Министерство образования и науки Российской федерации
Федеральное государственное бюджетное
Образовательное учреждение высшего образования
«Казанский государственный национальный
исследовательский университет»

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Методические указания

2019

УДК 531.8

Печатается по решению методической комиссии
по циклу механических дисциплин.

Рецензенты:
проф. Хайруллин Ф.С.
доц. Кондрашова С.Г.

Составители:
доц. А.И. Муштари, доц. М.К. Сагдатуллин,
проф. М.Н Серазутдинов., проф. Ф.Х. Тазюков.

Лабораторные работы по теоретической механике: методические указания / сост.: А.И. Муштари, М.К. Сагдатуллин, М.Н. Серазутдинов, Ф.Х. Тазюков; под ред. М.Н. Серазутдинова. Минобрнауки России, Казан. нац. иссл. технол. ун-т; – Казань: Изд-во КНИТУ, 2018. – 70 с.

Представлены материалы для подготовки к лабораторным работам по теоретической механике.

Предназначено для студентов механических и технологических специальностей всех форм обучения.

Подготовлено на кафедре теоретической механики и сопротивления материалов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Лабораторная работа №1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ШАРНИРНЫХ ОПОР

Цель работы: Экспериментальное определение реакций шарнирных опор твердого тела под действием плоской системы сил и сравнение полученных данных с результатами расчетов.

Содержание работы:

- экспериментальное определение коэффициента жесткости датчиков;
- экспериментальное определение реакций опор стержня под действием сосредоточенной силы, распределённой нагрузки и пары сил;
- экспериментальная проверка теоремы о том, что при изменении точки приложении момента значения реакций опор не изменяются;
- проведение теоретических расчетов и сравнение полученных данных с результатами расчетов.

Лабораторная установка представляет собой горизонтально расположенный стержень AB, закрепленный на концах с помощью неподвижного и подвижного шарниров A и B, соответственно (рис. 1.1). Схема расположения шарнирных опор стержня приведена на рисунке 1.2.

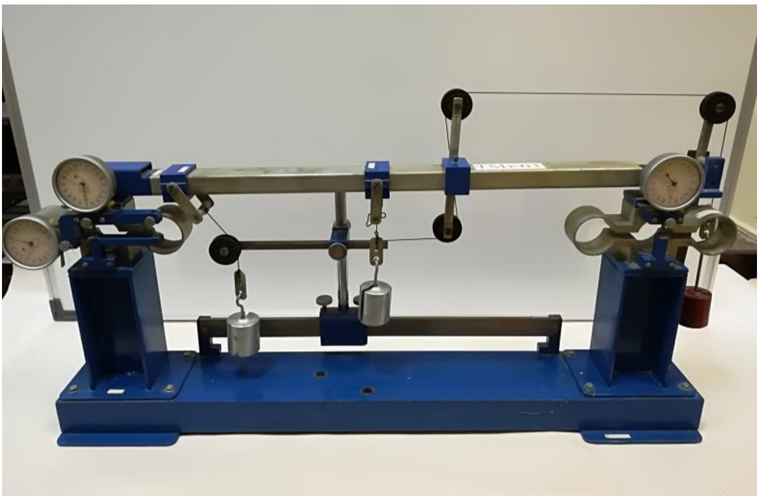


Рис. 1.1. Схема лабораторной установки.

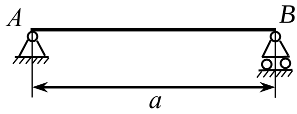


Рис. 1.2. Схема расположения шарнирных опор.

Для определения сил реакций в опорах A и B в установке имеются механические тензометры – датчики, которые фиксируют малые упругие перемещения Δx_A, Δy_A для точки A и Δy_B для точки B. Здесь перемещение в горизонтальном направлении обозначено Δx_A, а перемещения в вертикальном направлении Δy_A, Δy_B.

В опорах A и B возникают силы реакции R_A, H_A, R_B, которые по закону Гука прямо пропорциональны перемещениям:

$$H_A = c\,\Delta x_A, \quad R_A = c\,\Delta y_A, \quad R_B = c\,\Delta y_B, \tag{1.1}$$

где c – коэффициент жесткости датчиков, который определяется экспериментально.

Отметим, что перемещения Δx_A, Δy_A, Δy_B замеряются с погрешностью не более 3 $мкм$ (микрометр: $мкм = 10^{-6}\,м$).

Нахождение величины коэффициента жесткости c проводится в следующей последовательности:

- показания датчиков, фиксирующих малые упругие перемещения точек A и B в горизонтальном и вертикальном направлениях, выставляются на ноль;
- посередине стержня AB подвешивается груз веса F (рис. 1.3).
- снимаются показания тензометров, показывающих величины перемещений Δx_A, Δy_A, Δy_B в горизонтальном и вертикальном направлениях;
- с использованием уравнений равновесия для стержня AB (рис. 1.3):

$$\sum_i F_{i\,x} = H_A = 0, \quad \sum_i F_{i\,x} = R_A + R_B = 0,$$

$$\sum_i m_{i\,A} = -F \cdot a/2 + R_B \cdot a = 0,$$

находятся реакции опор H_A, R_A, R_B;

- по формуле $c = R_A / \Delta y_A$ вычисляется коэффициент жесткости.

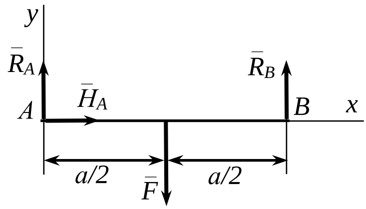


Рис. 1.3. Расчетная схема для определения коэффициентов жесткости

Экспериментальное определение реакций опор стержня и проверка теоремы о том, что при приложении момента в любой точки тела значения реакций опор не изменяются, проводится для стержня при действии на него сосредоточенной силы $\bar{F}$, распределённой нагрузки $\bar{q}$ и момента M (рис. 1.4).

Сосредоточенная сила $\bar{F}$ создается грузом, подвешенным на нити, которая переброшена через блок и расположена под углом α к продольной оси стержня. Распределенная по линии нагрузка интенсивности q (размерность Н/м) создается с использованием грузиков, выложенных по участку стержня длины a_1 . Для приложения к стержню момента M (пары сил $(\bar{F}, \bar{F}')$, рис. 1.5) грузы весом F подвешиваются к нитям, протянутым параллельно стержню AB и перекинутым через блоки. При этом $\bar{F} = -\bar{F}'$, а плечо пары сил равно d . Момент M направлен по часовой стрелке, его величина $M = F \cdot d$.

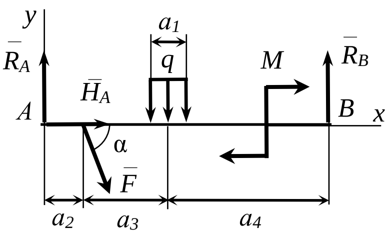


Рис. 1.4. Основная расчетная схема

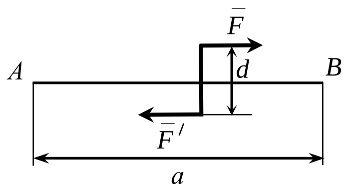


Рис. 1.5. Пара сил, создающая момент

Величины силы F и интенсивности распределенной нагрузки q заданы. Расстояния a_1, a_2, a_3, a_4 и угол α замеряются с помощью линейки и транспортира, соответственно.

Для выполнения работы следует:

1. определить коэффициент жесткости датчиков;
2. экспериментально определить реакций опор стержня $R_A^Э$, $H_A^Э$, $R_B^Э$, возникающие под действием распределённой нагрузки $\bar{q}$, момента $\overline{M}$ и сосредоточенной силы $\overline{F}$, направленной под углом α к продольной оси стержня);
3. составить уравнения равновесия для стержня и вычислить реакции опор R_A^T, H_A^T, R_B^T. Полученные на основе теоретических расчетов значения R_A^T, H_A^T, R_B^T сравнить со значениями реакций $R_A^Э$, $H_A^Э$, $R_B^Э$, найденных из эксперимента (вычислить разницу в процентах);
4. изменить в эксперименте точку приложения момента $\overline{M}$ и повторить эксперимент, а также вычисления, обозначенные в предыдущих двух пунктах.

Порядок выполнения работы:

1. замеряются необходимые для расчетов параметры;
2. показания датчиков, фиксирующих перемещения точек A и B в горизонтальном и вертикальном направлениях, выставляются на ноль;
3. к стержню прикладываются сосредоточенная сила $\overline{F}$ и вычисляется коэффициент жесткости датчиков;
4. к стержню прикладываются сосредоточенная сила $\overline{F}$, направленная по углом α к стержню, распределенная по линии нагрузка $\bar{q}$, момент $\overline{M}$;
5. показания датчиков, фиксирующих перемещения точек A и B в горизонтальном и вертикальном направлениях, выставляются на ноль;
6. выполняются действия, необходимые для определения реакций опор $R_A^Э$, $H_A^Э$, $R_B^Э$, R_A^T, H_A^T, R_B^T;

7. изменяется место приложения момента и находятся реакции опор $R_A^Э$, $H_A^Э$, $R_B^Э$;
8. формулируются выводы, следующие из полученных результатов.

Отчет по работе должен содержать основные сведения, необходимые для выполнения работы; описание использованной установки; результата экспериментов и теоретических расчетов; выводы, вытекающие из экспериментальных и теоретических результатов.

Контрольные вопросы

1. Какая теорема экспериментально проверяется в лабораторной работе?
2. Какие силы реакции возникают в неподвижной и подвижной шарнирных опорах?
3. Какая сила прикладывается к стержню для определения коэффициента жесткости датчиков?
4. На основе какого закона устанавливается связь между силами реакций и малыми упругими перемещениями в датчиках?
5. С какой погрешностью замеряются величины перемещений в датчиках?
6. Что нужно сделать с показаниями датчиков до проведения эксперимента?
7. Помимо сосредоточенных сил, какие еще силы прикладываются к стержню?
8. Каким образом создается момент пары сил?
9. Из каких уравнений на основе теоретических расчетов выводятся силы реакции опор?
10. Между какими величинами производится сравнение?

Лабораторная работа№2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ПЛОСКОЙ ОДНОРОДНОЙ ФИГУРЫ

Цель работы: определение координат центра тяжести однородной плоской фигуры.

Теоретические сведения. Пусть на тело, состоящее из материальных точек $A_1, A_2, ... A_n$, действуют силы тяжести (рис. 2.1). Эти силы можно представить в виде системы параллельных сил $\{\overline{P}_i\}$, приложенных к точкам $A_i \, (i = 1, 2, ... n)$. Положение точек A_i определяются радиус-векторами $\overline{r}_i$, проведенными из произвольно выбранного начала отсчета O.

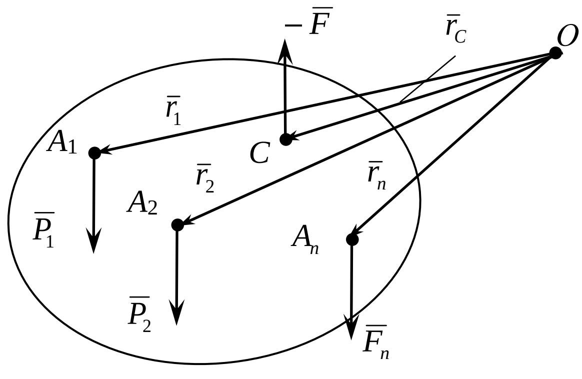


Рис. 2.1. Тело, составленное из материальных точек

Пусть точка C является центром параллельных сил $\overline{F}_i$. Тогда суммируя параллельные силы $\overline{F}_i$, получим равнодействующую силу $\overline{F}$, приложенную к точке C. Радиус-вектор точки C обозначим $\overline{r}_C$.

Вектор $-\overline{F}$, направленный противоположно $\overline{F}$, является уравновешивающим вектором. Следовательно, система сил $\{-\overline{F}, \overline{F}_i\}$ становится уравновешенной системой сил.

Уравнение равновесия системы сил $\{-\overline{F}, \overline{F}_i\}$ в виде суммы моментов сил относительно точки O имеет вид:

$$\overline{M}_0(\overline{F}) - \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0(\overline{F}_i) = 0.$$

По определению, моментом силы $\overline{F}$, приложенной в точке с радиус-вектором $\overline{r}_C$, называется вектор, равный векторному произведению $\overline{r}_C \times \overline{P}$. Поэтому уравнение равновесия системы сил $\{-\overline{F}, \overline{F}_i\}$ можно записать так:

$$\overline{M}_0(\overline{F}) - \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0(\overline{F}_i) = \overline{r}_C \times \overline{F} - \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times \overline{F}_i = 0. \qquad (2.1)$$

Пусть m_i – масса материальной точки с номером $i = 1, 2, ... n$, $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – масса всего тела, $\overline{F} = M \cdot \overline{g}$ – вес тела ($\overline{g}$ – ускорение свободного падения).

