_v .

19^{мех}. Круговая частота свободных колебаний материальной точки на пружине равна $k = 40$ рад/с (рис. 11). На материальную точку действует периодическая возмущающая сила $Q_x = 20 \sin 100t$. Наступит ли при этом резонанс?



Рис. 11

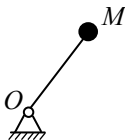


Рис. 12

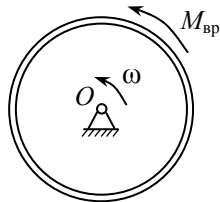


Рис. 13

20^{мех}. Материальная точка M массой $m = 3$ кг находится на конце стержня длиной $OM = 0,5$ м (рис. 12). Вычислите момент инерции точки J_z относительно оси z , проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка.

21^{мех}. Твердое тело, имеющее момент инерции $J_z = 2$ кг·м², вращается вокруг точки O под действием вращающего момента

$M_{\text{вр}} = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (рис. 13). Величина начальной угловой скорости $\omega_0 = 2 \text{ рад/с}$. Определите величину угловой скорости ω_1 после того, как тело повернулось на угол $\varphi = 2\pi \text{ рад}$.

22^{мех}. Твердое тело, имеющее момент инерции $J_z = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, вращается вокруг точки O под действием вращающего момента $M_{\text{вр}} = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (рис. 13, а). Определите угловое ускорение ε_z . б). Задана начальная угловая скорость $\omega_{0z} = 0 \text{ рад/с}$. Определите угловую скорость ω_{1z} через промежуток времени $t_1 = 2 \text{ с}$.

Часть 2. Необходимая теория и решение примеров

Нумерация теоретических пунктов части 2 соответствует нумерации типовых примеров 1–22.

I. СТАТИКА

1. Проекция силы на ось

Определим проекцию силы $\vec{F}_1$ на ось x (рис. 14, а). Эта проекция обозначается F_{1x} . Для этого опустим перпендикуляры из начала и из конца вектора $\vec{F}_1$ на ось x (рис. 14, б). Далее спроецируем направление силы $\vec{F}_1$ на x . Иными словами, надо «положить» $\vec{F}_1$ на x .

Величина проекции равна длине полученного отрезка. Если спроецированное направление совпадает с направлением оси x , то проекция положительная. Если спроецированное направление противоположно направлению оси x , то проекция отрицательная.

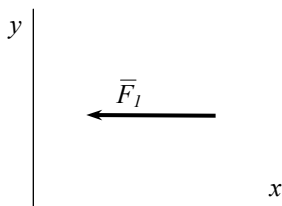


Рис. 14, а

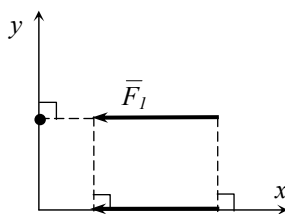


Рис. 14, б

В нашем случае величина проекции на ось x равна величине самой силы F_1 (это видно из рис. 14, б). Спроецированное направление противоположно направлению оси x , поэтому $F_{1x} < 0$. Итак, $F_{1x} = -F_1$.

Определим проекцию силы $\vec{F}_1$ на ось y . Начало и конец вектора в нашем случае спроецируются на ось y в одну и ту же точку. «Длина» точки равна нулю. Поэтому $F_{1y} = 0$.

Теперь более общий случай: сила $\vec{F}_2$ располагается под углом α к оси x (рис. 15, а). Для определения проекций на оси x и y рассмотрим прямоугольный треугольник. Сила $\vec{F}_2$ образует гипотенузу этого треугольника, а проекции на оси x и y – его катеты (рис. 15, б).

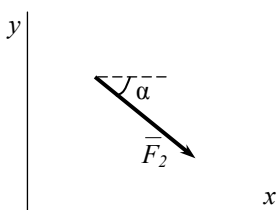


Рис. 15, а

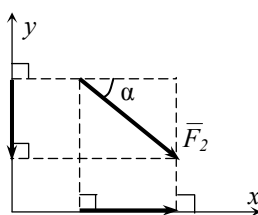


Рис. 15, б

Проекция силы на ось x равна силе, умноженной на косинус α (с учетом знака – см. выше).

Проекция силы на ось y равна силе, умноженной на синус α (с учетом знака – см. выше).

Поэтому в нашем случае $F_{2x} = F_2 \cos \alpha$, $F_{2y} = -F_2 \sin \alpha$.

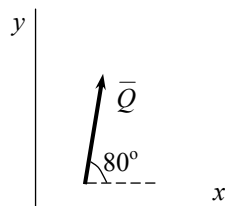
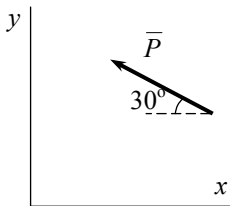
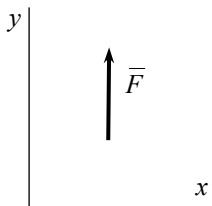


Рис. 16

Рассмотрим ещё примеры (рис. 16). Рекомендуем самим вычислить проекции сил $\vec{F}$, $\vec{R}$, $\vec{Q}$, а лишь потом смотреть ответы.

Для тех, кто вычислил:

$$F_x = 0, \quad F_y = F; \quad P_x = -P \cos 30^\circ, \quad P_y = P \sin 30^\circ;$$

$$Q_x = Q \cos 80^\circ, \quad Q_y = Q \sin 80^\circ.$$

Теперь вы можете решить типовой пример 1 из части 1.

2. Алгебраический момент силы относительно точки

Алгебраический момент силы $\vec{F}$ относительно точки O обозначается $M_O(\vec{F})$ («алгебраический» – т.е. с учетом знака!). Он характеризует вращательный эффект силы $\vec{F}$ вокруг точки O . По определению,

$$M_O(\vec{F}) = \pm F \cdot h,$$

где h – плечо силы. Это длина перпендикуляра, проведенного из точки O на линию действия силы. Момент будет со знаком «плюс», если сила стремится вращать тело вокруг точки O против часовой стрелки. Со знаком «минус» – если сила стремится вращать тело вокруг точки O по часовой стрелке.

Таким образом, **момент силы относительно точки равен произведению силы на плечо с учетом знака.**

Теперь подробно рассмотрим пример (рис. 17). Итак, сначала проведем линию действия силы. Это прямая, которая проходит вдоль силы $\vec{F}_1$. От точки O проведем перпендикуляр на эту прямую. Еще раз подчеркиваем, этот перпендикуляр начинаем откладывать от точки O (а не от силы $\vec{F}_1$)! Длина этого перпендикуляра и есть плечо h . В нашем случае $h = 3$.

Теперь определим знак момента. Можете мысленно закрепить точку O . Теперь «толкаем» тело силой $\vec{F}_1$. Тогда вы увидите, в какую сторону тело «захочет» повернуться вокруг O . Если не совсем ясно, можете мысленно перенести силу вдоль её линии действия. Это поможет определить на-



Рис. 17

правление «вращения». На рис. 17 показано, как определять направление «вращения» силы $\vec{F}_1$ вокруг точки O . Так как «вращение» против часовой стрелки, то знак момента будет «плюс».

Получаем, что момент силы $\vec{F}_1$ относительно точки O равен:

$$M_O(\vec{F}_1) = F_1 \cdot 3.$$

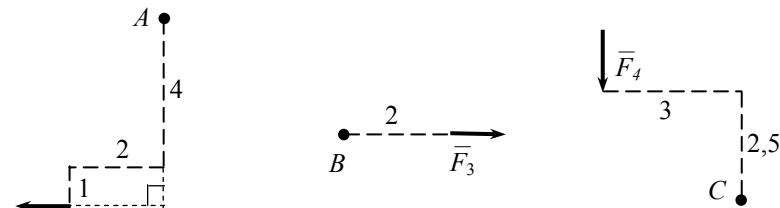


Рис. 18

Рассмотрим ещё примеры (рис. 18). Рекомендуем самим вычислить моменты сил $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, $\vec{F}_4$ относительно указанных точек, а лишь потом смотреть ответы.

Для тех, кто вычислил:

$$M_A(\vec{F}_2) = -F_2 \cdot (1 + 4) = -F_2 \cdot 5, \quad M_B(\vec{F}_3) = F_3 \cdot 0 = 0, \quad M_C(\vec{F}_4) = F_4 \cdot 3.$$

Самый общий случай: сила $\vec{F}$ расположена под углом α к оси x (рис. 19, а). Вначале сила раскладывается на два вектора проекций по правилу параллелограмма: $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ (рис. 19, б). Обратите внимание: векторы $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ прикладываются к той же самой точке, что и сила $\vec{F}$!

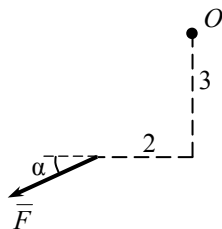


Рис. 19, а

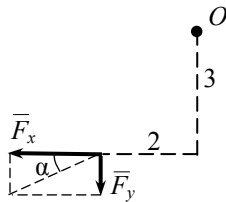


Рис. 19, б

Далее вычисляются моменты каждой из этих двух составляющих. Их сумма дает искомый момент:

$$M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{F}_x) + M_O(\vec{F}_y) = -|F_x| \cdot 3 + |F_y| \cdot 2.$$

Здесь необходимо брать модули проекций $|F_x|$, $|F_y|$! С учетом пункта 1:

$$M_O(\vec{F}) = -F \cos \alpha \cdot 3 + F \sin \alpha \cdot 2.$$

Как видим, знаки слагаемых зависят лишь от направлений «вращений» $\vec{F}_x$, $\vec{F}_y$ вокруг точки O !

Теперь вы можете решить типовой пример 2 из части 1.

Следующий вопрос пригодится студентам механических специальностей (помечен значком «^{мех}»).

3^{мех}. Перенос силы параллельно её линии действия

Пусть $\vec{F}$ – заданная сила, приложенная в некоторой точке твердого тела. Обозначим через $\vec{F}''$ параллельную и равную ей силу, но приложенную в какой-то другой точке O тела.

Сила $\vec{F}$, действующая на твердое тело, может быть перенесена параллельно своей линии действия и приложена к другой точке O этого тела. Но при этом необходимо добавить пару сил с моментом M , равным моменту исходной силы относительно точки переноса, т.е. равным $M_O(\vec{F})$. То есть имеет место эквивалентность:

$$\vec{F} \sim \begin{cases} \vec{F}'', \\ \text{пара сил с моментом } M, \text{ где } M = M_O(\vec{F}). \end{cases}$$

ВНИМАНИЕ! Параллельно переносить силу к другой точке конструкции «просто так» нельзя. Надо добавлять момент!

Дело в том, что исходная сила $\vec{F}$ стремится повернуть тело вокруг точки O . Этот вращательный эффект надо при параллельном переносе компенсировать. Поэтому добавляется пара сил с указанным моментом.

Например, рассмотрим стержневую конструкцию AB на рис. 20, а. Предлагается параллельно перенести силу $\vec{F}$ в точку O . Результат изображен на рис. 20, б. В нашем случае $M = M_O(\vec{F}) = -F \cdot 3$.

Пару сил можно прикладывать в любом месте твердого тела. Направление момента пары сил M соответствует знаку алгебраического момента $M_O(\vec{F})$. Так как это знак «минус», то направление M будет по часовой стрелке (рис. 20, б). Обратите внимание, направление стрелки момента M совпадает с направлением «вращения» $\vec{F}$ вокруг O .

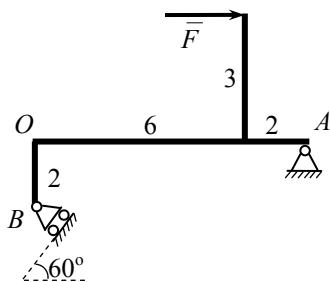


Рис. 20, а

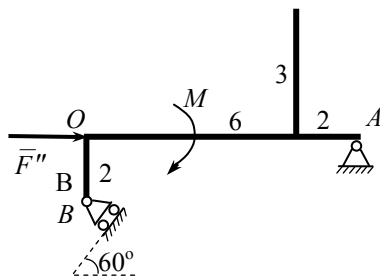


Рис. 20, б

4. Уравнения равновесия плоской системы сил

Как сделать так, чтобы тело было в состоянии покоя (равновесия) под действием системы сил? Самый простой способ – ограничить его перемещение, закрепив тело. Есть различные способы закрепления. Они называются связями.

Для типовых примеров мы ограничимся лишь двумя видами связей: шарнирной опорой и катковой опорой.

1). **Шарнирная опора (неподвижная)** допускает лишь вращение тела вокруг оси, проходящей через шарнир. На рис. 21, а возможное вращение твердого тела вокруг шарнира A обозначено двойной стрелкой. Заметим, что шарнирная опора используется в типовых примерах на вращательное движение 8–12, 20–22.



Рис. 21, а

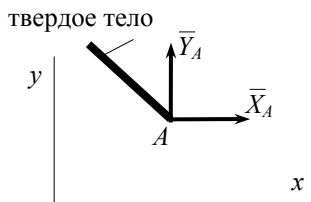


Рис. 21, б

Ясно, что шарнир «запрещает» перемещение A вдоль координатных осей x , y . Теперь мысленно отбросим шарнир A (рис. 21, б). Тогда нужно приложить силы реакции связи, которые удержали бы точку A тела на том же месте. Это будут силы реакции как раз вдоль осей x , y . Итак, **шарнир A имеет две реакции связи – $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$** (в курсе сопромата они обозначаются $\bar{H}_A, \bar{R}_A$ соответственно).

2). **Катковая опора (подвижная шарнирная опора)** допускает вращение тела вокруг шарнира, и также возможно движение вдоль наклонной плоскости под углом α («на колесиках»). На рис. 22, а возможные движения твердого тела обозначены двойными стрелками.



Рис. 22, а



Рис. 22, б

Катковая опора «запрещает» перемещение A перпендикулярно наклонной плоскости. Мысленно отбросим катковую опору A (рис. 22, б). Единственная сила реакции связи будет направлена вдоль этого перпендикуляра. Итак, **катковая опора A имеет одну реакцию связи – $\bar{R}_A$.**

Перед записью уравнений равновесия вы можете нарисовать новый рисунок, на котором связи заменены реакциями связей.

Пусть на твердое тело действует плоская система сил $\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_k, \dots$. **Твердое тело находится в равновесии, если выполняются три уравнения равновесия:**

$$\boxed{\sum_k F_{kx} = 0} \quad (\text{сумма } \underline{\text{проекций}} \text{ всех сил на ось } \underline{x} \text{ равна } 0),$$

$$\boxed{\sum_k F_{ky} = 0} \quad (\text{сумма } \underline{\text{проекций}} \text{ всех сил на ось } \underline{y} \text{ равна } 0),$$

$$\boxed{\sum_k M_O(\bar{F}_k) = 0} \quad (\text{сумма } \underline{\text{алгебраических моментов}} \text{ всех сил относительно любой } \underline{\text{точки } O} \text{ равна } 0).$$

Примеры приложения на практике: определение реакций опор химического аппарата, двигателя или компрессора (рис. на обложке); определение статических реакций подшипников ротора (рис. 24: вал ротора, вид сбоку); уравнивание рычагов, кривошипно-шатунных и других механизмов. Уравнения равновесия – это важная составляющая при расчете самых разных конструкций на прочность в дисциплине «Сопротивление материалов».

Например, запишем все три уравнения равновесия стержневой конструкции AB (рис. 23, а) (в типовых примерах ограничимся самым простым случаем, когда на тело действует только одна сила $\vec{F}$).

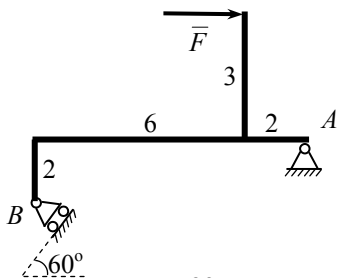


Рис. 23, а

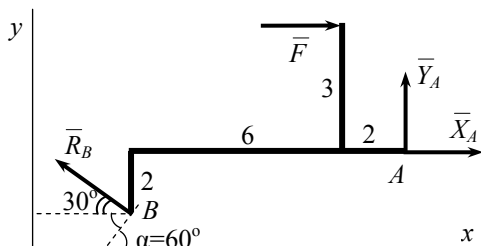


Рис. 23, б

Вначале можно ввести на чертеже направления осей x, y (рис.23, б). Далее надо заменить связи в точках A и B на силы реакций связей. На рис. 23, б заменяем шарнир A реакциями $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$. Катковую опору B заменяем реакцией $\bar{R}_B$. Повторяем, что она направлена под прямым (!) углом к линии, по которой «катаются колесики». Угол между $\bar{R}_B$ и горизонталью x в нашем примере будет $90^\circ - \alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ (в других типовых примерах угол между $\bar{R}_B$ и горизонталью x может получиться другим!). Итак, все силы на рисунке у нас теперь есть.

Чтобы написать уравнения равновесия, нужно уметь записывать проекции и моменты сил. Это мы уже разобрали в пунктах 1, 2. Теперь начинаем писать три уравнения равновесия. Сначала берем проекции каждой силы на ось x . Значения этих проекций указаны в таблице в строке « F_{kx} ». Последовательно их складываем. Получившуюся сумму приравняем к нулю. 1-е уравнение равновесия готово. Аналогично, проецируя все силы на ось y , складывая эти проекции и приравнявая сумму к нулю, получаем 2-е уравнение равновесия.

Таблица

	$\bar{X}_A$	$\bar{Y}_A$	$\bar{R}_B$	$\bar{F}$
F_{kx}	X_A	0	$-R_B \cos 30^\circ$	F
F_{ky}	0	Y_A	$R_B \sin 30^\circ$	0
$M_B(\bar{F}_k)$	$-X_A \cdot 2$	$Y_A \cdot 8$	0	$-F \cdot 5$

Для 3-го уравнения моменты будем вычислять, например, относительно точки B . Эти моменты записаны в таблице в строке « $M_B(\bar{F}_k)$ ». Складывая их и приравнявая сумму к нулю, получаем 3-е уравнение равновесия.

Таблица носит вспомогательный характер, строить её необязательно. Можно обойтись и без неё, сразу записывая уравнения.

Итак, получаем три уравнения равновесия нашей конструкции:

$$\sum_k F_{kx} = X_A - R_B \cos 30^\circ + F = 0,$$

$$\sum_k F_{ky} = Y_A + R_B \sin 30^\circ = 0,$$

$$\sum_k M_B(\bar{F}_k) = -X_A \cdot 2 + Y_A \cdot 8 - F \cdot 5 = 0.$$

Добавим, что если задано значение силы F , то из этой системы уравнений можно определить все три реакции связи X_A , Y_A , R_B .

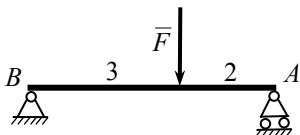


Рис. 24

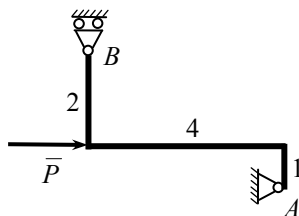


Рис. 25

Рассмотрим ещё примеры (рис. 24, 25). Рекомендуем самим написать по три уравнения равновесия, а лишь потом смотреть ответы. Сумму моментов берите, например, относительно точки A .

Для тех, кто написал: слева записаны три уравнения равновесия для балки на рис. 24, а три уравнения справа – для конструкции на рис.25:

$$\sum_k F_{kx} = X_B = 0,$$

$$\sum_k F_{ky} = Y_B + R_A - F = 0,$$

$$\sum_k M_A(\bar{F}_k) = -Y_B \cdot 5 + F \cdot 2 = 0.$$

$$\sum_k F_{kx} = X_A + P = 0,$$

$$\sum_k F_{ky} = Y_A - R_B = 0,$$

$$\sum_k M_A(\bar{F}_k) = R_B \cdot 4 - P \cdot 1 = 0.$$

В типовых примерах предлагается записать какое-то одно конкретное уравнение из трех уравнений равновесия.

II. КИНЕМАТИКА

5. Скорость точки при координатном и естественном способах задания движения

1). **Скорость точки при координатном способе.** Пусть известен закон движения точки вдоль оси x : $x=f(t)$. По этому закону в каждый момент времени t можно определить координату x . v_x – **проекция скорости на ось x . Она равна первой производной от координаты x :**

$$v_x = \frac{dx}{dt}.$$

Примеры приложения на практике: определение скорости поршня, если задан его закон движения; определение скорости выдвигающейся руки со схватом в механизме робота-манипулятора.

Например, если $x = -5t^2 + 3t$ м, то

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-5t^2 + 3t) = -10t + 3 \text{ м/с.}$$

В момент времени $t = 1$ с: $v_x(1) = -10 \cdot 1 + 3 = -7$ м/с. Т.к. знак «минус», в этот момент времени $\bar{v}_x$ направлен противоположно направлению x .