С учетом принятых обозначений уравнение (2.1) можно представить в виде

$$\overline{r}_C \times M\overline{g} - \sum_{i=1}^{n} \overline{r}_i \times m_i \overline{g} = 0,$$

или

$$\left(M\overline{r}_C - \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i \right) \times \overline{g} = 0. \qquad (2.2)$$

Как известно, если произведение двух сомножителей равно нулю, то равен нулю один или оба из сомножителей. Ускорение свободного падения $\overline{g}$ не равно нулю, следовательно, из (2.2) следует, что

$$M\overline{r}_C - \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i = 0.$$

Разделив обе части последнего уравнения на M, получаем формулу для определения центра масс тела:

$$\overline{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{r}_i}{M}. \qquad (2.3)$$

Уравнение (2.2) в скалярной форме имеет вид:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M}, \qquad z_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i y_i}{M}, \qquad (2.4)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты материальных точек, x_C, y_C, z_C – координаты центра масс тела. В нашем случае центр масс совпадает с центром тяжести тела.

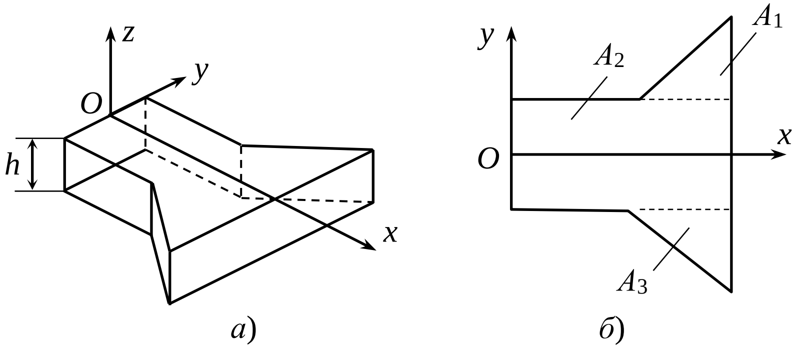


Рис. 2.2. Тело с постоянной толщиной

Рассмотрим тело с постоянной толщиной h и плотностью γ (рис. 2.2*а*). Оси декартовой системы $Oxyz$ координат выбираем так, чтобы ось Oz была параллельна действующим силам тяжести. В плане тело имеет форму фигуры, показанной на рис.2б, которую можно разбить на 3 части с площадями A_1, A_2, A_3. В общем случае полагаем, что эта фигура состоит из n плоских частей с соответствующей площадью. Площадь всей фигуры $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$. Если начало системы $Oxyz$ выбирать на верхней поверхности тела (рис. 2.2,*а*), то в этом случае координата z центра тяжести тела $z_C = -\frac{h}{2}$. Для плоской фигуры постоянной толщины h объем тела и его части с номером i вычисляются по формулам: $V = Ah$, $V_i = A_i h$. Так как плотность тела γ величина постоянная, то можно полагать, что $M = V\gamma = Ah\gamma$, $m_i = V_i\gamma = A_i h\gamma$, а массы m_i каждой части сосредоточены в центрах тяжести фигур, координаты которых x_i, y_i. Подставляя полученные выражения для M, m_i в (2.4) и сокращая на $h\gamma$, получим формулы определения для координат центра тяжести тела:

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i x_i}{A}, \qquad y_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i y_i}{A}. \tag{2.5}$$

При выполнении лабораторной работы требуется для заданного тела в виде плоской фигуры постоянной толщины h найти координаты центра тяжести.

Для некоторых фигур с вырезами, для учета выреза, при использовании формул (2.5) можно задавать площадь фигуры выреза A_i в виде отрицательного числа.

Пример. Определить координаты центра тяжести круглого однородного диска радиуса R с отверстием радиуса r. Расстояние между центрами сплошного диска и отверстия $OO_1 = a$ (рис. 2.3), толщина диска равна h.

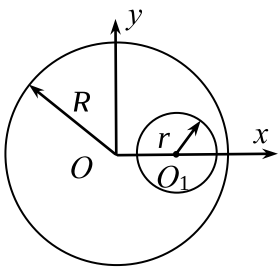


Рис. 2.3. Круглый диск с отверстием

Решение. Начало системы координат Oxy возьмем в центре круга радиуса R. Полагаем, что диск состоит из двух элементов (n = 2) – сплошного диска радиуса R и отверстия радиуса r. Координаты центров тяжести этих элементов $x_1 = y_1 = 0$, $x_2 = a$, $y_2 = 0$. Площадь лицевой поверхности сплошного диска $A_1 = \pi R^2$. Отверстие представляем в виде элемента с отрицательной площадью $A_2 = -\pi r^2$. По формулам (2.5) получаем

$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = \frac{\pi R^2 \cdot 0 - \pi r^2 \cdot a}{\pi (R^2 - r^2)} = -\frac{r^2 a}{R^2 - r^2},$$

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} = \frac{\pi R^2 \cdot 0 - \pi r^2 \cdot 0}{\pi (R^2 - r^2)} = 0.$$

При выполнении лабораторной работы требуется для тела в виде плоской фигуры постоянной толщины h и заданных размеров найти координаты центра тяжести.

Порядок выполнения работы.

1. Ознакомление с теоретическими соотношениями.
2. Заданная плоская фигура разбивается на отдельные части, площади которых и координаты центра тяжести легко определить.
3. Измеряются или берутся из задания размеры отдельных частей фигуры, необходимые для вычисления их площадей.
4. Выбирается система координат, в которой определяются координаты x_i, y_i центра тяжести выбранных частей.
5. Вычисляются площади частей и всей фигуры.
6. По формулам (2.5) вычисляются координаты центра тяжести тела.
7. Результаты измерений и расчетов заносятся в таблицу.
8. Составляется отчет, содержащий основные теоретические соотношения и описание сделанных расчетов.

Результаты измерений и расчетов заносятся в таблицу.

№ части	X_i (см)	Y_i (см)	A_i (см2)
1			
2			
3			

$A =$; $X_C =$; $Y_C =$.

Контрольные вопросы.

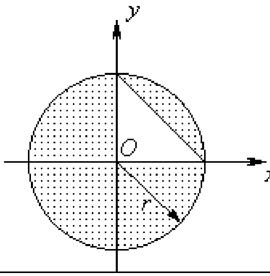
1. Какая величина, называется радиус-вектором?
2. Что такое система параллельных сил?
3. Как записывается условие равновесия системы параллельных сил?
4. Как определяются числовое значение и знак момента силы?
5. Запишите уравнения равновесия системы сил $\{ \overline{P}_i \}$ в виде суммы моментов сил.

6. В каком случае при вычислении центра тяжести, объемы можно заменить площадями?
7. Как вычисляются объемы плоских трехмерных тел?
8. Как можно вычислить площади сложных фигур?
9. Какая точка твердого тела называется центром тяжести?
10. При каких условиях момент силы тяжести относительно оси равен нулю?
11. На какие части надо разбивать сложную фигуру, чтобы упростить определение ее площади (в том числе и для фигур с вырезами) ?
12. Как определяются координаты центра тяжести твердого тела?