Добавим, что проекция скорости на ось y вычисляется по аналогичной формуле:

$$v_y = \frac{dy}{dt}.$$

2). **Скорость точки при естественном способе.** Пусть известен закон движения точки по траектории: $s=f(t)$. По этому закону в каждый момент времени t можно определить длину дуги s , которая отсчитывается от начального положения точки. В частности траектория может быть и прямой. v_τ – **алгебраическая скорость точки (или, по-другому, скорость точки с учетом знака, который говорит о направлении движения).** Она **равна первой производной от длины дуги s :**

$$v_\tau = \frac{ds}{dt}.$$

ВНИМАНИЕ! Было бы грубой ошибкой «не глядя» применять «школьную» формулу $v = \frac{s}{t}$. Эта формула имеет серьёзное ограничение: она применяется лишь при равномерном движении, т.е. лишь когда скорость постоянна. В общем же случае надо вычислять производную от s .

Например, если $s = 2t^2 + 3$ м, то

$$v_t = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(2t^2 + 3) = 4t \text{ м/с.}$$

В момент времени $t = 1$ с: $v_t(1) = 4 \cdot 1 = 4$ м/с. Т.к. знак «плюс», то в этот момент времени точка движется по дуге по направлению отсчета длины дуги s .

6. Ускорение точки при координатном способе задания движения

Пусть известен закон движения точки вдоль оси x : $x=f(t)$. По этому закону в каждый момент времени t можно определить координату x . a_x – проекция ускорения на ось x (или, по-другому, ускорение точки вдоль оси x). Она равна второй производной от координаты x , или первой производной от проекции скорости v_x :

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt}.$$

Например, если $x = -5t^2 + 3t$ м, то (используя пример из п.5):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-10t + 3) = -10 \text{ м/с}^2.$$

В момент времени $t = 1$ с: $a_x(1) = -10$ м/с². Т.к. знак «минус», то в этот момент времени $\vec{a}_x$ направлен противоположно направлению x .

7. Направление вектора скорости точки

Вектор скорости $\vec{v}$ точки M всегда направлен по касательной к траектории в этой точке. Возможны два направления (в зависимости от направления движения по траектории). На рис. 26, а приведен пример условия, а на рис. 26, б указан ответ.



Рис. 26, а

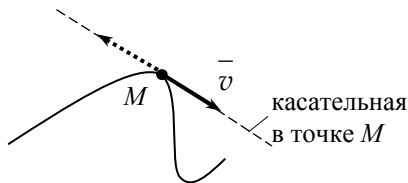


Рис. 26, б

Рассмотрим другое условие. Пусть известны v_x , v_y – проекции скорости на оси x , y в точке M (см. пункт 5). (Траектория может быть и не задана!) Тогда **вектор скорости точки $\vec{v}$ равен сумме векторов проекций скорости $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$** . По **правилу параллелограмма**:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y.$$

Здесь векторы $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$ откладываются от точки M вдоль оси x и вдоль оси y , соответственно. Если проекция v_x **положительна**, то направление вектора проекции $\vec{v}_x$ **совпадает с направлением оси x** . Если проекция v_x **отрицательна**, то направление вектора проекции $\vec{v}_x$ **противоположно направлению оси x** .

Перед тем, как откладывать, для скоростей вводим свой масштаб на графике. Строится прямоугольник со сторонами, образованными векторами $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$. Тогда вектор $\vec{v}$ будет на диагонали этого прямоугольника.

Пример приложения на практике: определение поля скоростей при течении жидкости в химическом аппарате.

Например, задана точка M , для которой известны проекции скорости $v_x = -10$ м/с, $v_y = 15$ м/с (рис. 27, а). Предлагается построить вектор скорости $\vec{v}$.

Так как $v_x < 0$, то вектор $\vec{v}_x$ направлен противоположно оси x . Скорости откладываем от точки M в соответствии с новым масштабом. Полагаем, например, что длина одной тетрадной клетки соответствует 5 м/с. Так как $v_x = -10$ м/с, то от точки M откладываем 2 клетки влево (на рис. 27, б это отмечено поперечными черточками). Там будет конец вектора $\vec{v}_x$. Так как $v_y > 0$, то вектор $\vec{v}_y$ откладываем вверх по оси y в соответствии с масштабом на 3 клетки. Далее пунктиром строим прямоугольник. Вдоль его диагонали и будет направлен вектор скорости $\vec{v}$.

Так как траектория точки в данном случае известна, то можно сделать проверку. Убедимся, что $\vec{v}$ направлен по касательной к траектории. На рис. 27, б это действительно так.

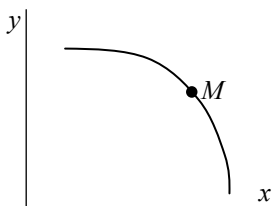


Рис. 27, а

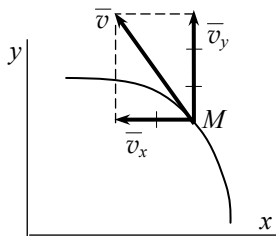


Рис. 27, б

Добавим, что если известны a_x , a_y – проекции ускорения на оси x и y , то вектор ускорения $\vec{a}$ строится аналогично выше изложенному. Единственное отличие: вектор $\vec{a}$ направлен в сторону вогнутости траектории (на рис. 27, а область вогнутости – ниже и левее от траектории).

8. Угловая скорость твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси

Пусть известно уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z : $\varphi = f(t)$. По этому закону в каждый момент времени t можно определить угол поворота φ . ω_z – алгебраическая угловая скорость твердого тела («алгебраическая» – т.е. с учетом знака!). Она равна первой производной от угла поворота φ :

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}.$$

ВНИМАНИЕ! Было бы грубой ошибкой «не глядя» применять «школьную» формулу $\omega = \frac{\varphi}{t}$. Эта формула имеет серьезное ограничение: она применяется лишь при равномерном вращении, т.е. лишь когда угловая скорость постоянна. В общем же случае надо вычислять производную от φ .

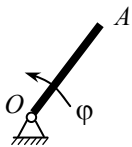


Рис. 28, а

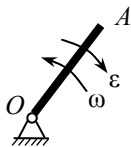


Рис. 28, б

Например, задано уравнение вращения стержня (кривошипа) OA (рис.28, а): $\varphi = -2t^2 + 7t$ рад.

Примечание. На рис. 28 показана «плоская картинка». Ось z проходит перпендикулярно плоскости рисунка через точку O . Поэтому можно также

говорить о вращении твердого тела вокруг точки O и букву « z » на рисунке не указывать.

Угловая скорость тела равна:

$$\omega_z = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(-2t^2 + 7t) = -4t + 7 \text{ рад/с.}$$

В момент времени $t = 1$ с: $\omega_z(1) = -4 \cdot 1 + 7 = 3$ рад/с. Т.к. знак «плюс», то в этот момент времени тело вращается вокруг оси z против часовой стрелки. Это направление указано на рис. 28, б.

9. Угловое ускорение твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси

Пусть известно уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z : $\varphi = f(t)$. ε_z – алгебраическое угловое ускорение твердого тела. Оно равно второй производной от угла поворота φ или первой производной от угловой скорости ω_z :

$$\varepsilon_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega_z}{dt}.$$

Например, если задано уравнение вращения стержня OA (рис. 28, а): $\varphi = -2t^2 + 7t$ рад, то угловое ускорение тела равно (используя пример из п.8):

$$\varepsilon_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{d}{dt}(-4t + 7) = -4 \text{ рад/с}^2.$$

В момент времени $t = 1$ с: $\varepsilon_z(1) = -4$ рад/с². Т.к. знак «минус», то в этот момент времени тело ускоряется вокруг оси z по часовой стрелки. Это направление указано на рис. 28, б.

10. Направления векторов скорости и ускорения точки при вращении тела вокруг неподвижной оси

Пусть задано твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Пусть также заданы 2 направления: угловой скорости ω и углового ускорения ε . Рис. 29, а можно рассматривать как пример такого условия. Предлагается построить направление вектора скорости точки A – вектора $\vec{v}_A$, а также направление вектора ускорения точки A – вектора $\vec{a}_A$.

Сначала обязательно постройте траекторию точки A ! Для вращательного движения это всегда окружность с центром на оси вращения, т.е. в точке O . На рис.29,б траектория изображена пунктиром. Скорость $\vec{v}_A$ должна быть направлена по касательной к траектории (см. пункт 7), т.е. под прямым углом к радиусу OA . В каком из двух возможных направлений? **Скорость точки направлена в соответствии с направлением угловой скорости.** Т.е. куда направлена ω , туда и направлен вектор $\vec{v}_A$. Это и указано на рис. 29,б.

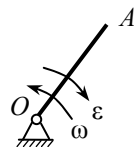


Рис. 29, а

Строятся **две (!) компоненты ускорения** точки A – **вращательное** ускорение $\vec{a}_A^{\text{вр}}$ (по-другому, **касательное** ускорение $\vec{a}_A^{\tau}$) и **центростремительное** ускорение $\vec{a}_A^{\text{ц}}$ (по-другому, **нормальное** ускорение $\vec{a}_A^n$).

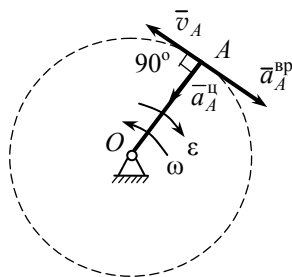


Рис. 29, б

Вращательное ускорение $\vec{a}_A^{\text{вр}}$ направляется по касательной к траектории. В каком из двух возможных направлений? **Вращательное (касательное) ускорение точки направлено в соответствии с направлением углового ускорения.** Т.е. куда направлено ε , туда и направлен вектор $\vec{a}_A^{\text{вр}}$ (рис. 29, б).

Направления $\vec{v}_A$ и $\vec{a}_A^{\text{вр}}$ одинаковы при ускоренном вращении, когда одинаковы направления ω и ε . Направления $\vec{v}_A$ и $\vec{a}_A^{\text{вр}}$ противоположны при замедленном вращении, когда ω и ε противоположны.

Центростремительное (нормальное) ускорение $\vec{a}_A^{\text{ц}}$ всегда направлено к оси вращения, т.е. в сторону точки O (рис. 29, б). Отметим, что векторы $\vec{a}_A^{\text{вр}}$ и $\vec{a}_A^{\text{ц}}$ перпендикулярны друг другу.

Все примеры с вращающимся стержнем очень важны для курса «Теория машин и механизмов». Пожалуйста, обратите на них внимание.

11. Величина скорости точки при вращении тела вокруг неподвижной оси

Пусть задан модуль угловой скорости ω . Необходимо также знать расстояние от точки A до неподвижной оси вращения. Здесь и далее это расстояние обозначается через h (пожалуйста, не путайте с «высотой»!). В наших примерах $h=OA$.

ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА КИНЕМАТИКИ: скорость точки твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, v равна произведению расстояния от точки до оси вращения h на модуль угловой скорости ω :

$$v = h\omega,$$

где $\omega = |\omega_z|$. Формула простая и понятная. Ведь чем быстрее вращается тело, тем больше скорость точки. И чем дальше удалена точка от неподвижной оси вращения, тем опять-таки больше скорость точки.

Примеры приложения на практике: определение скоростей для роторов – вращающихся частей различных механизмов (например, для редукторов, для кривошипов в кривошипно-шатунных механизмах и т.д.).

Пусть в примере на рис. 29, а задано, что $OA=0,5$ м, а модуль угловой скорости равен $\omega = 3$ рад/с. Тогда:

$$v_A = OA \cdot \omega = 0,5 \cdot 3 = 1,5 \text{ м/с.}$$

12. Величины ускорений точки при вращении тела вокруг неподвижной оси

Пусть заданы модуль угловой скорости ω и модуль углового ускорения $\varepsilon = |\varepsilon_z|$, а также расстояние от точки A до оси вращения $h=OA$.

ВНИМАНИЕ! Величина вращательного (касательного) ускорения точки $a_{\text{вр}}$ пропорциональна модулю углового ускорения ε :

$$a_{\text{вр}} = h\varepsilon.$$

Величина центростремительного (нормального) ускорения точки $a_{ц}$ пропорциональна квадрату угловой скорости ω^2 :

$$a_{ц} = h\omega^2.$$

Примеры приложения на практике: эти формулы нужны при вычислении ускорения ползуна (поршня) в кривошипно-шатунном механизме (см. пункт 13); при вычислении динамических реакций подшипников ротора.

Пусть в примере на рис. 29, а задано, что $OA=0,5$ м, модуль угловой скорости равен $\omega=3$ рад/с, модуль углового ускорения $\varepsilon=4$ рад/с². Тогда:

$$a_A^{bp} = OA \cdot \varepsilon = 0,5 \cdot 4 = 2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_A^{ц} = OA \cdot \omega^2 = 0,5 \cdot 3^2 = 4,5 \text{ м/с}^2.$$

Видно, что здесь центростремительное ускорение играет важную роль.

Отметим еще раз нюанс: угловое ускорение берется по модулю. В условиях примера из пункта 9: $\varepsilon = |\varepsilon_z| = |-4| = 4$ рад/с².

Следующий пункт обозначен пометкой «^{мех}» и ориентирован больше на механиков. (Однако этот материал может излагаться и технологам. Поэтому пометка «^{мех}» здесь довольно условна.)

13^{мех}. Скорости точек при плоском движении твердого тела (теорема о проекциях скоростей)

Рассмотрим самый простой (хотя и не универсальный) метод определения скоростей точек при плоском движении твердого тела.

Теорема о проекциях скоростей: проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны друг другу:

$$v_{Bx} = v_{Ax},$$

где x – ось, проходящая через точки A и B твердого тела, v_{Bx} – проекция вектора $\vec{v}_B$ на ось x , v_{Ax} – проекция вектора $\vec{v}_A$ на ось x .

На рис. 30, а дано графическое условие задачи, а на рис. 30, б сделаны необходимые построения. Теорема сводится к виду:

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha.$$

Подобные примеры можно решать также с помощью мгновенного центра скоростей (МЦС). Однако изложенный здесь метод более прост. Ограничения в применении метода: если оба вектора $\vec{v}_B$, $\vec{v}_A$ перпендикулярны линии AB , то теорема дает $0 = 0$ и v_B не определяется.

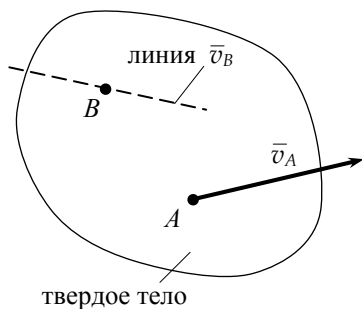


Рис. 30, а

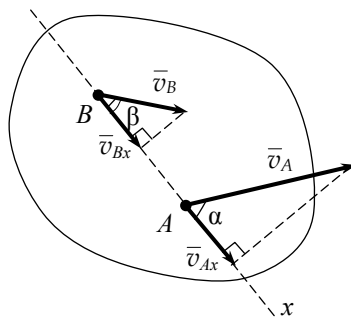


Рис.30, б

Примеры приложения на практике: определение скорости поршня в двигателе внутреннего сгорания или в поршневом компрессоре; определение скорости иглы в швейной машине. (Во всех этих случаях применяется кривошипно-шатунный механизм OAB или его аналоги. По ω_{OA} вначале определяется $\vec{v}_A$ (см. пункты 10, 11), а затем уже $\vec{v}_B$.)

Например, рассматривается шатун AB , к которому шарнирно прикреплен ползун (поршень) B (рис. 31, а). Заданы направление $\vec{v}_A$ и величина скорости $v_A = 3$ м/с. Нужно найти направление и величину $\vec{v}_B$.

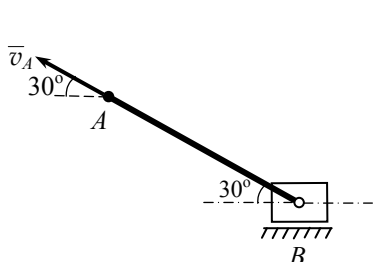


Рис. 31, а

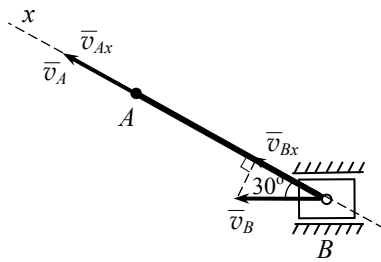


Рис. 31, б

Отмечаем, что шатун AB совершает плоское движение!

1). Проводим прямую AB (достаточно длинную). На рис. 31, б она указана пунктиром. Вдоль прямой AB направляем ось x .

2). Проецируем вектор $\vec{v}_A$ на ось x . Получается вектор проекции скорости $\vec{v}_{Ax}$ (в нашем примере этот вектор случайно совпал с $\vec{v}_A$).

3). Откладываем от точки B вектор проекции скорости $\vec{v}_{Bx}$: по нашей теореме он равен вектору $\vec{v}_{Ax}$.

4). Как построить направление $\vec{v}_B$? **Скорость $\vec{v}_B$ ползуна B всегда направлена вдоль траектории ползуна – вдоль двух ограничивающих плоскостей** (на рис. 31, а эта траектория указана пунктиром с точками). У ползуна B есть два возможных направления движения! **Обратите внимание, направления векторов $\vec{v}_{Bx}$ и $\vec{v}_B$ должны быть согласованы друг с другом! Проецируя $\vec{v}_B$ на x , мы должны «попасть» на $\vec{v}_{Bx}$ (ранее построенный). Если это не так, то $\vec{v}_B$ надо направить в противоположную сторону!**

В нашем примере $\vec{v}_{Bx}$ и $\vec{v}_B$ будут согласованы друг с другом, если $\vec{v}_B$ направить влево (этого согласования не будет, если $\vec{v}_B$ ошибочно направить вправо). Итак, $\vec{v}_B$ направлен влево.

5). **Проекция скорости вычисляются как проекции сил в пункте 1. Знаки проекций v_{Bx}, v_{Ax} должны получиться одинаковыми!** (Если они получились разными, то $\vec{v}_B$ был направлен неверно.)

В примерах могут понадобиться простейшие построения углов (учет $30^\circ = 90^\circ - 60^\circ$ и т.д.). Нужно помнить: $\cos 30^\circ \approx 0,87, \cos 60^\circ = 0,5$.

По нашей теореме:

$$v_{Bx} = v_{Ax}, \text{ т.е. } v_B \cos 30^\circ = v_A,$$

$$v_B \cdot 0,87 = 3, \text{ откуда } v_B \approx 3,46 \text{ м/с.}$$

В примерах на рис. 32, 33 задано: $v_A = 10$ м/с. Рекомендуем самим

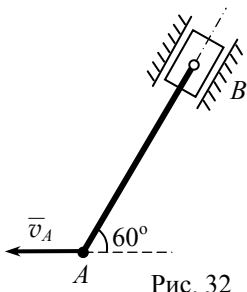


Рис. 32

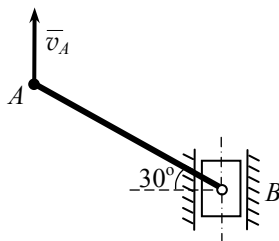


Рис. 33

определить направления и величины $\bar{v}_B$, а лишь потом смотреть ответы.

Для тех, кто написал: для рис. 32: $v_B = v_A \cos 60^\circ$, $\bar{v}_B$ направлен вниз вдоль AB , $v_B = 5$ м/с; для рис. 33: $v_B \cos 60^\circ = v_A \cos 60^\circ$, $\bar{v}_B$ направлен вертикально вверх, $v_B = 10$ м/с.

III. ДИНАМИКА

14. Дифференциальное уравнение движения материальной точки

Это уравнение следует из 2-го закона Ньютона $m\bar{a} = \bar{F}$. В примерах рассматривается случай, когда материальная точка движется прямолинейно вдоль оси x . В этом случае получаем дифференциальное урав-

нение движения в проекции на ось x : $m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x$ или в другом виде:

$$m \frac{dv_x}{dt} = \sum_k F_{kx}.$$

Здесь m – масса точки, v_x – проекция скорости на ось x , $F_x = \sum_k F_{kx}$ – сумма проекций на ось x всех сил $\bar{F}_k$, действующих на материальную точку. Эта сумма будет выглядеть по-разному в зависимости от условия примера! Самое главное – правильно её записать!

Примеры приложения на практике: описание движения поршня под действием сил в двигателе внутреннего сгорания, поршневом компрессоре или вакуумной установке; описание движения тела в жидкой среде при воздействии силы сопротивления среды.

Рассмотрим типовой пример. Пусть материальная точка M опускается по наклонной плоскости под углом α . Будем считать поверхность шероховатой, т.е. трение учитывается (рис. 34, а). Предлагается записать дифференциальное уравнение движения точки.

При решении вначале необходимо здать направление оси x . Лучше его взять совпадающим с направлением движения материальной точки, т.е. по направлению $\bar{v}$ (рис. 34, б).