Задания для выполнения работы

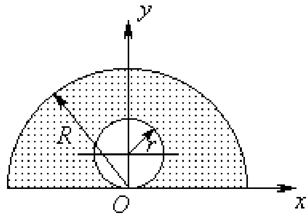
<table>
<tr>
<td>

1 *r = a см.*



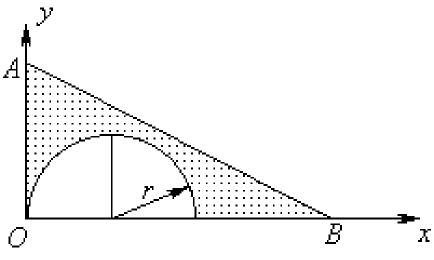
</td>
<td>

2 *R = b r = a см.*



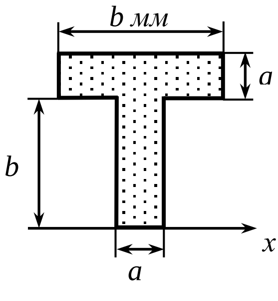
</td>
</tr>
<tr>
<td>

3 *a см, OB = b см, AO = c см.*



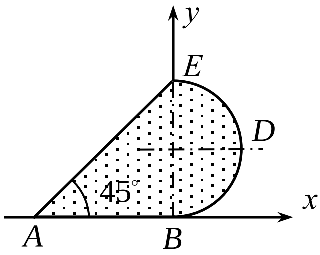
</td>
<td>

4

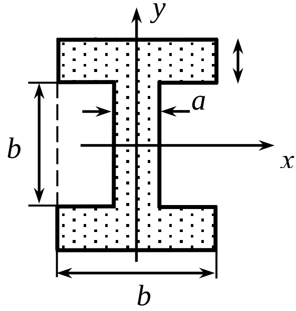


</td>
</tr>
</table>

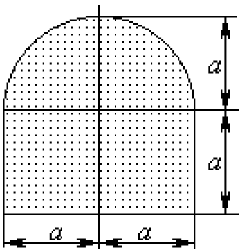
5 $BE = AB = a$ *см.*



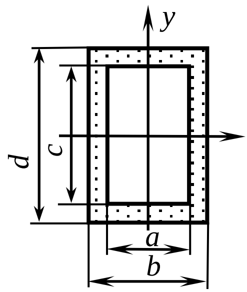
6



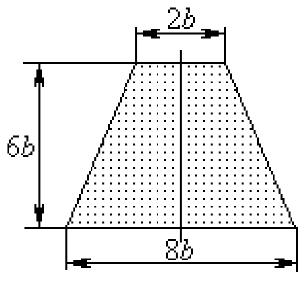
7



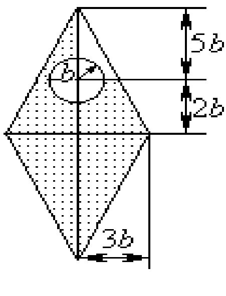
8



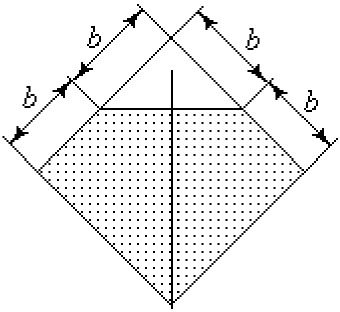
9



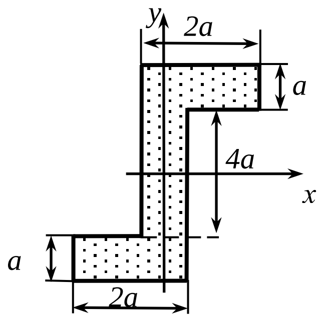
10



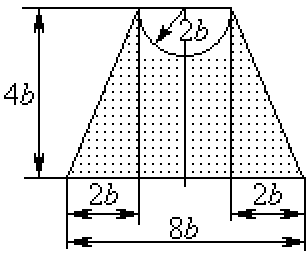
11



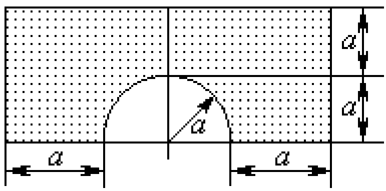
12



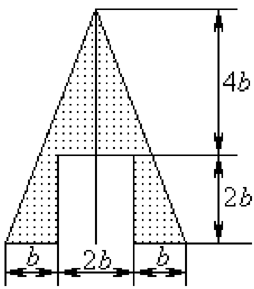
13



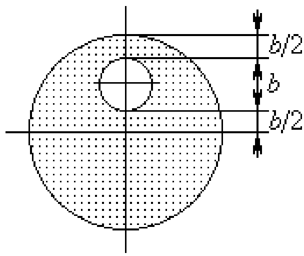
14



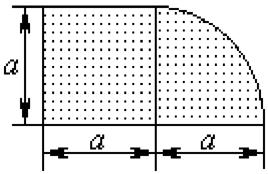
15



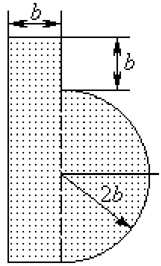
16



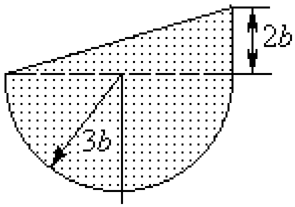
17



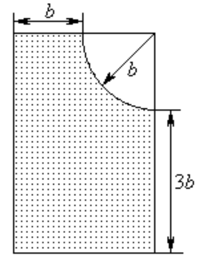
18



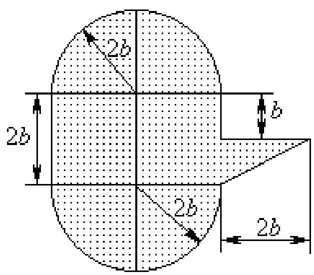
19



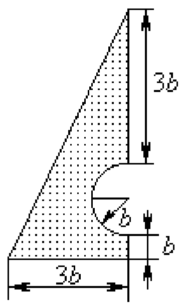
20



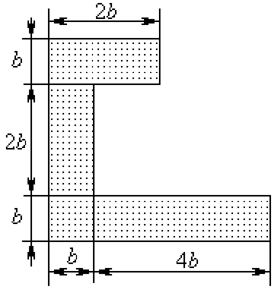
21



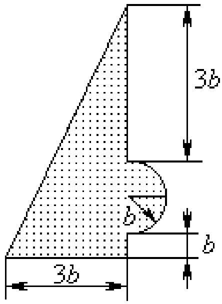
22



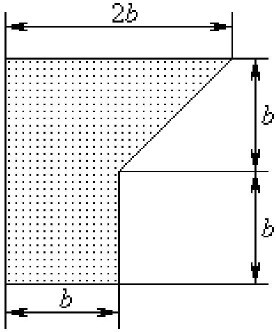
23



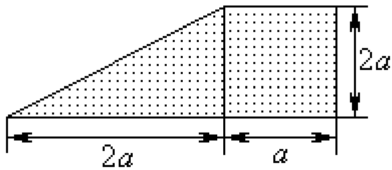
24



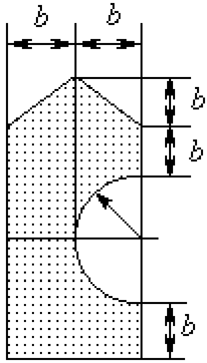
25



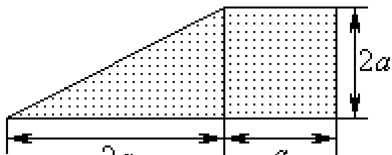
26



27



28



Лабораторная работа №3

КИНЕМАТИКА ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

Цель работы. Определить кинематические характеристики плоского механизма (найти скорости заданных точек механизма и угловую скорость звена, к которому эти точки принадлежат).

Приборы и принадлежности. Макет или схема механизма.

Содержание работы. Перемещение абсолютно твердого тела, при котором все его точки движутся параллельно некоторой неподвижной плоскости, *называется плоским*.

Плоское движение тел часто встречается в технике. Например, колесо при качении по прямолинейному участку пути совершает плоское движение.

Пусть тело D движется параллельно неподвижной плоскости Π (рис. 3.1). Рассекая тело плоскостью Oxy, параллельной Π, получим фигуру S, которая также будет двигаться параллельно плоскости Π. Следовательно, для исследования плоского движения тела достаточно изучить, как движется фигура S в плоскости Oxy. Поэтому в дальнейшем, в лабораторной работе, вместо плоского движения твердого тела, будет рассматриваться перемещение плоской фигуры в плоскости.

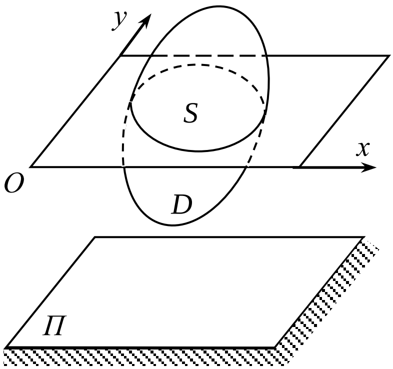


Рис. 3.1. Тело при плоском движении

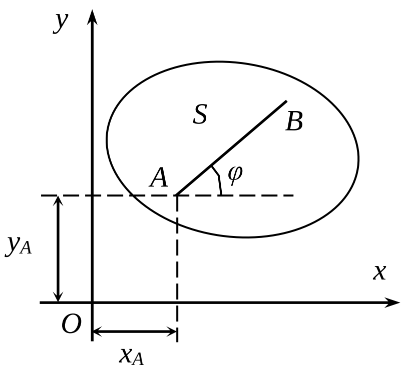


Рис. 3.2. Сечение тела

Положение плоской фигуры S в плоскости Oxy можно определить положением какого-нибудь отрезка AB на этой фигуре (рис. 3.2), которое можно описать используя координаты x_A, y_A точки A и угол φ между отрезком AB и осью Ox. Точка A, выбранная для определения положения фигуры S, называется *полюсом*. При вращательном движении точки вокруг полюса по окружности радиуса R с угловой скоростью ω, ее линейная скорость ν направлена перпендикулярно к радиусу R и справедлива формула Эйлера: $\omega = \dfrac{v}{R}$.

Скорости движения точек плоской фигуры. Получим уравнение, определяющее соотношение между скоростями точек плоской фигуры. Выберем в качестве начала координат некоторую точку O (начало отсчета) и выделим на заданной плоской фигуре две произвольно выбранные точки A и B, с радиус-векторами $\bar{r}_A$ и $\bar{r}_B$ (рис. 3.3). Вектор $\overline{AB}$, соединяет точки A и B.

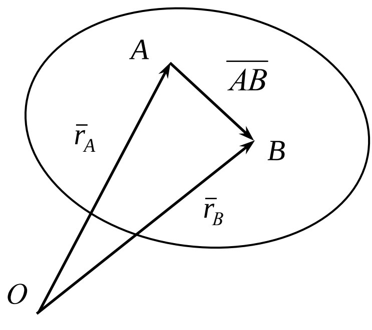


Рис. 3.3. Радиусы-векторы точек *A* и *B* фигуры

Полагаем, что точка A является полюсом и ее скорость $\bar{v}_A = \dfrac{d\bar{r}_A}{dt}$ известна. Определим скорость $\bar{v}_B = \dfrac{d\bar{r}_B}{dt}$ точки B. Используя правило сложения векторов, получим, что вектора $\bar{r}_A$, $\bar{r}_B$, $\overline{AB}$ (рис. 3.1) связаны соотношением

$$\bar{r}_B = \bar{r}_A + \overline{AB} \qquad (3.1)$$

Дифференцируя уравнение (3.1) по времени t, получим

$$\bar{v}_B = \frac{d\bar{r}_B}{dt} = \frac{d\bar{r}_A}{dt} + \frac{d\,\overline{AB}}{dt} = \bar{v}_A + \frac{d\,\overline{AB}}{dt}. \tag{3.2}$$

Определим физический смысл слагаемого $\dfrac{d\,\overline{AB}}{dt}$ в уравнении (3.2). Вектор $\overline{AB}$ является переменным вектором постоянного модуля (направление $\overline{AB}$ может меняться, причем вектор $\overline{AB}$ перпендикулярен вектору $\dfrac{d\,\overline{AB}}{dt}$, а модуль $\overline{AB}$ остается постоянным, так как тело считается абсолютно твердым). Следовательно, вектор $\bar{V}_{BA} = \dfrac{d\,\overline{AB}}{dt}$ является скоростью движения точки B по окружности радиуса AB вокруг точки A. Поэтому уравнение (3.2) можно представить в следующем виде:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \tag{3.3}$$

где $\bar{v}_A$ - скорость движения точки A (скорость поступательного движения плоской фигуры); $\bar{v}_{BA}$ - скорость точки B при ее движении по окружности радиуса AB вокруг точки A (рис. 3.4). Вектор $\bar{v}_{BA}$ перпендикулярен к отрезку $\overline{AB}$.

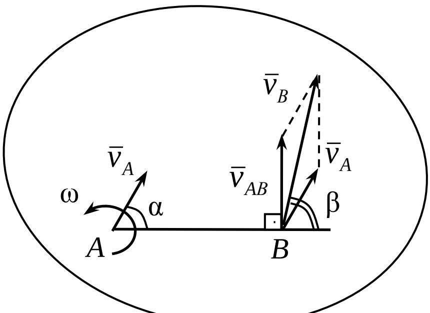


Рис. 3.4. Скорости точек *A* и *B*

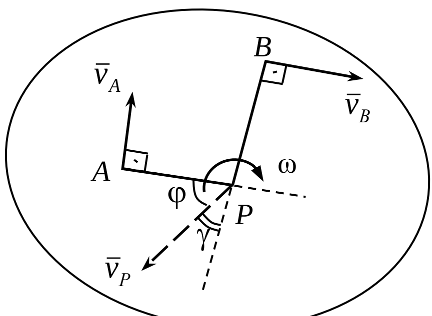


Рис. 3.5. МЦС плоской фигуры

Таким образом, плоское движение тела может быть представлено в виде суммы двух движений: поступательного движения со скоростью $\bar{v}_A$ *и вращательного движение вокруг оси вращения*, проходящей через точку *A*.

Скорость движения точки A, вектор $\bar{v}_A$, направлен под углом α к отрезку *AB*, а скорость движения точки *B*, вектор $\bar{v}_B$, направлен под углом β (рис. 3.4). Проектируя обе части равенства (3.3) на отрезок прямой *AB*, находим

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha \,. \tag{3.4}$$

Следовательно, проекции скоростей двух точек тела на отрезок прямой, соединяющий эти точки, равны.

Мгновенный центр скоростей. *Мгновенным центром скоростей* (МЦС) называется точка плоской фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю. Покажем, что при плоском непоступательном движении такая точка всегда существует. При непоступательном движении скорости точек плоской фигуры $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$, не параллельны друг другу (рис. 3.5). Проведем через точки A и B перпендикулярные к векторам $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ прямые. Точка *P*, лежащая на пересечении этих прямых, будет мгновенным центром скоростей, так как скорость этой точки $\bar{v}_P = 0$. Для доказательства этого утверждения спроектируем скорости $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_P$ на прямые *AP* и *BP*. Проектируя скорости на отрезок прямой *AP,* получим

$$v_P \cos\varphi = 0 \,. \tag{3.5}$$

Проектируя скорости $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_P$ на отрезок прямой *BP*, находим, что

$$v_P \cos\gamma = 0 \,. \tag{3.6}$$

Равенства (3.5), (3.6) будут выполнятся, если $\cos\varphi = \cos\gamma = 0$, либо $v_P = 0$. Вариант $\cos\varphi = \cos\gamma = 0$ невозможен, следовательно $v_P = 0$, т.е. точка *P* является мгновенным центром скоростей.

Таким образом, движение плоской фигуры (в случае, когда оно является непоступательным) можно рассматривать как последовательность его мгновенных поворотов вокруг мгновенного центра скоростей.

Некоторые дополнительные сведения. Обозначим через ω_P угловую скоростью вращения плоской фигуры (рис. 3.6) относительно мгновенного центра скоростей P. В соответствии с формулой Эйлера, $\omega_P = \dfrac{v_B}{BP}$, $\omega_P = \dfrac{v_A}{AP}$. Приравнивая правые части этих уравнений, находим

$$\frac{v_B}{BP} = \frac{v_A}{AP}. \tag{3.7}$$

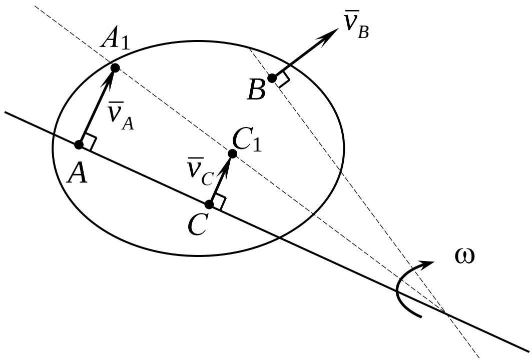


Рис. 3.6. Скорости точек и мгновенный центр скоростей

Определим теперь скорость произвольной точки C, лежащей на прямой AP (рис. 3.6). Точка C совершает вращательное движение вокруг полюса P. Так как точка P является мгновенным центром скоростей, то вектор $\bar{v}_c$ направлен перпендикулярно к прямой AP. Следовательно, $v_C = \omega_P \cdot CP$ и поэтому $\omega_P = \dfrac{v_C}{CP}$. Учитывая, что $\omega_P = \dfrac{v_A}{AP}$, получаем

$$\frac{v_C}{CP} = \frac{v_A}{AP}.$$

Если обозначить концы векторов $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_c$, соответственно, буквами A_1 и C_1, то последняя пропорция может быть записана в виде $\dfrac{CC_1}{CP}=\dfrac{AA_1}{AP}$, что свидетельствует о подобии треугольников ΔAPA_1 и ΔCPC_1. Таким образом получается, что точка C_1 лежит на прямой, соединяющей точки A_1 и P.

Примеры определения кинематических характеристик.

Пример 1. Колесо радиуса r движется по горизонтальной поверхности без скольжения со скоростью v_0. Определить величину и направление скоростей точек A и C (рис. 3.7, а).

Решение. Точка касания движущегося колеса и неподвижной поверхности P, является мгновенным центром скоростей, т. к. принадлежит и колесу и поверхности, а следовательно, в данный момент времени ее скорость $v_P=0$.

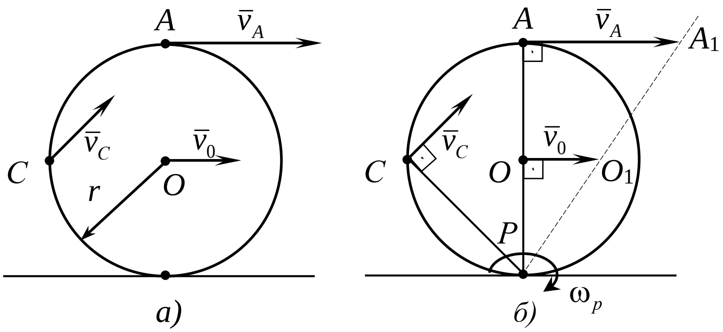


Рис. 3.7. Скорости точек при качении колеса

Проведем следующие построения. Соединим прямыми линиями точки A и P, O_1 и P, P и C. Точка P является мгновенным центром скоростей, поэтому скорость $\bar{v}_A$ направлена перпендикулярна к линии AP, а конец вектора $\bar{v}_0$ (точка O_1) находится на прямой $A_1\,P$. Можно считать, что $AA_1=v_A$. Из подобия треугольников APA_1 и OPO_1 получаем, что $\dfrac{v_A}{2r}=\dfrac{v_o}{r}$. Следовательно,

$$v_A=2v_0.$$

Скорости $\bar{v}_0$ и $\bar{v}_C$ направлены перпендикулярно к линиям AP и CP. Следовательно, $v_0 = \omega_P \cdot r$, $v_c = \omega_P \cdot CP$. Учитывая, что $CP = \sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$, из последних двух уравнений получаем

$$\omega_P = \frac{v_0}{r}, \qquad v_c = \frac{v_0}{r} r\sqrt{2} = v_0\sqrt{2}.$$

Пример 2. Кривошипно-шатунный механизм (Рис. 3.8), состоит из двух звеньев. Звено $OA = 0{,}4\,м$ вращается вокруг неподвижной точки O с угловой скоростью $\omega_0 = 2$ $сек^{-1}$. Звено $AB = 0{,}4\,м$ в точке B соединено с поршнем, движущимся горизонтально со скоростью v_B. Точки O и B лежат на одной горизонтальной прямой. Звенья OA и AB наклонены к прямой OB под одинаковым углом $\alpha = 30^0$. Точка C находится на середине звена AB ($AC = CB$). Определить скорости точек A, B и C.

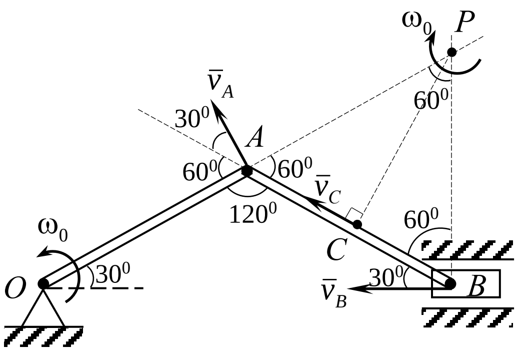


Рис. 3.8. Кривошипно-шатунный механизм

Решение. Точка A движется по окружности радиуса OA. По формуле Эйлера с*корость этой точки* $v_A = \omega_0 \cdot OA = 2\,сек^{-1} \cdot 0{,}4\,м = 0{,}8\,м/сек$.

Точки A и B принадлежат прямой AB, следовательно, проекции скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ на прямую линию AB должны быть равны: $v_B \cos 30^0 = v_A \cos 30^0$. Следовательно, $v_B = v_A = 0{,}8\,м/сек$.

Проведем перпендикулярно к векторам $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ линии, которые пересекутся в полюсе P звена AB (Рис. 3.8). Треугольник APB является равносторонним треугольником, точка C находится на середине отрезка AB, следовательно, PC является медианой и высотой треугольника APB. В этом случае линия PC перпендикулярна к AC. Так как тоска P - полюс P звена AB, то вектор скорости точки $\bar{v}_C$ C будет направлен по линии CA. Проектируя $\bar{v}_c$ и $\bar{v}_B$ на AB, получим $v_C = v_B \cos 30^0 = 0{,}8\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}68\,м/сек.$

Пример 3. Линейка AB скользит по вертикальной и горизонтальной стенкам (рис. 3.9,*а*). Длина линейки $AB = 4\,м$, $AC = CB$, скорость точки A равна $v_A = 10\,м/сек.$ Определить скорости точек B и C для положения, показанного на рис. 3.9,*а*.

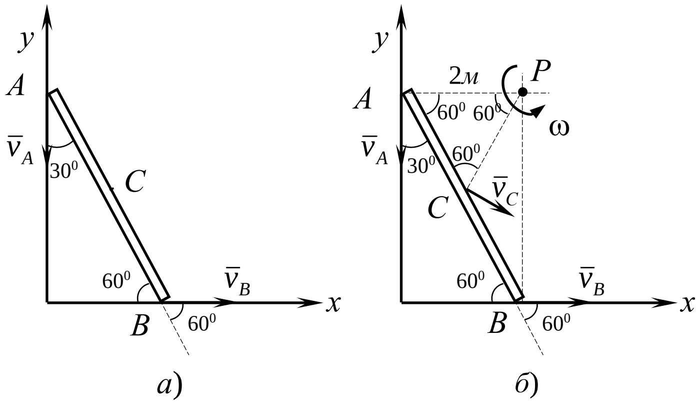


Рис. 3.9. Линейка, скользящая по стенкам

Решение. Точки A и B принадлежат прямой AB, следовательно, проекции скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ на прямую линию AB должны быть равны: $v_B \cos 60^0 = v_A \cos 30^0$. Из этого уравнения находим $v_B = 17\ м/сек.$

Восстанавливая из точек A и B перпендикуляры к векторам скоростей $\bar{v}_A$ и $\bar{v}_B$ определим полюс P звена AB. Соединим прямой линией точки P и C. Треугольник APC является равнобедренным, т. к. $AC = AP = 2\ м$. Угол PAC равен 60°, следовательно, треугольник APC является равносторонним треугольником и сторона $PC = 2\,м$.

По формуле Эйлера $v_A = \omega_P \cdot AP$, откуда находим $\omega_P = \dfrac{v_A}{AP} = 5\,сек^{-1}$.

Учитывая, что вектор $\bar{v}_C$ перпендикулярен отрезку PC, получаем $v_C = \omega_P \cdot PC = 2м \cdot 5\,сек^{-1} = 10\,м/сек.$

Порядок выполнения работы

1. Ознакомление с теоретическими соотношениями.
2. Выбор, в соответствии со своим вариантом, плоского механизма и исходных данных.
3. Определение для заданного положения механизма скорости точек *B* и *C*, а также угловой скорости звена, к которому эти точки принадлежат.
4. Составление отчета, содержащего основные теоретические соотношения и описание расчетов.

Исходные данные и варианты плоских механизмов представлены в таблице 3.1 и на рисунке 3.10.

Контрольные вопросы.

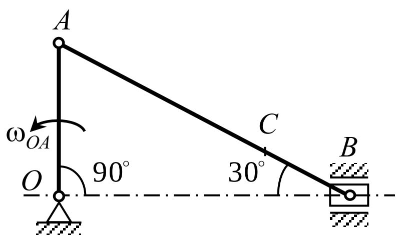
1. Что такое плоское движение?
2. Вращательное движение. Угловая скорость.
3. Что такое полюс?
4. Способы определения положения МЦС (мгновенного центра скоростей).
5. Каковы функции кривошипа и шатуна?
6. Назовите примеры использования кривошипно-шатунного механизма.
7. Какова связь между линейной скоростью движения точки тела и угловой скоростью вращения плоского тела относительно МЦС?
8. В каком случае при плоском движении положение МЦС неопределенно?

9. Как определяются направления линейных скоростей точек тела при плоском движении?
10. Может ли точка P (МЦС) располагаться вне тела?

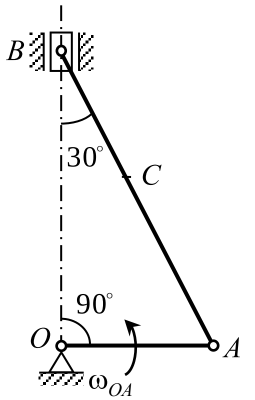
Таблица 3.1.

№ варианта	Размеры, см				ω_{OA}, рад/с	ω_I, рад/с	v_A, см/с
	OA	*r*	*AB*	*AC*			
1	35	-	-	45	4	-	-
2	25	-	-	20	1	-	-
3	40	15	-	6	1	1	-
4	35	-	75	60	5	-	-
5	25	-	80	20	1	-	-
6	25	-	55	40	2	-	-
7	45	15	-	8	3	12	-
8	10	-	10	5	2	-	-
9	30	-	60	15	3	-	-
10	20	15	-	10	1	2,5	-
11	35	-	60	40	4	-	-
12	25	-	35	15	2	-	-
13	20	-	70	20	1	-	-
14	20	15	-	10	2	1,2	-
15	40	-	-	20	5	-	-
16	20	-	50	25	1	-	-
17	40	15	-	8	2	-	-
18	30	15	-	8	3	-	-
19	-	30	-	-	-	-	50
20	-	-	30	15	-	-	10
21	-	-	30	20	-	-	20
22	40	15	-	8	1	-	-
23	55	20	-	-	2	-	-
24	-	30	-	10	-	-	80
25	-	-	60	20	-	-	5
26	-	15	-	5	-	-	60
27	12	-	35	15	4	-	-
28	35	-	-	25	4	-	-

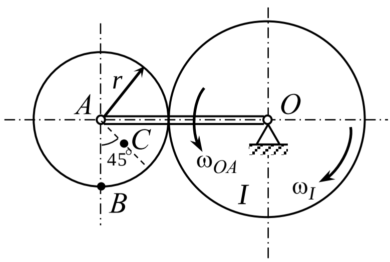
1


A
C
B
ωOA
O
90°
30°

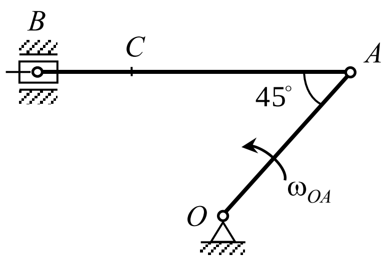
2


B
30°
C
90°
O
A
ωOA

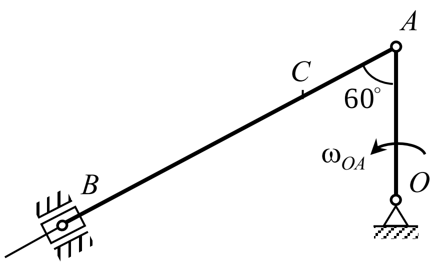
3


r
A
O
C
45°
ωOA
B
I
ωI

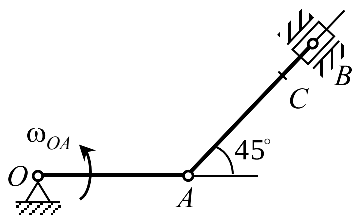
4


B
C
A
45°
ωOA
O

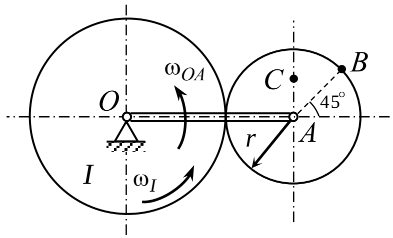
5


A
C
60°
ωOA
O
B

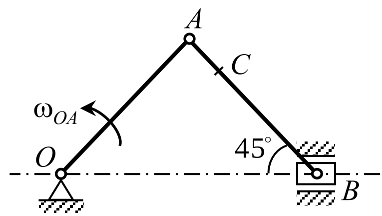
6


B
C
45°
ωOA
O
A

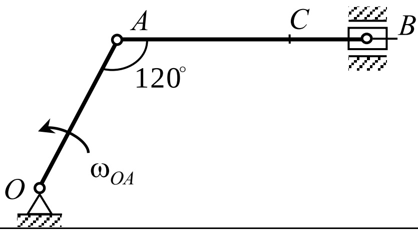
7


ω_OA
C
B
O
45°
r
A
I
ω_I

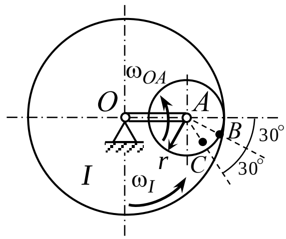
8


A
C
ω_OA
45°
O
B

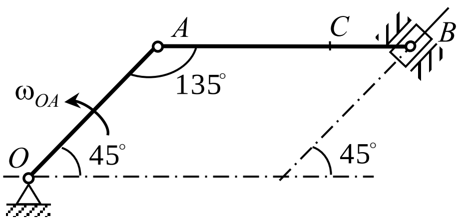
9


A
C
B
120°
ω_OA
O

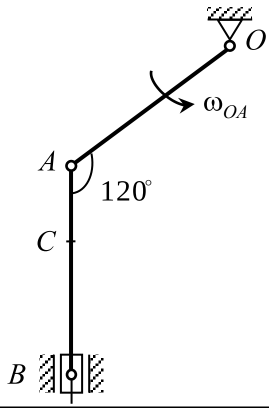
10

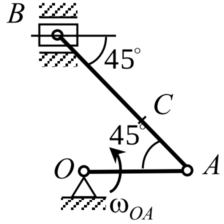
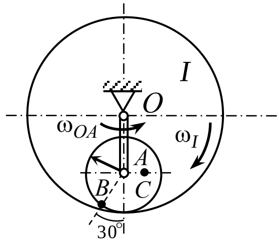
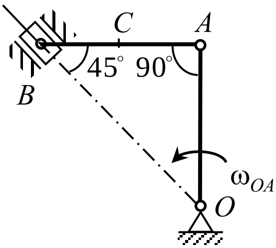
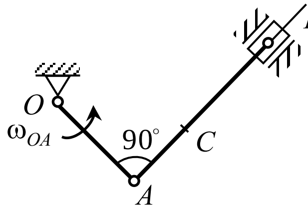
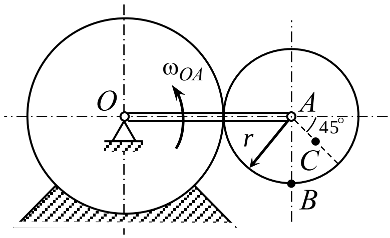
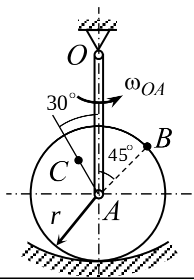