Укажем теперь все силы, действующие на материальную точку M .

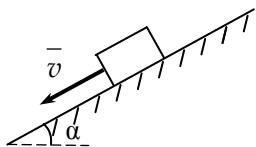


Рис. 34, а

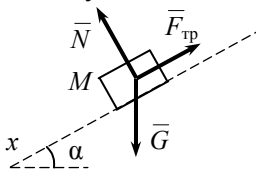


Рис. 34, б

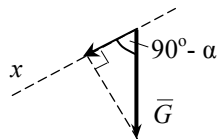


Рис. 34, в

Всегда надо учитывать силу тяжести $\vec{G}$. Она всегда направлена вертикально вниз (рис. 34, б). Так как в данном примере говорится о трении, то надо учитывать и силу трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. Она всегда направлена против движения точки. Со стороны поверхности действует сила нормальной реакции $\vec{N}$. Она не дает материальной точке «провалиться» вниз. Поэтому она направлена вверх под прямым углом к поверхности.

В нашем примере сумма проекций сил на ось x равна $\sum_k F_{kx} = G_x + F_{\text{тр},x} + N_x$. Получаем дифференциальное уравнение:

$$m \frac{dv_x}{dt} = G_x + F_{\text{тр},x} + N_x,$$

Угол между силой $\vec{G}$ и осью x составляет $90^\circ - \alpha$ (см. рис. 34, в). Используя пункт 1, получаем: $G_x = G \cdot \cos(90^\circ - \alpha)$, $F_{\text{тр},x} = -F_{\text{тр}}$, $N_x = 0$ (см. рис. 34, б).

После подстановок записываем дифференциальное уравнение движения материальной точки в окончательном виде для нашей задачи:

$$m \frac{dv_x}{dt} = G \cdot \cos(90^\circ - \alpha) - F_{\text{тр}}.$$

Здесь при желании можно учесть, что $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$.

Отметим, что после интегрирования уравнения движения устанавливается зависимость скорости точки от времени: $v_x = v_x(t)$, а после повторного интегрирования – закон движения $x = x(t)$.

15. Теорема об изменении количества движения материальной точки

Эта теорема получается сразу после интегрирования дифференциального уравнения движения точки. Теорема имеет общий вид:

$$m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \sum_k \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt.$$

Здесь $m\bar{v}$ – вектор количества движения точки.

Если $\sum_k F_{kx}$ является константой (!), то теорема в этом частном случае в проекции на ось x имеет вид:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum_k F_{kx} \cdot t_1,$$

где v_{1x} , v_{0x} – проекции скорости на ось x в момент времени t_1 и в начальный момент времени $t_0 = 0$, соответственно. t_1 – время движения материальной точки. Здесь сумма проекций всех сил $\sum_k F_{kx}$ вычисляется в каждом конкретном примере как в пункте 14.

Например, материальная точка массой $m = 2$ кг поднимается по гладкой (т.е. без трения) поверхности под углом $\alpha = 30^\circ$ под действием силы $Q = 15$ Н, сонаправленной движению (рис. 35, а). Начальная скорость точки $v_0 = 3$ м/с. Какова будет скорость точки v_1 в момент времени $t_1 = 4$ с?

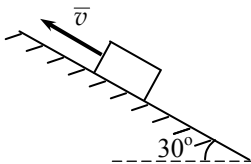


Рис. 35, а

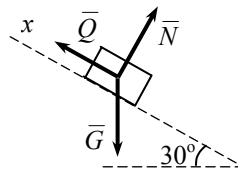


Рис. 35, б

Изобразим все силы (рис. 35, б). Можно отдельно записать сумму проекций сил на ось x : $\sum_k F_{kx} = Q - G \cos 60^\circ$. Учтем, что $G = mg$, где $g = 9,8 \approx 10$ Н/кг. Также $\cos 60^\circ = 0,5$. Важный нюанс: так как скорости направлены вдоль оси x , то v_x будет положительным, а значит вместо v_x здесь можно писать модуль скорости v . Подставляем в теорему:

$$mv_{1x} - mv_{0x} = (Q - mg \cos 60^\circ) \cdot t_1,$$

$$2 \cdot v_1 - 2 \cdot 3 = (15 - 2 \cdot 9,8 \cdot 0,5) \cdot 4, \text{ откуда } v_1 \approx 13 \text{ м/с.}$$

Все последующие темы являются ключевыми для механических специальностей. Вначале разберем четыре вопроса из теории колебаний – важного самостоятельного раздела теоретической механики. Колебания (вибрации) могут достигать значений, опасных для прочности и функционирования конструкций. Чем лучше вы будете знать теорию колебаний, тем дольше прослужит ваша техника.

16^{мех}. Коэффициент жесткости

Рассматривается материальная точка M , прикрепленная к концу пружины. c – **коэффициент жесткости** пружины. Проведем эксперимент. Приложим к пружине постоянную силу $\bar{P}$. При этом конец пружины отклонится на некоторое расстояние – **статическое отклонение** $\delta_{\text{ст}}$ (рис.36).

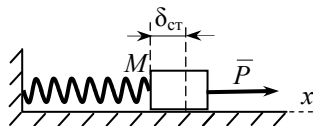


Рис. 36

Для определения коэффициента жесткости c надо разделить величину постоянной силы P на статическое отклонение $\delta_{\text{ст}}$:

$$c = \frac{P}{\delta_{\text{ст}}}$$

Например, при растяжении пружины силой $P = 80$ Н замерили статическое отклонение: $\delta_{\text{ст}} = 0,02$ м. Тогда коэффициент жесткости равен:

$$c = \frac{P}{\delta_{\text{ст}}} = \frac{80}{0,02} = 4000 \text{ Н/м.}$$

Дополнение для случая вертикальной (!) пружины (рис. 37). Здесь сила тяжести $G = mg$ направлена вдоль пружины и поэтому выбирается в качестве силы P . При решении типовых примеров можно считать, что $g = 9,8 \approx 10$ Н/кг.

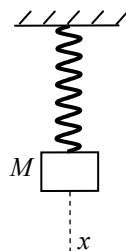


Рис. 37

Пример из практики: двигатель или компрессор крепится к опорам, упруго прогибающимся под его весом.

Например, под грузом твердого тела заданной массой $m = 30$ кг пружина растянулась на $\delta_{\text{ст}} = 0,01$ м. Предлагается определить c .

Вначале определяем силу: $P = mg = 30 \cdot 9,8 \approx 300$ Н. Тогда

$$c = \frac{P}{\delta_{\text{ст}}} = \frac{300}{0,01} = 30000 \text{ Н/м.}$$

17^{мех}. Круговая частота и период свободных колебаний материальной точки

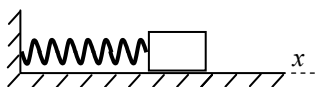


Рис. 38

При выводе пружины из недеформированного состояния на материальную точку действует восстанавливающая сила упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$. $F_{\text{упр}, x} = -cx$ (знак проекции силы и знак координаты x противоположны!). Свободные колебания происходят лишь под действием $\vec{F}_{\text{упр}}$. Дифференциальное уравнение свободных колебаний материальной точки (с учетом $G_x = N_x = 0$ для рис. 38):

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_{\text{упр}, x} \quad \text{или} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx.$$

(Если на точку действует еще постоянная сила P , то дифференциальное уравнение можно преобразовать к аналогичному виду!)

Его решение:

$$x = A \sin(kt + \gamma),$$

где A – амплитуда свободных колебаний, γ – начальная фаза. k – **круговая частота свободных колебаний**. Она равна квадратному корню из отношения коэффициента жесткости к массе точки:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Размерность k будет рад/с, k еще называют угловой частотой.

Период колебаний – это время движения точки при одном полном колебании (из крайнего (!) положения «туда и обратно»).

Период свободных колебаний T обратно пропорционален круговой частоте свободных колебаний k (с коэффициентом 2π):

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Пример из практики: колебания твердого тела на упругих опорах. (Как известно из «сопротивления материалов», все металлические балки и пластины имеют свойства упругости и являются аналогами пружины.)

Например, заданы коэффициент жесткости $c = 128$ Н/м и масса материальной точки $m = 2$ кг. Тогда круговая частота и период свободных колебаний равны:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{128}{2}} = \sqrt{64} = 8 \text{ рад/с.}$$

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{2 \cdot 3,14}{8} = 0,785 \text{ с.}$$

18^{мех}. Круговая частота и период вынужденных колебаний материальной точки

На материальную точку кроме $\bar{F}_{\text{упр}}$ может действовать периодическая возмущающая сила $\bar{Q}$ с проекцией на ось x :

$$Q_x = Q_0 \sin pt.$$

Здесь Q_0 – максимальное значение возмущающей силы, p – частота возмущающей силы.

Пример из практики: центробежная сила инерции ротора при малом отклонении центра тяжести ротора от оси вращения (т.е. при дисбалансе).

Сила $\bar{Q}$ вызывает вынужденные колебания материальной точки. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний материальной точки (при отсутствии силы сопротивления) (рис. 38):

$$m \frac{dv_x}{dt} = F_{\text{упр}, x} + Q_x \quad \text{или} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx + Q_0 \sin pt.$$

(Если на точку действует еще постоянная сила P , то дифференциальное уравнение можно преобразовать к аналогичному виду!)

Его решение при $p \neq k$:

$$x = A \sin(kt + \gamma) + B \sin pt,$$

где B – амплитуда вынужденных колебаний. p – круговая частота вынужденных колебаний.

ВНИМАНИЕ! Круговая частота вынужденных колебаний совпадает с частотой возмущающей силы: обе эти частоты равны p ! Поэтому если задано выражение для Q_x (см. формулу в рамке в начале пункта), то значение p берется из него.

Период вынужденных колебаний T_B обратно пропорционален круговой частоте вынужденных колебаний p (с коэффициентом 2π):

$$T_B = \frac{2\pi}{p}.$$

Например, на материальную точку, прикрепленную к пружине, действует возмущающая сила $Q_x = 200 \sin 40t$ (рис. 38). Тогда круговая частота и период вынужденных колебаний равны:

$$p = 40 \text{ рад/с},$$

$$T_B = \frac{2\pi}{p} \approx \frac{2 \cdot 3,14}{40} = 0,157 \text{ с}.$$

19^{мех}. Условие резонанса и подбор частот

Резонанс – явление возрастания амплитуд вынужденных колебаний с течением времени.