ω_OA
O
A
B
30°
r
C
30°
I
ω_I

11

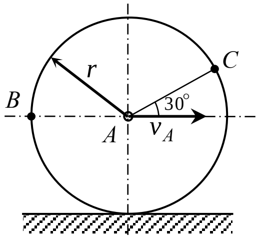

A
C
B
135°
ω_OA
O
45°
45°

12

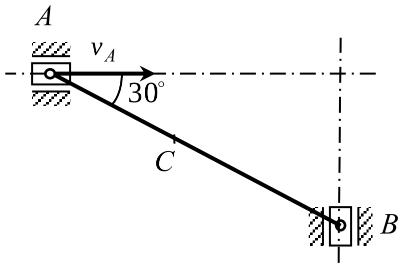

O
ω_OA
A
120°
C
B

13 	**14** 
15 	**16** 
17 	**18** 

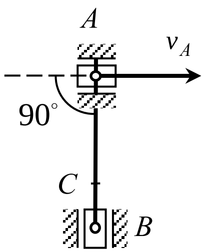
19



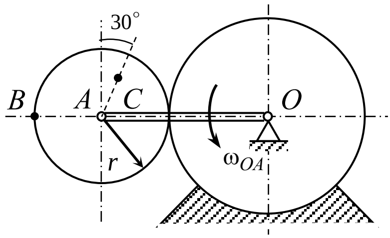
20



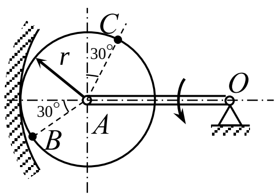
21



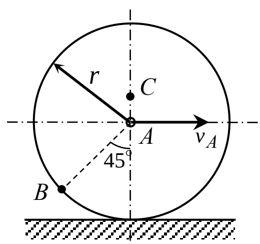
22



23



24



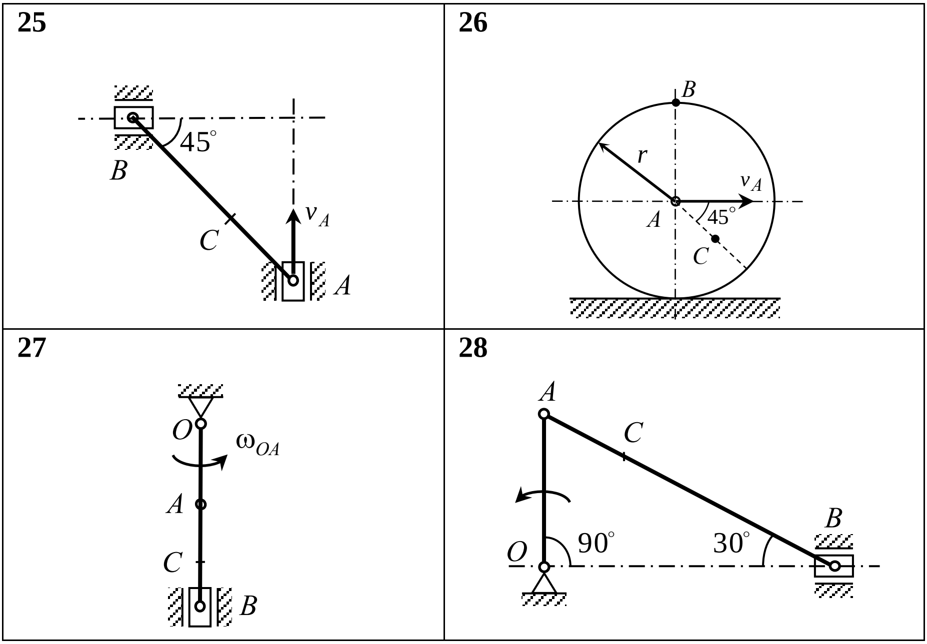


Рис. 3.10. Варианты плоских механизмов

Лабораторная работа №4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СООТНОШЕНИЯ СКОРОСТЕЙ СПЛОШНОГО И ПУСТОТЕЛОГО ЦИЛИНДРОВ ПРИ СКАТЫВАНИИ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Цель работы: Используя теорему об изменении кинетической энергии твердого тела определить соотношение скоростей сплошного и пустотелого цилиндров при скатывании по наклонной плоскости. Провести эксперимент и убедиться в качественном соответствии полученных теоретических и экспериментальных результатов.

Содержание работы: Два цилиндра с одинаковыми массами $\left(m_1 = m_2 = m\right)$ и радиусами $\left(R_1 = R_2 = R\right)$, скатываются без скольжения по наклонной плоскости. Первый цилиндр сплошной. Второй цилиндр полый, имеет поперечное сечение в виде кольца малой толщины. Можно считать, что у такого полого цилиндра масса равномерно распределенной по внешней цилиндрической m поверхности.

Требуется найти зависимость между скоростями центров масс цилиндров при скатывании их по наклонной плоскости с одной и той же высоты. В начальный момент цилиндры находятся в состоянии покоя.

После определения соотношения скоростей следует провести эксперимент и определить, какой из цилиндров скатывается по наклонной плоскости быстрее.

В соответствии с теоремой об изменении кинетической энергии, для каждого из цилиндров должно выполняться уравнение:

$$T - T_0 = W . \tag{4.1}$$

Здесь T - кинетическая энергия тела; T_0 - кинетическая энергия тела в начальный момент движения; W - работа внешних сил.

При скатывании цилиндра по неподвижной плоскости он совершает плоскопараллельное движение. При данном виде движения кинетическая энергия тела состоит из суммы энергии поступательного движения со скоростью центра масс и энергии вращательного движения вокруг центра масс:

$$T = T_{пост} + T_{вращ} . \tag{4.2}$$

При поступательном движении все точки тела движутся с одинаковыми скоростями, равными скорости центра масс, поэтому

$$T_{пост} = \frac{mv_c^2}{2}, \tag{4.3}$$

где – масса твердого тела.

Кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости.

$$T_{вращ} = \frac{J_z \omega^2}{2}, \tag{4.4}$$

где J – момент инерции твердого тела, ω – величина угловой скорости тела.

Работа силы тяжести *W*, равна произведению силы на величину вертикального перемещения центра тяжести (центра масс) тела h_c :

$$W = \pm F h_c = \pm mgh_c. \tag{4.5}$$

Работа положительна, если начальное положение точки центра тяжести выше конечного (точка опускается), и отрицательна, если начальное положение точки ниже конечного (точка поднимается). Величина работы силы тяжести не зависит от длины пути и вида траектории движения точки.

Так как цилиндры в начальный момент движения находятся в состоянии покоя, то $T_0 = 0$. Следовательно, с учетом принятых обозначений (4.2) – (4.5), уравнение (4.1) для каждого из цилиндров можно записать в следующем виде:

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{J_1\omega_1^2}{2} - 0 = mgh; \qquad \frac{mv_2^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2} - 0 = mgh. \tag{4.6}$$

При плоском непоступательном движении тела в каждый момент времени существует точка, скорость которой равна нулю. Такая точка называется *мгновенным центром скоростей* (МЦС).

Пусть в некоторый момент времени t точки A и B плоской фигуры имеют скорости $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$, не параллельные друг другу (рис.4.1). Проведем через точки A и B прямые, перпендикулярные к векторам $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_B$. Точка P, лежащая на пересечении этих прямых, будет мгновенным центром скоростей, так как скорость этой точки

$\bar{\upsilon}_p = 0$. Для доказательства этого утверждения спроектируем скорости $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_p$ на прямые AP и BP. Проектируя скорости на отрезок прямой AP, получим

$$\upsilon_p \cos\alpha = 0. \tag{4.7}$$

Проектируя скорости $\bar{\upsilon}_A$ и $\bar{\upsilon}_p$ на отрезок прямой *BP*, находим, что

$$\upsilon_p \cos\beta = 0. \tag{4.8}$$

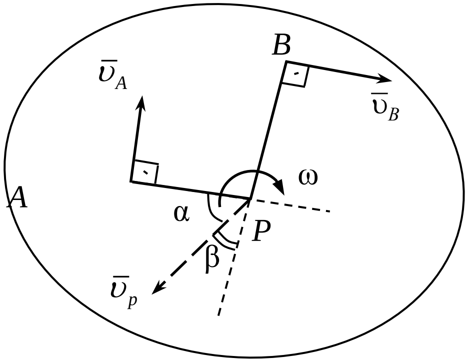


Рис. 4.1. МЦС плоской фигуры

Равенства (4.7), (4.8) будут выполняться, если $\cos\alpha = \cos\beta = 0$, либо $\upsilon_p = 0$. Вариант $\cos\alpha = \cos\beta = 0$ невозможен, следовательно, $\upsilon_p = 0$, т.е. точка P является мгновенным центром скоростей.

Отметим, что плоское движение тела (в случае, когда оно является непоступательным) можно рассматривать как совокупность мгновенных поворотов его вокруг мгновенного центра скоростей.

При качении колеса по неподвижной поверхности мгновенным центром скоростей является точка сцепления колеса с поверхностью (рис. 4.2). Если скорость центра колеса известна, то можно определить мгновенную угловую скорость ω, т.к. скорость точки плоской фигуры при вращательном движении пропорциональна расстоянию от точки до полюса. Учитывая, что точка P – мгновенный центр скоростей, получим, что скорость центра тяжести O цилиндра $\upsilon = OP\,\omega$, где ω

– мгновенная угловая скорость цилиндра в данный момент времени.

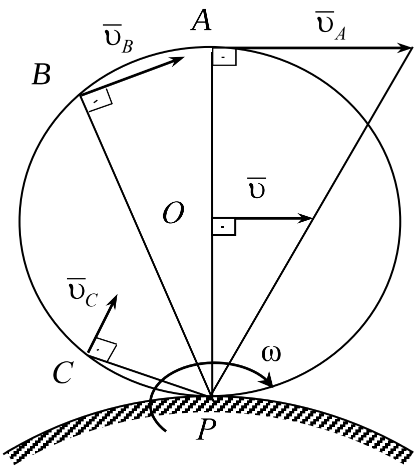


Рис. 4.2. Скорости точек при качении колеса по неподвижной поверхности

Следовательно, $\omega = \dfrac{\upsilon}{OP}$. На основе этого равенства, получается, что мгновенная угловая скорость сплошного и полого цилиндров в любой момент времени вычисляется по формулам:

$$\omega_1 = \frac{\upsilon_1}{R}, \qquad \omega_2 = \frac{\upsilon_2}{R}. \tag{4.9}$$

Моментом инерции тела относительно оси называется скалярная величина, равная сумме произведений массы каждой точки тела на квадрат расстояния от этой точки до оси.

Вычислим момент инерции J полого цилиндра относительно продольной оси Oz. Цилиндр имеет длину l и массу m. Его поперечное сечение – кольцо, внешний радиус которого равен R, а внутренний – r (рис. 4.3).

Выделим в цилиндре элементарный полый цилиндр, поперечное сечение которого – кольцо с внутренним радиусом ρ и толщиной $d\rho$ (рис. 4.3). Масса элементарного цилиндра $dm = \gamma dV$, где γ – удельный вес, $dV = ldA$ – элементарный объем, $dA = 2\pi\rho d\rho$ – элементарная площадь. Учитывая, что площадь поперечного сечения пустотелого цилиндра $A = \pi(R^2 - r^2)$, находим $\gamma = \frac{m}{V} = \frac{m}{Al} = \frac{m}{[\pi(R^2 - r^2)l]}$. Следовательно, для элементарного полого цилиндра, $dm = \gamma dV = \frac{2\pi\rho d\rho m}{\pi(R^2 - r^2)} = \frac{2\rho d\rho m}{(R^2 - r^2)}$.

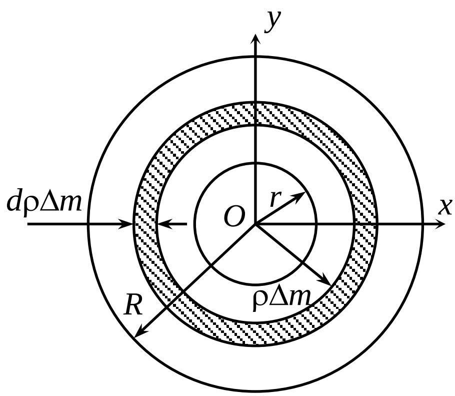


Рис. 4.3. Поперечное сечение полого цилиндра

Момент инерции элементарного цилиндра $dJ = \rho^2 dm$. С учетом полученного выражения для dm, находим $dJ = \frac{2\rho^3 d\rho\, m}{\left(R^2 - r^2\right)}$. Интегрируя выражение для dJ по ширине кольца (от r до R), получим момент инерции полого цилиндра:

$$J = \int_r^R dJ = \frac{2m}{R^2 - r^2}\int_r^R \rho^3 d\rho = \frac{2m\left(R^4 - r^4\right)}{4\left(R^2 - r^2\right)} = \frac{m\left(R^2 + r^2\right)}{2} \quad (4.10)$$

Для сплошного цилиндра $r = 0$, для полого цилиндра, толщина которого мала, можно полагать $r = R$. Подставляя эти значения r в (4.10), находим, что моменты инерции цилиндров вычисляются по формулам:

$$J_1 = \frac{mR^2}{2}, \qquad J_2 = mR^2. \tag{4.11}$$

Подставляя выражения (4.9), (4.11) в уравнения (4.6), после преобразований получим

$$\frac{3}{4} m\upsilon_1^2 = mgh, \qquad m\upsilon_2^2 = mgh.$$

Приравнивая левые части этих уравнений, находим, что $\frac{3}{4}\upsilon_1^2 = \upsilon_2^2$. Следовательно,

$$\upsilon_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\upsilon_1 = 0{,}866\,\upsilon_1. \tag{4.12}$$

Получилось, что скорость скатывания второго цилиндра меньше, чем у первого.

Эксперимент, подтверждающий справедливость вывода, следующего из формулы (4.12), проводится с использованием установки, показанной на рисунке 4.4.

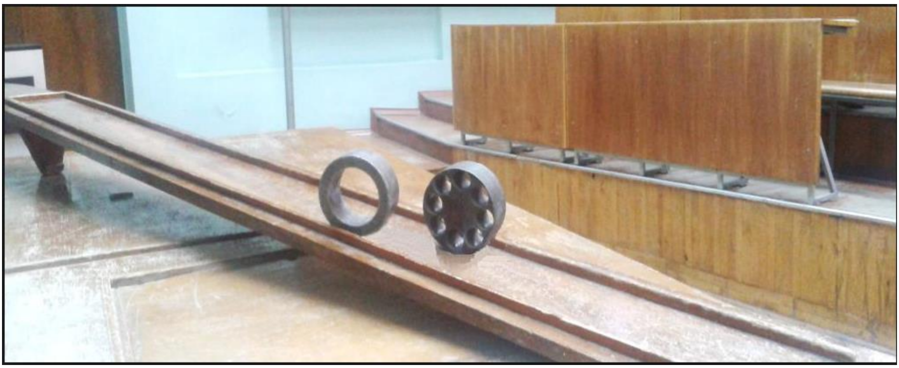


Рис. 4.4. Установка для эксперимента.

Порядок выполнения работы.

1. Ознакомление с теоретическими соотношениями.
2. Вывод формулы (4.12).
3. Проведение эксперимента.
4. Составление отчета, содержащего основные теоретические соотношения и описание эксперимента.

Контрольные вопросы.

1. Какую величину называют кинетической энергией механической системы?
2. Какова размерность кинетической энергии?
3. Из каких движений может состоять плоскопараллельное движение фигуры?
4. Запишите формулы для вычисления кинетической энергии системы при поступательном и вращательном движении вокруг неподвижной оси.
5. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии механической системы.
6. Запишите выражение кинетической энергии при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движении твердого тела.
7. Что такое момент инерции тела относительно оси?
8. Запишите формулы для вычисления моментов инерции сплошного и пустотелого цилиндров.
9. Запишите формулу для вычисления работы силы тяжести твердого тела.
10. Какую точку плоской фигуры называют мгновенным центром скоростей?
11. Как определить скорость любой точки твердого тела при плоскопараллельном движении?
12. В каком случае плоское движение тела можно рассматривать как совокупность мгновенных поворотов его вокруг мгновенного центра скоростей?
13. Как определить скорости точек катящегося колеса?

Лабораторная работа № 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ И ПРОЙДЕННОГО ПУТИ РАКЕТЫ

Содержание работы: Ракета с переменной массой движется от старта до конца участка разгона вертикально вверх в однородном поле силы тяжести под действием реактивной силы тяги.

Вес ракеты $G = m(t)g$, где t – время, g – ускорение свободного падения, m - масса, которая во время полета уменьшается. Когда скорость ракеты и относительная скорость истечения газов много меньше скорости света, справедлива формула Циолковского:

$$m = m_0 e^{-\beta t}$$

Здесь m_0 – величина массы ракеты в начале движения, β – постоянная величина, определяющая скорость изменения массы.

Реактивная сила тяги $F_{тяги}$, направленная по линии движения ракеты, вычисляется по формуле

$$F_{тяги} = -\dot{m} v_r ,$$

где v_r - относительная скорость истечения газов из сопла двигателя,

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = -\beta m_0 e^{-\beta t} .$$

При движении на ракету также действуют сила сопротивления воздуха R, которая пропорциональна квадрату скорости движения v, и сила инерции $F_Э$:

$$R = \alpha v^2 , \qquad F_Э = m \frac{dv}{dt} .$$

Здесь α – коэффициент пропорциональности.

Проектируя действующие на ракету силы $F_{тяги}, G, R, F_Э$ на направление линии движения, находим

$$F_{тяги} - G - R - F_Э = 0 .$$

Подставляя в это уравнение выражения для сил $F_{тяги}, G, R, F_Э$ и $\dot{m} = \dfrac{dm}{dt} = -\beta m_0 e^{-\beta t}$, получим дифференциальное уравнение движения ракеты:

$$m_0 e^{-\beta t} \frac{dv}{dt} = m_0 \beta e^{-\beta t} v_r - m_0 e^{-\beta t} g - \alpha v^2 . \qquad (5.1)$$

Разделив левую и правую часть равенства (1) на $m_0 e^{-\beta t}$, имеем

$$\frac{dv}{dt} = \beta v_r - g - \frac{\alpha v^2}{m_0} e^{\beta t} . \qquad (5.2)$$

Обозначим через $x(t)$ пройденный путь ракеты. В этом случае скорость ракеты $v = \dfrac{dx(t)}{dt}$. Подставляя это выражение для v в (2), дифференциальное уравнение движения ракеты можно представить в следующем виде:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \beta v_r - g - \frac{\alpha}{m_0} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 e^{\beta t} . \qquad (5.3)$$

Уравнение (3) содержит производную второго порядка от $x(t)$, поэтому при его интегрировании возникают две произвольные постоянные. Для определения этих произвольных постоянных задают величины перемещения ракеты x_0 и ее скорости v_0 в начальный момент времени (при $t = 0$, в момент старта):

$$x(0) = x_0 , \qquad \frac{dx(0)}{dt} = v_0 . \qquad (5.4)$$

Условия (4), определяющие значения искомой величины $x(0)$ и ее производной $\dfrac{dx(0)}{dt}$ в начальный момент времени (при $t = 0$) называются *начальными условиями*.

Если ракета стартует с земли, то $x_0 = 0$, $v_0 = 0$. В случае же, когда ракета является отделяемым модулем, x_0 и v_0 не могут быть равными нулю.

Аналитического решения уравнения (5.3) не существует. Решение таких уравнений можно получить только с помощью численных методов и компьютерных программ. Например, можно использовать численный метод Эйлера или метод Рунге-Кутта.

Аналитическое решение аналогичной задачи. Аналитическое решения уравнения вида (5.3) можно получить в частном случае, без учета силы сопротивления воздуха, считая $\alpha = 0$. В этом случае, уравнение (5.3) принимает вид

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \beta v_r - g \ . \tag{5.5}$$

Полагаем, что в начальный момент времени (при $t = 0$) перемещение ракеты $x(0)$ и ее скорость $v(0) = \frac{dx(0)}{dt}$ равны нулю. Следовательно, начальные условия (4) в этом случае можно записать так:

$$x(0) = 0, \qquad \frac{dx(0)}{dt} = 0. \tag{5.6}$$

Интегрируя выражение (4), с учетом того, что $\beta v_r - g = const$, получим

$$\frac{dx(t)}{dt} = (\beta v_r - g)t + c_1. \tag{5.7}$$

Интегрируя (5.7), находим

$$x(t) = (\beta v_r - g)\frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2. \tag{5.8}$$

Для определения постоянных интегрирования c_1, c_2 используем начальные условия (5.6). Подставляя выражения (5.7), (5.8) в (5.6), получим $c_1 = 0, c_2 = 0$. Следовательно, пройденный путь ракеты и ее скорость в данном случае вычисляются по формулам

$$x(t) = (\beta v_r - g)\frac{t^2}{2}, \qquad v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = (\beta v_r - g)t \tag{5.9}$$

Численное решение задачи. Решение уравнения (5.3), при начальных условиях (5.4), можно найти, используя компьютерную программу.

Полагаем $v_r = 2700\ м/с$, $\alpha = 1{,}06\ кг/м$, $m_0 = 11400\ кг$, $\beta = 0{,}03\ 1/с$.

Время, для которого нужно определить пройденный путь ракеты и ее скорость $t_1 = 21{,}4\ с$.

Для получения решения в компьютерную программу вводятся исходные (рис. 5.1) и начальные (рис. 5.2) данные.

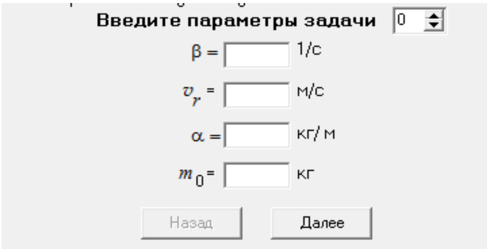


Рис. 5.1. Окно для исходных данных

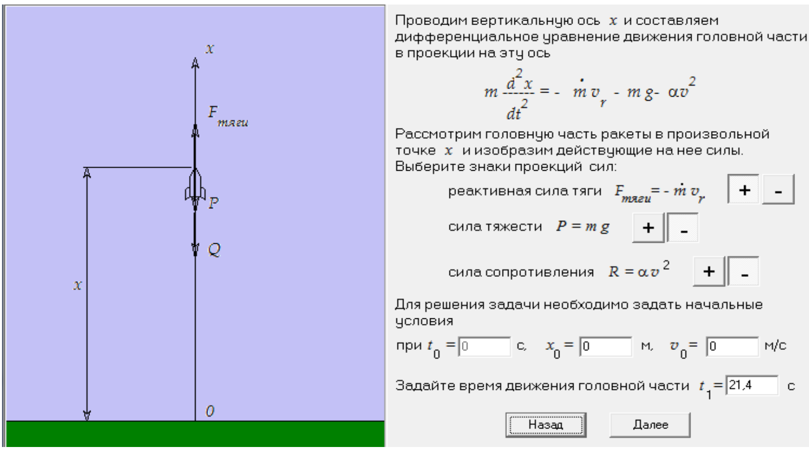


Рис. 5.2. Окно для начальных данных

Результаты численного решения представляются в следующем виде:

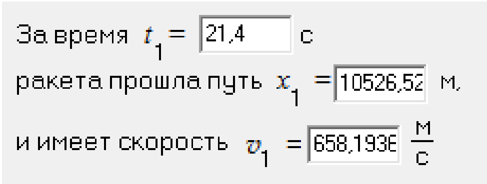


Рис. 5.3. Результаты решения

При выполнении лабораторной работы требуется определить скорость ракеты v_1 и пройденный ею путь x_1 за время t_1 при различных начальных условиях.