При отсутствии сопротивления резонанс наступает при совпадении круговой частоты вынужденных колебаний p с круговой частотой свободных колебаний k :

$$\begin{array}{ll} \text{при } p = k & - \text{резонанс}, \\ \text{при } p \neq k & - \text{нет резонанса.} \end{array}$$

Эквивалентное условие: резонанс наступает при совпадении периода вынужденных колебаний T_B с периодом свободных колебаний T :

$$\begin{array}{ll} \text{при } T_B = T & - \text{резонанс}, \\ \text{при } T_B \neq T & - \text{нет резонанса.} \end{array}$$

Как на практике подбирать частоту p ? Резонанс угрожает прочности и функционированию конструкции. Поэтому крайне нежелательно, если $p = k$ или $p \approx k$ (тогда амплитуда B велика). Оптимально, если p намного больше k : $p \gg k$ (тогда амплитуда B близка к нулю).

Пример приложения на практике: подбор частот k и p при вынужденных колебаниях двигателя или компрессора на упругой опоре (при отклонении центра тяжести ротора от оси вращения) (рис. на обложке).

Например, на материальную точку, прикрепленную к пружине, действует возмущающая сила $Q_x = 80 \sin pt$ (рис. 38). Задана круговая частота свободных колебаний $k = 10$ рад/с. Предлагается выяснить, когда будет резонанс, и оптимально подобрать частоту возмущающей силы p .

Резонанс наступит, если $p = k = 10$ рад/с. Резонанса не будет, если, к примеру, $p = 30$ рад/с или $p = 50$ рад/с (это приемлемые значения p).

Переходим к ключевым вопросам динамики твердого тела.

20^{мех}. Моменты инерции твердых тел

Момент инерции твердого тела относительно оси z определяется по общей формуле:

$$J_z = \sum_k m_k h_k^2.$$

Здесь m_k – масса точки M_k твердого тела, $k = 1, 2, \dots$; h_k – расстояние от точки M_k до оси z (рис. 39). Отметим, что момент инерции J_z зависит лишь от геометрии тела и от распределения массы внутри тела. Т.е. J_z для каждого твердого тела – свой собственный (значение J_z относительно оси, проходящей через центр тяжести тела, берется из справочника). Чем больше массы точек тела и чем удаленнее точки тела от оси z , тем больше момент инерции J_z .

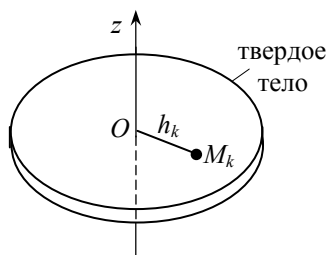


Рис. 39

Из общей формулы сразу получаем значение момента инерции для материальной точки (в сумме останется лишь одно слагаемое):

$$J_z = mh^2.$$

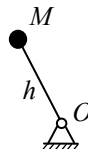


Рис. 40

Для примера рассмотрим материальную точку M массой $m = 4$ кг на конце стержня длиной $OM = 0,3$ м (рис. 40). Вы-

числим момент инерции точки M относительно оси z , проходящей через точку O перпендикулярно рисунку.

Ось z нарисовать в данном случае невозможно. Она перпендикулярна плоскости рисунка, т.е. направлена «на нас». Очевидно, что расстояние от точки M до оси z будет равно расстоянию от M до O . Т.е. $h = OM = 0,3$ м. Поэтому:

$$J_z = mh^2 = 4 \cdot 0,3^2 = 0,36 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Размерность J_z будет $\text{кг} \cdot \text{м}^2$. Это следует из определения момента инерции.

Далее рассмотрим две важные задачи динамики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Эти задачи будут востребованы в курсе «Теория машин и механизмов».

21^{мех}. Теорема об изменении кинетической энергии твердого тела (при вращении вокруг неподвижной оси)

Теорема об изменении кинетической энергии твердого тела имеет общий вид:

$$T_1 - T_0 = \sum_k A_k^{(e)}.$$

Здесь T_1, T_0 – кинетическая энергия в конечном и начальном положении твердого тела, $\sum_k A_k^{(e)}$ – сумма работ внешних сил.

Рассмотрим лишь один очень важный случай применения этой теоремы: вращение твердого тела вокруг неподвижной оси под действием вращающего момента.

Кинетическая энергия вращающегося тела равна: $T = \frac{1}{2} J_z \omega^2$, где

J_z – момент инерции тела относительно неподвижной оси вращения z (см. пункт 20), ω – величина угловой скорости.

Пусть на тело действует пара сил с вращающим моментом $M_{\text{вр}}$. Пусть тело под его действием повернулось вокруг оси z на угол поворота φ , где $\varphi = \varphi_{\text{поворота}} = \varphi_1 - \varphi_0$. Если $M_{\text{вр}} = \text{const}$, то работа вращающего момента равна: $A_{\text{вр}} = M_{\text{вр}} \cdot \varphi$. Если центр тяжести ротора находится на оси вращения и неподвижен, то работа силы тяжести равна нулю.

Обозначим: ω_1 – величина угловой скорости после поворота на угол φ ; ω_0 – величина начальной угловой скорости.

После подстановок получаем теорему в виде, который можно использовать для решения примеров:

$$\boxed{\frac{1}{2} J_z \omega_1^2 - \frac{1}{2} J_z \omega_0^2 = M_{\text{вр}} \cdot \varphi.}$$

Словесная формулировка: изменение кинетической энергии вращающегося вокруг неподвижной оси твердого тела равно работе вращающего момента.

ВНИМАНИЕ! Теорема устанавливает связь между угловой скоростью ω и углом поворота φ (т.е. между «скоростью» и «перемещением»). Время здесь вообще не фигурирует (если оно будет в условии примера, то см. пункт 22)!

Пример приложения на практике: определение угловой скорости ротора в двигателе или центробежном компрессоре (рис. на обложке).

Например, пусть твердое тело с моментом инерции $J_z = 4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, вращается под действием вращающего момента $M_{\text{вр}} = 2 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (рис. 41). Начальная угловая скорость равна $\omega_0 = 3 \text{ рад/с}$. Предлагается определить угол поворота φ , после того как угловая скорость достигла величины $\omega_1 = 5 \text{ рад/с}$.

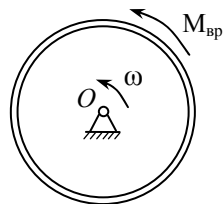


Рис. 41

Решение в одну строку:

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3^2 = 2 \cdot \varphi, \text{ откуда } \varphi = 16 \text{ рад.}$$

Можно также найти число оборотов n из формулы $\varphi = 2\pi \cdot n$, откуда $n = \varphi / (2\pi)$. В нашем случае $n = 16 / (2\pi) \approx 2,55$ оборота.

22^{мех}. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Это уравнение следует из теоремы об изменении кинетического момента системы. Оно имеет вид:

$$J_z \frac{d\omega_z}{dt} = \sum_k M_z(\bar{F}_k^{(e)}) \quad \text{или} \quad J_z \varepsilon_z = \sum_k M_z(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Здесь J_z – момент инерции твердого тела относительно неподвижной оси вращения z ; ω_z , ε_z – алгебраические угловая скорость и угловое ускорение; $\sum_k M_z(\bar{F}_k^{(e)})$ – сумма моментов относительно оси z внешних сил, приложенных к телу.

Пусть на тело действует пара сил с вращающим моментом $M_{вр}$.

Если центр тяжести тела находится на оси вращения z , то момент силы тяжести относительно z равен нулю.

Тогда получаем **уравнение в виде, который можно использовать для решения примеров:**

$$J_z \varepsilon_z = M_{вр}.$$

Словесная формулировка: угловое ускорение вращающегося вокруг неподвижной оси твердого тела пропорционально вращающему моменту.

Если $M_{вр}$ постоянный, то $\varepsilon_z = const$, т.е. вращение равнопеременное. Интегрируем по времени формулу $\frac{d\omega_z}{dt} = \varepsilon_z$ и получаем:

$$\omega_{1z} - \omega_{0z} = \varepsilon_z t_1,$$

где ω_{1z} , ω_{0z} – алгебраические угловые скорости в момент времени t_1 и в начальный момент времени $t_0 = 0$, соответственно. Алгебраическое угловое ускорение ε_z подставляется сюда из записанного выше дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

ВНИМАНИЕ! Дифференциальное уравнение вращения устанавливает связь между угловой скоростью ω_z и временем t (в отличие от пункта 21).

Пример приложения на практике: определение угловой скорости ротора в двигателе или центробежном компрессоре (рис. на обложке).

Например, пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси z , проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка

(рис. 42). Момент инерции тела равен $J_z = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. На тело действует постоянный вращающий момент $M_{\text{вр}} = 10 \text{ Н} \cdot \text{м}$. а). Предлагается определить алгебраическое угловое ускорение тела ε_z . б). Начальная угловая скорость $\omega_{0z} = 4 \text{ рад/с}$. Предлагается определить угловую скорость ω_{1z} через промежуток времени $t_1 = 3 \text{ с}$.

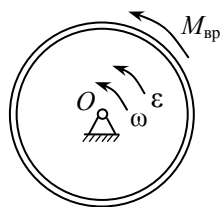


Рис. 42

Решение в две строки:

$$J_z \varepsilon_z = M_{\text{вр}}, \text{ т.е. } 2 \cdot \varepsilon_z = 10, \text{ откуда } \varepsilon_z = 5 \text{ рад/с}^2.$$

$$\omega_{1z} - 4 = 5 \cdot 3, \text{ откуда } \omega_{1z} = 19 \text{ рад/с}.$$

Теперь вы хорошо разбираетесь в теории и можете вернуться к *самостоятельному* решению примеров 1–22.

Ответы на них приведены чуть ниже.

Далее приведены вопросы 23–44 и 45–66. Условия некоторых из этих вопросов немного отличаются от разобранных выше. Однако они базируются на том же самом теоретическом материале.

Желаем успеха!