Исходные данные для расчетов вычисляются по формулам:

$$v_r = 2000 + 50 \cdot n \ (м/с), \ \alpha = 1{,}2 - n \cdot 0{,}01 \, (кг/м),$$

$$m_0 = 10000 + n \cdot 100 \ (кг), \ \beta = 0{,}03 \ (1/с) \ , \ t_1 = 20 + n \cdot 0{,}1 \ (с),$$

где n - заданное число (номер варианта).

Выбор величин x_0, v_0 определяется в задании на выполнение работы.

Порядок выполнения работы.

1. Ознакомление с теоретическими соотношениями.
2. Используя аналитическое решение (5.9), полученное без учета силы сопротивления воздуха, определяются значения $x^A(t_1) = x(t_1)$ и $v^A(t_1) = v(t_1)$.
3. Задавая нулевые начальные условия ($x_0 = 0$, $v_0 = 0$) и используя численное решение уравнения (5.3), находятся величины $x_1^Ч(t_1) = x(t_1)$ и $v_1^Ч(t_1) = v(t_1)$ с учетом силы сопротивления воздуха.
4. Задавая в начальных условиях $x_0 = 5000(1 + 0{,}05)\,n$ $(м)$, $x_0 = 30(1 + 0{,}05)\,n$ $(м/с)$ и используя численное решение уравне-

ния (5.3), находятся величины $x_1^{Ч}(t_1) = x(t_1)$ и $v_1^{Ч}(t_1) = v(t_1)$ с учетом силы сопротивления воздуха.

5. Проводится анализ полученных результатов, и формулируются выводы.
6. Составляется отчет, содержащий основные теоретические соотношения, описание сделанных расчетов, анализа и выводов.

Контрольные вопросы.

1. Запишите формулу Циолковского.
2. Что такое начальные условия?
3. Как определяется реактивная сила тяги ракеты?
4. Как определяется сила сопротивления воздуха при движении ракеты?
5. Выведите дифференциальное уравнение движения ракеты переменной массы.
6. Сколько произвольных констант содержит решение уравнения движения ракеты и как определяются значение этих констант.
7. Сформулируйте постановку задачи движения ракеты без учета силы сопротивления воздуха.
8. Сформулируйте закон изменения скорости и закон движения ракеты с учетом силы сопротивления воздуха.
9. Используя формулы (9), покажите какой размерности получается величина $x(t)$.
10. Используя формулы (9), покажите какой размерности получается величина $v(t)$.

Лабораторная работа №6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГОЛОВНОЙ ЧАСТИ РАКЕТЫ

Содержание работы: На высоте h над поверхностью земли от движущейся вертикально вверх ракеты отделяется головная часть с аппаратурой для метеорологических наблюдений. Масса отделившейся части равна m, скорость ее в момент отделения v_0 (Рис. 6.1).

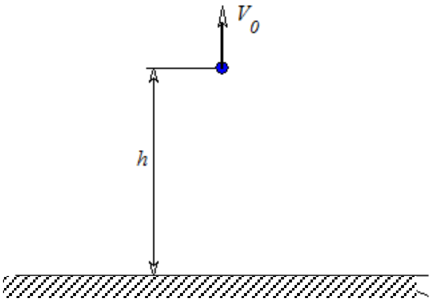


Рис. 6.1. Положение и скорость головной части ракеты при отделении.

На головную часть ракеты, продолжающую двигаться вертикально вверх, действуют силы сопротивления воздуха R, тяжести P, инерции $F_Э$.

Сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости движения v:

$$R = \alpha v^2. \tag{6.1}$$

Сила тяжести P обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра земли:

$$P_{зем} = \frac{k}{\left(x + r_{зем}\right)^2}. \tag{6.2}$$

Здесь x – расстояние от поверхности земли до ракеты, $r_{зем} = 6370\,км$ – радиус земли, k – коэффициент пропорциональности.

Сила инерции:

$$F_Э = m\frac{dv}{dt}\ , \tag{6.3}$$

где t – время.

Требуется определить расстояние, которое проходит головная часть ракеты от точки отделения до полной остановки, а также время прохождения этого расстояния.

При решении данной задачи следует обратить внимание, что сила тяжести (6.2) не равна силе тяжести на земле:

$$P_{зем} = mg\,, \tag{6.4}$$

Для определения в формуле (6.2) коэффициента пропорциональности k используем условие, что на земле, при $x = 0$.

$$P_{зем} = P(0)\,. \tag{6.5}$$

Подставляя выражения (6.2) и (6.4) в (6.5), с учетом того, что при $x = 0$, $P_{тяж}\left(0\right) = \dfrac{k}{\left(0 + r_{зем}\right)^2}$, получим $mg = \dfrac{k}{r_{зем}^2}$. Следовательно, $k = r_{зем}^2\, mg$ и формулу (2) можно представить в виде

$$P_{зем} = \frac{r_{зем}^2 mg}{\left(x + r_{зем}\right)^2}\,. \tag{6.6}$$

Проектируя действующие на ракету силы $R,\, P,\, F_Э$ на направление линии движения, находим

$$-R - P - F_Э = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражения для $R,\, P,\, F_Э$, получим дифференциальное уравнение движения головной части ракеты:

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{r_{зем}^2\, mg}{\left(x + r_{зем}\right)^2} - \alpha v^2\,. \tag{6.7}$$

Учитывая, что $x\left(t\right)$ пройденный путь, а скорость $v = \dfrac{dx\left(t\right)}{dt}$, дифференциальное уравнение движения ракеты (6.7) можно представить в следующем виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{r_{зем}^2 mg}{\left(x + r_{зем}\right)^2} - \alpha\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \qquad (6.8)$$

Уравнение (8) содержит производную второго порядка по $x(t)$, поэтому при его интегрировании возникают две произвольные постоянные. Для определения этих произвольных постоянных задают величины перемещения головной части ракеты x_0 и ее скорости v_0 при отделении от ракеты (полагается, что при этом $t = 0$):

$$x(0) = x_0, \qquad \frac{dx(0)}{dt} = v_0. \qquad (6.9)$$

Условия (6.9) называются *начальными условиями*. В этих условиях задаются значения $x(t)$ и ее производной $\dfrac{dx(t)}{dt}$ в начальный момент движения головной части (при $t = 0$).

Аналитического решения уравнения (6.8) не существует. Решение таких уравнений получают с помощью численных методов и компьютерных программ.

Аналитическое решение аналогичной задачи. Аналитическое решение уравнения вида (6.7) можно получить в частном случае, без учета того, что сила тяжести P обратно пропорциональна квадрату расстояния от центра земли. В этом случае следует полагать $x = 0$ и по формуле (6) получается $P_{тяж} = mg$, а уравнение (6.7) принимает вид

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}\left(v^2 + \frac{m}{\alpha}g\right).$$

Разделив переменные и проинтегрировав это соотношение, получим

$$\int \frac{dv}{\left(v^2 + \frac{m}{\alpha}g\right)} = -\frac{\alpha}{m}\int dt \ + c_1.$$

Вычисляя интегралы, находим

$$\sqrt{\frac{\alpha}{mg}} arctg\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v\right) = -\frac{\alpha}{m}t + c_1. \qquad (6.10)$$

В соответствии с начальными условиями (6.9), при $t=0$, скорость $v=\dfrac{dx(0)}{dt}=v_0$. Подставляя $t=0$ и $v=v_0$ в (6.10), находим постоянную интегрирования c_1:

$$c_1=\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}arctg\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v_0\right).$$

Подставив это выражение для c_1 в равенство (6.10), получим

$$arctg\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v\right)=-\sqrt{\frac{\alpha g}{m}}t+arctg\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v_0\right).$$

Следовательно, $\sqrt{\dfrac{\alpha}{mg}}v=tg\left(-\sqrt{\dfrac{\alpha g}{m}}t+arctg\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{mg}}v_0\right)\right)$ или

$$v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{mg}{\alpha}}tg\left(-\sqrt{\frac{\alpha g}{m}}t+arctg\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v_0\right)\right) \qquad (6.11)$$

Разделив в последнем уравнении переменные и проинтегрировав, находим

$$\int dx=\sqrt{\frac{mg}{\alpha}}\int tg\left(-\sqrt{\frac{\alpha g}{m}}t+arctg\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v_0\right)\right)dt\,.$$

Вычисляя входящие в последнее уравнение интегралы, получим формулу для вычисления перемещения головной части ракеты:

$$x=-\sqrt{\frac{mg}{\alpha}}\ln\left|\mathrm{Cos}\left(-\sqrt{\frac{\alpha g}{m}}t+arctg\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v_0\right)\right)\right|+c_2\,. \qquad (6.12)$$

В соответствии с начальными условиями (9), при $t=0$, $x(0)=x_0$. Подставляя $t=0$ и $x=x_0$ в (12), находим постоянную интегрирования

$$c_2=x_0+\sqrt{\frac{mg}{\alpha}}\ln\left|\mathrm{Cos}\left(arctg\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v_0\right)\right)\right|.$$

С учетом этого выражения уравнение (6.12) принимает следующий вид:

$$x=-\sqrt{\frac{mg}{\alpha}}\ln|\mathrm{Cos}\left(-\sqrt{\frac{\alpha g}{m}}t+\arctan\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v_0\right)\right)|+$$

$$+x_0+\sqrt{\frac{mg}{\alpha}}\ln|\mathrm{Cos}\left(arctg\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v_0\right)\right)|. \qquad (6.13)$$

Чтобы определить время t_1, для которого скорость $v(t_1)=0$, в формуле (11) полагается $t=t_1$, $v=0$:

$$tg\left(-\sqrt{\frac{\alpha g}{m}}t_1+arctg\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v_0\right)\right)=0.$$

Следовательно, $-\sqrt{\frac{\alpha g}{m}}t_1+arctg\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v_0\right)=0$,

$$t_1=\sqrt{\frac{m}{\alpha g}}arctg\left(\sqrt{\frac{\alpha}{mg}}v_0\right) \qquad (6.14)$$

Численное решение задачи. Задавая исходные данные и время полета отделившейся головной части ракеты t_1, определить ее скорость $v_1=v(t_1)$ и пройденное расстояние после отделения от ракеты $x_1=x(t_1)$.

Используем компьютерную программу. Полагаем $m=164\,кг$, $\alpha=0,036\,\frac{кг}{м}$ $h=5000\,м$, $v_0=340\,м/с$, $t_1=21{,}863\,с$.

В этом случае начальные условия (6.9) записываются в следующем виде:

$$x(0)=h, \qquad v(0)=v_0.$$

При использовании компьютерной программы, для получения решения вводятся исходные (рис. 6.2) и начальные (рис. 6.3) данные.

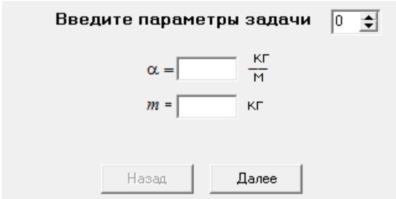


Рис. 6.2. Окно для исходных данных

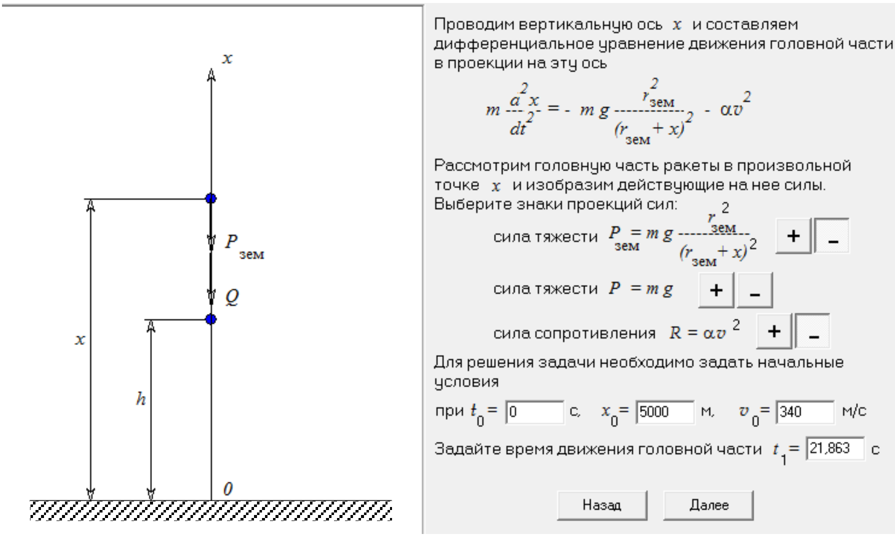


Рис. 6.3. Окно для ввода знака сил и начальных данных

На рисунке 6.4 показаны результаты решения. Как видно из рисунка 6.4, для выбранных исходных данных, за время $t_1 = 21{,}899\, c$, головная часть проходит расстояние $x_1 = 7912{,}741\,\text{м}$, а ее скорость становится равной пройденное расстояние после отделения от ракеты $v_1 = v(t_1) = -0{,}0043\, м/с$.