Ответы на вопросы 1–22

1. $F_x = -F \cos 30^\circ$, $F_y = -F \sin 30^\circ$. 2. $M_O(\vec{F}) = F \cdot 2$. 3^{мех}. См. рис. 43, $M = -F \cdot 5$. 4. $\sum_k F_{kx} = X_B - R_A \cos 60^\circ = 0$. 5. $v_x = 6t + 4$, $v_x(1) = 10$ м/с. 6. $a_x = 12t$, $a_x(1) = 12 \text{ м/с}^2$. 7. См. рис. 44. 8. $\omega_z = -4t$, $\omega_z(2) = -8 \text{ рад/с}$. 9. $\varepsilon_z = -4$, $\varepsilon_z(1) = -4 \text{ рад/с}^2$. 10. См. рис. 45. 11. $v_A = 1,2 \text{ м/с}$. 12. $a_A^{\text{вр}} = 2 \text{ м/с}^2$, $a_A^{\text{н}} = 1,8 \text{ м/с}^2$. 13^{мех}. См. рис. 46, $v_B = 10 \text{ м/с}$. 14. $m \frac{dv_x}{dt} = Q - G \cdot \cos 60^\circ$. 15. $v \approx 19 \text{ м/с}$. 16^{мех}. $c = 4000 \text{ Н/м}$. 17^{мех}. $k = 30 \text{ рад/с}$. 18^{мех}. $T_B \approx 0,42 \text{ с}$. 19^{мех}. $p = 100 \text{ рад/с}$, резонанса не будет. 20^{мех}. $J_z = 0,75 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. 21^{мех}. $\omega_1 = 8,17 \text{ рад/с}$. 22^{мех}. $\varepsilon_z = 5 \text{ рад/с}^2$, $\omega_{1z} = 10 \text{ рад/с}$.

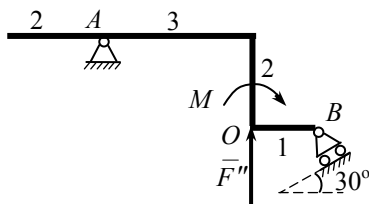


Рис. 43

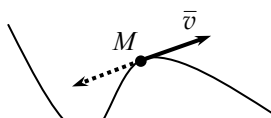


Рис. 44

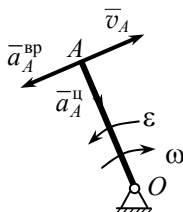


Рис. 45

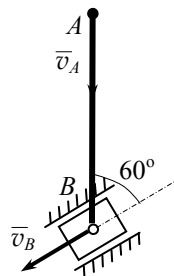


Рис. 46

Часть 3. Вопросы для тренировки

Предлагаем потренироваться, проверить себя. Ещё 22 типовых вопроса приведены в произвольном порядке. Рекомендуем сначала решить их, записать свои ответы. Потом уже можно их сравнить с правильными ответами, которые приведены в самом конце.

Напоминаем, что значком «^{мех}» помечены вопросы для студентов-механиков. Остальные вопросы адресованы и механикам, и технологам.

23. Запишите 3-е уравнение равновесия твердого тела: условие равенства нулю суммы алгебраических моментов сил относительно точки B (рис. 47).

24. Материальная точка массой m опускается по шероховатой наклонной плоскости под углом $\alpha = 60^\circ$ под действием силы Q , сонаправленной движению (рис. 48). Известна сила трения $F_{\text{тр}}$. Запишите дифференциальное уравнение движения точки.

25. Известны проекции скорости на оси координат в точке M : $v_x = -3$ м/с, $v_y = -5$ м/с (рис. 49). Постройте вектор скорости $\vec{v}_M$.

26. Задано уравнение движения точки $x = t^2 - 3t$ м. Определите проекцию скорости v_x при $t = 1$ с.

27^{мех}. Произведите перенос силы $\vec{F}$ параллельно самой себе в точку O (рис. 47).

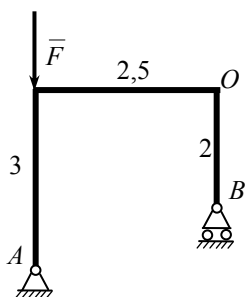


Рис. 47

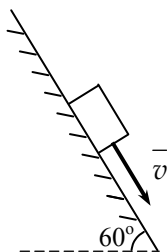


Рис. 48

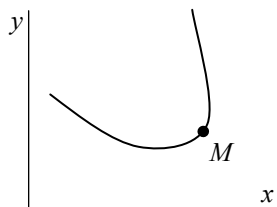


Рис. 49

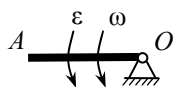


Рис. 50

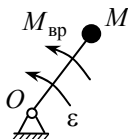


Рис. 51

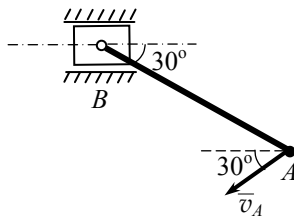


Рис. 52

28. Стержень OA вращается вокруг точки O . Заданы длина стержня $OA = 0,3$ м и скорость $v_A = 6$ м/с. Определите величину угловой скорости ω (рис. 50).

29^{мех}. Материальная точка M массой $m = 0,5$ кг находится на конце стержня длиной $OM = 1$ м (массой стержня пренебрегаем). Точка M вращается вокруг точки O с алгебраическим угловым ускорением $\epsilon_z = 4$ рад/с² (рис. 51). Определите момент инерции точки J_z и величину вращающего момента $M_{вр}$.

30^{мех}. Точка A шатуна AB движется со скоростью $v_A = 10$ м/с в направлении, указанном на рис. 52. Определите направление и величину скорости ползуна B .

31^{мех}. Круговая частота свободных колебаний материальной точки равна $k = 63$ рад/с (рис. 53). Определите период свободных колебаний точки T .

32. Задано уравнение вращения твердого тела вокруг оси Z : $\varphi = 3t^2$ рад. Определите алгебраическое угловое ускорение тела ϵ_z при $t = 1$ с.

33^{мех}. Твердое тело, имеющее момент инерции $J_z = 3 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, вращается под действием вращающего момента $M_{\text{вр}} = 15 \text{ Н} \cdot \text{м}$ (рис. 54). Начальная угловая скорость $\omega_0 = 3 \text{ рад/с}$. Определите угол поворота φ , после того как угловая скорость достигла значения $\omega_1 = 10 \text{ рад/с}$.

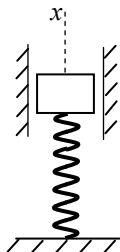


Рис. 53

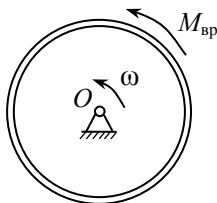


Рис. 54

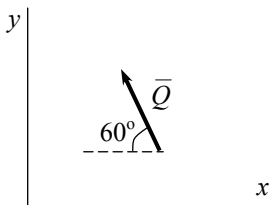


Рис. 55

34. Чему равны проекции силы $\bar{Q}$ на оси координат (рис. 55)?

35. Стержень вращается вокруг точки O (ось вращения z перпендикулярна рисунку) (рис. 50). Направления ω_z , ε_z заданы. Постройте векторы скорости, вращательного и центростремительного ускорений в точке A стержня.

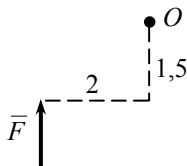


Рис. 56

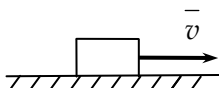


Рис. 57

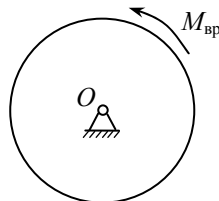


Рис. 58

36. Чему равен алгебраический момент силы $\bar{F}$ относительно точки O (рис. 56)?

37^{мех}. На материальную точку действует периодическая возмущающая сила Q_x . Её максимальное значение равно $Q_0 = 70 \text{ Н}$ (рис. 53). Период вынужденных колебаний, возникающих при этом, равен $T_B = 0,628 \text{ с}$. Найдите частоту возмущающей силы p и запишите выражение для возмущающей силы Q_x .

38. Материальную точку массой $m = 3 \text{ кг}$ нужно разогнать на гладкой горизонтальной плоскости из состояния покоя до скорости $v_1 = 10 \text{ м/с}$ за время $t_1 = 1,5 \text{ с}$ (рис. 57). Какую постоянную силу Q , со-

направленную движению, для этого нужно приложить к материальной точке?

39. Задано уравнение движения точки $x = 2t^2 + 3t$ м. Определите проекцию ускорения a_x при $t = 1$.

40^{мех}. Твердое тело вращается вокруг оси z , проходящей через точку O перпендикулярно плоскости рисунка (рис. 58). На тело действует постоянный вращающий момент $M_{вр} = 200$ Н·м. Момент инерции тела $J_z = 40$ кг·м². Определите алгебраическое угловое ускорение тела ε_z .

41. Стержень OA вращается вокруг точки O (рис. 50). Заданы длина стержня $OA = 0,5$ м, величины угловой скорости $\omega = 2$ рад/с и углового ускорения $\varepsilon = 6$ рад/с². Определите величины обеих компонент ускорений для точки A .

42^{мех}. Под действием тела массой $m = 20$ кг вертикальная пружина сжалась на величину статического отклонения $\delta_{ст} = 0,05$ м (рис. 53). Найдите коэффициент жесткости пружины c .

43. Задано уравнение вращения твердого тела вокруг оси z : $\varphi = 3t^2 + 2t$ рад. Определите алгебраическую угловую скорость тела ω_z при $t = 0,5$ с.

44^{мех}. Тело совершает вертикальные вынужденные колебания под действием центробежной силы инерции ротора (при дисбалансе) (рис. 53). Возмущающая сила равна $Q_x = 50 \sin \omega t$. Круговая частота свободных колебаний равна $k = 25$ рад/с. При каком ω наступит резонанс?

Часть 4. Чуть более сложные вопросы для тренировки

После самостоятельного решения еще 22 типовых вопросов ваши знания станут фундаментальными!

45. Задано уравнение движения точки M по прямой $s = 2t^2 + 3t$ м. Определите скорость v при $t = 1$ с (рис. 59).

46^{мех}. Материальная точка M на конце стержня длиной $OM = 0,1$ м вращается в горизонтальной плоскости вокруг точки O (рис. 60). Какой должна быть масса точки, чтобы под действием момента $M_{вр} = 1$ Н·м её угловая скорость была $\omega_z = 20t$ рад/с.

47. Диск вращается вокруг оси z (рис. 61). Заданы направления векторов скорости, вращательного и осестремительного ускорений точки M . Постройте направления ω_z , ε_z .

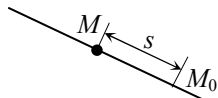


Рис. 59

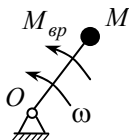


Рис. 60

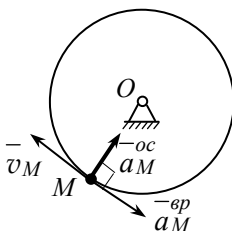


Рис. 61

48^{мех}. Тело совершает горизонтальные свободные колебания на пружине, коэффициент жесткости которой равен $c = 1500$ Н/м (рис. 62). Какова должна быть масса тела, чтобы период свободных колебаний был равен $T = 0,15$ с?

49. Задана угловая скорость твердого тела вокруг оси z : $\omega_z = -4t + 2$ рад. Определите алгебраическое угловое ускорение тела ε_z при $t = 5$ с.

50. Получив начальную скорость, материальная точка поднимается в трубке под углом 60° (рис. 63). Трением пренебрегаем. Какова была начальная скорость v_0 , если до своей остановки материальная точка двигалась в течение $0,5$ с?



Рис. 62

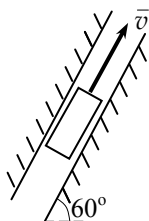


Рис. 63

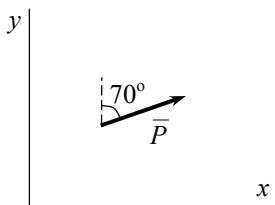


Рис. 64

51. Чему равны проекции силы $\vec{P}$ на оси координат (рис. 64)?

52. Задана траектория движения точки от M_0 к M_1 . Алгебраическая скорость точки равна $v_t = 7$ м/с. Постройте вектор скорости в заданной точке M (рис. 65).

53. Задано уравнение движения точки по прямой $s = 0,5t^3 - 3t$ м. Определите ускорение a при $t = 2$ с.

54^{мех}. Известен период свободных колебаний материальной точки $T = 0,2$ с (рис. 62). На нее действует периодическая сила $Q_x = 50 \sin 30t$. Насколько это опасно для прочности конструкции? (Наступит ли резонанс?)

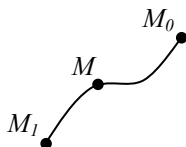


Рис. 65

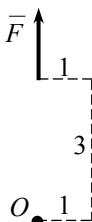


Рис. 66

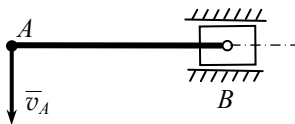


Рис. 67

55. Задано уравнение вращения тела вокруг оси z : $\varphi = -2t + 2$ рад. Определите алгебраическую угловую скорость тела ω_z при $t = 0,5$ с.

56. Диск радиусом $R = 0,4$ м вращается вокруг точки O . Задана зависимость алгебраической угловой скорости от времени $\omega_z = 50t - 40$ рад/с. Определите обе компоненты ускорения точки M на ободе диска в момент времени $t = 1$ с.

57^{мех}. Материальная точка массой $m = 2$ кг начинает вращаться из состояния покоя под действием вращающего момента $M_{вр}$. Вращение происходит в горизонтальной плоскости вокруг точки O , $OM = 0,2$ м (рис. 60). Каким должен быть $M_{вр}$, чтобы через $n = 10$ оборотов угловая скорость ротора достигла величины 20 рад/с.

58. Чему равен алгебраический момент силы $\bar{F}$ относительно точки A (рис. 66)?

59^{мех}. Известна скорость точки A на одном из концов шатуна $v_A = 6$ м/с (рис. 67). Найдите скорость ползуна B .

60^{мех}. При сжатии пружины силой $P = 600$ Н её длина уменьшилась на $\delta_{сж} = 0,03$ м (рис. 62). Определите круговую частоту свободных колебаний k тела массой $m = 50$ кг, прикрепленного к пружине.

61. Материальная точка массой m движется по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы Q . Запишите дифференциальное уравнение движения точки (рис. 68).

62^{мех}. Твердое тело вращается вокруг оси z под действием постоянного вращающего момента $M_z = 10$ Н·м (рис. 69). Известен момент

инерции тела $J_z = 2,5 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. Также дана $\omega_{0z} = -2 \text{ рад/с}$. Определите алгебраические угловое ускорение ε_z и угловую скорость $\omega_z = \omega_z(t)$.

63. Запишите 3-е уравнение равновесия твердого тела: условие равенства нулю суммы алгебраических моментов сил относительно точки A (рис. 70).

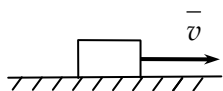


Рис. 68

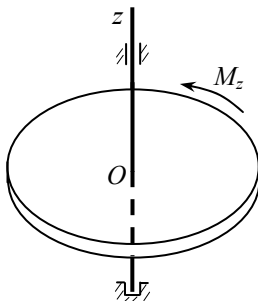


Рис. 69

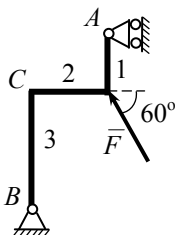


Рис. 70

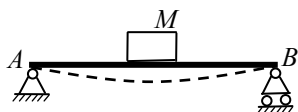


Рис. 71

64^{мех}. Известен коэффициент жесткости при прогибе балки AB , равный $c = 60000 \text{ Н/м}$ (рис. 71). (Балка обладает упругими свойствами, может прогибаться и поэтому является аналогом вертикальной пружины. Коэффициент c зависит от положения тела M на балке AB .)

На аппарат M массой $m = 150 \text{ кг}$ в процессе работы действует по вертикали периодическая возмущающая сила. Определите значение её периода T_B , при котором возникает угроза резонанса.

65. Стержень OA вращается вокруг точки O . Заданы длина стержня $OA = 0,5 \text{ м}$ и уравнение вращения $\varphi = 4t^2 \text{ рад}$. Определите величину скорости v_A при $t = 2 \text{ с}$.

66^{мех}. Перенесите силу $\vec{F}$ параллельно ей самой в точку C (рис. 70).

Ответы на вопросы 23–66

23. $\sum_k M_B(\bar{F}_k) = X_A \cdot 1 - Y_A \cdot 2,5 + F \cdot 2,5 = 0$. 24. $m \frac{dv_x}{dt} = Q +$
 $+ G \cdot \cos 30^\circ - F_{mp}$. 25. См. рис. 72. 26. $v_x(1) = -1$ м/с. 27^{мех}. См.
 рис. 73, $M = F \cdot 2,5$. 28. $\omega = 20$ рад/с. 29^{мех}. $J_z = 0,5$ кг·м²,
 $M_{ep} = 2$ Н·м. 30^{мех}. См. рис. 74, $v_B \approx 5,8$ м/с. 31^{мех}. $T \approx 0,1$ с.
 32. $\varepsilon_z(1) = 6$ рад/с². 33^{мех}. $\varphi = 9,1$ рад. 34. $Q_x = -Q \cos 60^\circ$,
 $Q_y = Q \sin 60^\circ$. 35. См. рис. 75. 36. $M_O(\bar{F}) = -F \cdot 2$.
 37^{мех}. $p = 10$ рад/с, $Q_x = 70 \sin 10t$. 38. $Q = 20$ Н. 39. $a_x(1) = 4$ м/с².
 40^{мех}. $\varepsilon_z = 5$ рад/с². 41. $a_A^{BP} = 3$ м/с², $a_A^u = 2$ м/с². 42^{мех}. $c \approx 4000$ Н/м.
 43. $\omega_z(0,5) = 5$ рад/с. 44^{мех}. $\omega = 25$ рад/с.

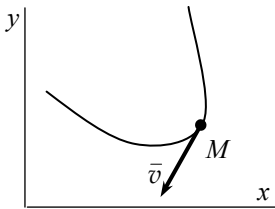


Рис. 72

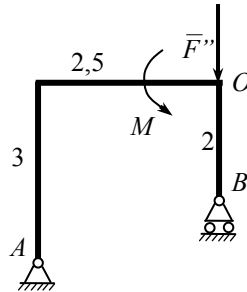


Рис. 73

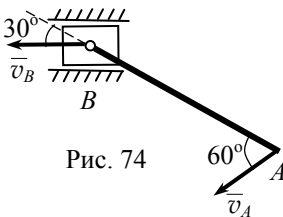


Рис. 74

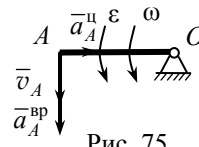


Рис. 75

45. $v(1) = 7$ м/с. 46^{мех}. $m = 5$ кг. 47. См. рис. 76. 48^{мех}. $m \approx 0,85$ кг.
 49. $\varepsilon_z(5) = -4$ рад/с². 50. $v \approx 4,2$ м/с. 51. $P_x = P \cos 20^\circ$, $P_y = P \sin 20^\circ$.
 52. См. рис. 77. 53. $a(2) = 6$ м/с². 54^{мех}. $k = 31,4$ рад/с, $p \approx k$;
 резонанса нет, но амплитуда вынужденных колебаний велика. 55.
 $\omega_z(0,5) = -2$ рад/с. 56. $a_M^{BP} = 20$ м/с², $a_M^u = 40$ м/с².

$$57^{\text{мех}}. J_z = 0,08 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad M_{\text{вр}} \approx 0,25 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

$$58. M_O(\bar{F}) = 0.$$

$$59^{\text{мех}}. v_B = 0 \text{ м/с}.$$

$$60^{\text{мех}}. k = 20 \text{ рад/с}.$$

$$61. m \frac{dv_x}{dt} = Q - F_{\text{тр}}.$$

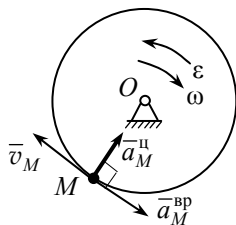


Рис. 76

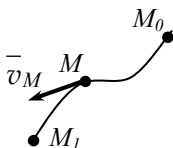


Рис. 77

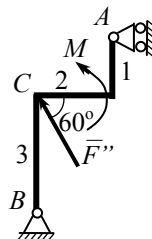


Рис. 78

$$62^{\text{мех}}. \varepsilon_z = 4 \text{ рад/с}^2, \quad \omega_z = 4t - 2 \text{ рад/с}.$$

$$63. \sum_k M_A(\bar{F}_k) = X_B \cdot 4 - Y_B \cdot 2 - F \sin 30^\circ \cdot 1 = 0.$$

$$64^{\text{мех}}. T_B = 0,314 \text{ с}.$$

$$65. v_A(2) = 8 \text{ м/с}. \quad 66^{\text{мех}}. \text{См. рис. 78, } M = F \cdot \sin 60^\circ \cdot 2.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1*. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для вузов. – М.: Высш. школа, 2001. – 416 с.

2*. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учеб. для машиностроит. спец. вузов. – М.: Высш. школа, 1990. – 607 с.

3***. Коноплев И.Г. Теоретическая механика: Учебное пособие. – Казан. гос. технол. ун-т, 2004. – 76 с.

* – для механических и технологических специальностей

** – для механических специальностей

*** – для технологических специальностей