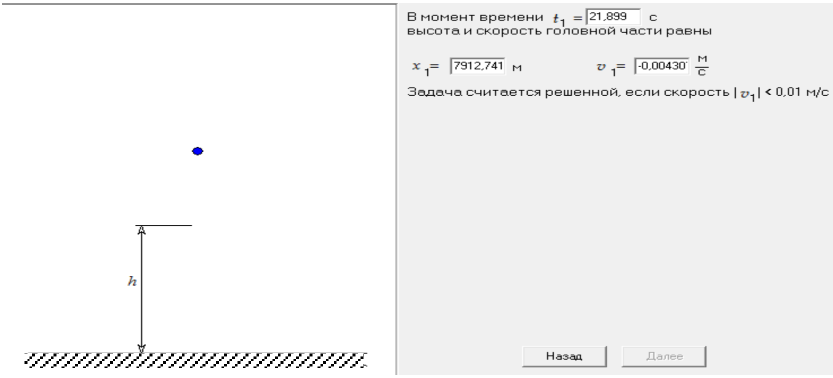


Рис. 6.4. Результаты решения

При выполнении лабораторной работы требуется методом подбора определить время полета отделившейся головной части ракеты t_1, для которого ее скорость $v_1 = v(t_1)$ станет приблизительно равной нулю (например, $|v_1|$ станет равной $v_0/1000$). Исходные данные для расчетов вычисляются по формулам:

$$m = 150 + n\,(кг), \quad \alpha = 0{,}05 - 0{,}001 \cdot n\left(\frac{кг}{м}\right), \quad h = 1000 + 100 \cdot n(м),$$

$v_0 = 200 + 10 \cdot n(м/с)$, где n – заданное число (номер варианта).

Порядок выполнения работы

1. Ознакомление с теоретическими соотношениями.
2. Используя аналитическое решение (11), (13), полученное без учета изменения силы тяжести P при движении модуля ракеты, определяется время полета отделившейся головной части ракеты t_1, для которого ее скорость $v_1 = v(t_1)$ станет равной нулю, а также находится величина перемещения ракеты $x(t_1)$.
3. Задавая начальные условия (9) и используя численное решение уравнения (8), методом подбора находится время полета отделившейся головной части ракеты t_1, для которого ее скорость $v_1 = v(t_1)$ станет приблизительно равной нулю. Фиксируется вели-

чина пройденного расстояния головной части ракеты после ее отделения $x_1 = x(t_1)$.

4. Проводится анализ результатов, полученных с учетом и без учета изменения силы тяжести P при движении модуля ракеты. Формулируются выводы.
5. Составляется отчет, содержащий основные теоретические соотношения, описание сделанных расчетов, анализа и выводов.

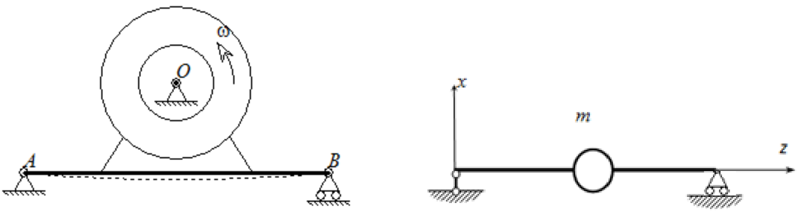
Контрольные вопросы.

1. Какие силы учитываются при анализе движения отделившегося модуля ракеты?
2. По какой формуле определяется сила тяжести при движении модуля ракеты?
3. Как определяется сила сопротивления воздуха?
4. Выведите дифференциальное уравнение движения модуля ракеты.
5. Сколько произвольных констант содержит решение уравнения движения ракеты и как определяются значение этих констант?
6. Что такое начальные условия?
7. Сформулируйте постановку задачи движения модуля ракеты без учета изменения силы тяжести.
8. Как определяются константы интегрирования c_1 и c_2 при решении задачи движения ракеты без учета изменения силы тяжести.
9. Используя формулу (11), покажите какой размерности получается величина $x(t)$.
10. Используя формулу (13), покажите какой размерности получается величина $v(t)$.

Лабораторная работа №7

КОЛЕБАНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА НА УПРУГОЙ ОПОРЕ

Содержание работы: твердое тело массой $M_{д}$ (например, двигатель или компрессор) расположено на упругой балке AB (рис. 7.1,*а*). Такую конструкцию можно рассматривать как шарнирно-опертую невесомую балку с приведенной массой (рис. 7.1,*б*). Исследуем колебания этой механической системы.



а) Схема двигателя, расположенного на балке; *б*) Балка с приведенной массой

Рис. 7.1

Число параметров, с использованием которых описывается движение системы, *называется числом степеней свободы*.

Колебания в вертикальном направлении невесомой балки с присоединенной массой m (рис 7.1,*б*) можно описать с использованием одного параметра – перемещения точки $x(t)$ массой m.

Следовательно, эта деформируемая система имеет одну степень свободы.

Так как балка упругая, то она под действием внешних сил деформируется и при устранении этих сил возвращается в исходное положение. Поэтому ее можно рассматривать как аналог вертикально расположенной пружины с коэффициентом жесткости c. Величина коэффициента c зависит от механических характеристик балки и от места положения двигателя на ней.

При упругом деформировании балки возникает сила упругости

$$F_{упр} = cx(t), \tag{7.1}$$

которая стремится вернуть балку в исходное состояние, и направлена в сторону противоположную направлению движения массы m.

К балке может быть прикреплен масляный демпфер, создающий также силу сопротивления, направленную в сторону противоположную направлению движения точки массой m:

$$R_1 = \alpha_1 v, \tag{7.2}$$

где α_1 – коэффициент пропорциональности, $v = \frac{dx}{dt}$ – скорость перемещения точки массой m.

В некоторых случаях демпфер может создавать силу сопротивления $R_2 = \alpha_2 v^2$.

При наличии малого смещении центра тяжести вращающегося ротора двигателя от оси вращения (разбалансировка), возникает центробежная сила инерции. Её проекцию на вертикальную ось х можно записать в виде

$$Q_x = Q_0 \sin\left(\omega t\right). \tag{7.3}$$

Здесь ω – постоянная угловая скорость вращения ротора, Q_0 – максимальное значение возмущающей силы.

При колебаниях точки массой m возникают силы инерции:

$$F_{ин} = m\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{7.4}$$

где $\frac{d^2x}{dt^2}$ – ускорение движущейся точки массой m.

Для анализа динамики деформируемых систем используется *принцип Даламбера,* в соответствии с которым силы инерции можно рассматривать как внешнюю нагрузку. При этом в любой момент времени должны выполняться уравнения равновесия системы в виде суммы проекций сил (в том числе и силу инерции) на направление движения.

Проектируя действующие на механическую систему силы $\vec{F}_{упр}, \vec{R}_1, \vec{Q}_x, \vec{F}_{ин}$ на вертикальную ось, находим

$$-\vec{F}_{упр} - \vec{R}_1 + \vec{Q}_x - \vec{F}_{ин} = 0.$$

Подставляя в это уравнение выражения для $\vec{F}_{упр}, \vec{R}_1, \vec{Q}_x, \vec{F}_{ин}$, получим *дифференциальное уравнение движения деформируемой системы*:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_1\frac{dx}{dt} + cx = Q_0 \,\mathrm{Sin}\left(\omega t\right). \tag{7.4}$$

Уравнение (7.4) содержит производную второго порядка по $x\left(t\right)$, поэтому при его интегрировании возникают две произвольные постоянные. Для определения этих произвольных постоянных задают величины перемещения массы m и ее скорости в начальный момент времени (при $t = 0$):

$$x\left(0\right) = x_0, \qquad \frac{dx\left(0\right)}{dt} = v_0. \tag{7.5}$$

Условия (7.5) называются *начальными условиями*. Эти условия определяют значения $x\left(t\right)$ и ее производной $\frac{dx\left(t\right)}{dt}$ в начальный момент движения (при $t = 0$).

Вынужденные колебания. Уравнение (7.4) описывает колебательное движение деформируемой механической системы при действии на нее переменной во времени внешней силы $Q_0 \,\mathrm{Sin}\left(\omega t\right)$. При, действии такой силы система будет совершать *вынужденные колебания*, а уравнение (7.4) называется *дифференциальным уравнением вынужденных колебаний*.

Слагаемое $\alpha_1\frac{dx}{dt}$ вводится в уравнение при наличии сил (демпфера), препятствующих перемещению механической системы. В этом случае система будет совершать *затухающие колебания.*

Свободные колебания. При отсутствии внешних сил и демпфера ($Q_0 = 0, \alpha_1 = 0$) из соотношения (7.4) получается *уравнение свободных (собственных) колебаний* упругой системы

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0. \tag{7.6}$$

Здесь $k = \sqrt{c/m}$ -*частота свободных (собственных) колебаний*.

Уравнение (7.6) описывает движение деформируемой упругой механической системы в случае, когда система выведена из положения равновесия и после этого убраны внешние силы. В этом случае, то она будет совершать *свободные колебания*. Частота этих колебаний называется *частотой собственных колебаний*.

Решение уравнения (7.6) имеет вид

$$x(t)=c_1\cos(kt)+c_2\sin(kt). \tag{7.7}$$

Здесь c_1, c_2– постоянные интегрирования, которые определяются из начальных условий(7.5).

С учетом (7.7),

$$\frac{dx(t)}{dt}=-c_1k\sin(kt)+c_2k\cos(kt). \tag{7.8}$$

Подставляя выражение (7.7), (7.8) в начальные условия (7.5), получим

$$c_1\cos(0)+c_2\sin(0)=x_0; \quad k\left[-c_1\sin(0)+c_2\cos(0)\right]=v_0.$$

Учитывая, что $\cos(0)=1, \sin(0)=0$, находим $c_1=x_0$, $c_2=v_0/k$. При этом формула (7.7) принимает вид

$$x(t)=x_0\cos(kt)+\frac{v_0}{\omega}\sin(kt).$$

Обозначая, $x_0=A\sin\gamma$, $\frac{v_0}{k}=A\cos\gamma$ и учитывая, что $\cos(kt)\sin\gamma+\sin(kt)\cos\gamma=\sin(kt+\gamma)$ получим

$$x(t)=A\sin(kt+\gamma). \tag{7.9}$$

Уравнение (7.9) описывает свободные колебания упругой системы с одной степенью свободы.

Величина A называется *амплитудой колебаний*, γ *– начальной фазой колебаний*.

График изменения $x(t)$ показан на рисунке 7.2. Как видно из рисунка, собственные колебания массы являются гармоническими. Колебания происходят около положения статического равновесия балки $x=\delta_{cm}$ с амплитудой A и с периодом $T=\frac{2\pi}{k}$. Величина δ_{cm}

равна прогибу балки под действием веса закрепленного на ней двигателя.

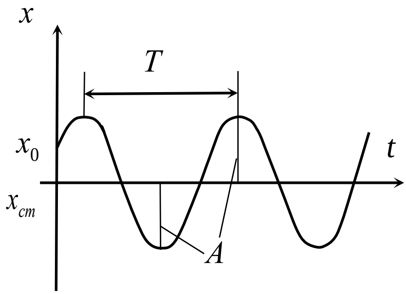


Рис. 7.2. График изменения $x(t)$ во времени вертикального перемещения массы m

Вынужденные незатухающие колебания. В этом случае $\alpha_1 = 0$ и уравнение (7.4), описывающее вынужденные колебания упругой системы с одной степенью свободы, записывается в следующем виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + cx = Q_0 \sin(\omega t).$$

Разделив последнее уравнение на m, и учитывая, что $k^2 = c / m$ – частота собственных колебаний, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = \frac{Q_0}{m}\sin(\omega t). \qquad (7.10)$$

Решение этого уравнения

$$x(t) = x_{об}(t) + x_ч(t), \qquad (7.11)$$

где $x_{об}(t)$ – общее решение однородного уравнения, $x_ч(t)$ – частное решение уравнения (7.10).

Как было показано, общее решение однородного уравнения (7.6) получается в виде (7.7), следовательно

$$x_{об}(t) = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt). \qquad (7.12)$$

Частное решение этого уравнения будем искать в виде

$$x_ч(t) = A_0 \sin(\omega t). \qquad (7.13)$$

Подставляя (7.13) в (7.10), получим

$$\left(-A_0\omega^2 + k^2 A_0 - \frac{Q_0}{m}\right)\sin(\omega t) = 0.$$

Приравнивая нулю множитель при $\sin(\omega t)$, находим

$$A_0 = \frac{Q_0}{m\left(k^2 - \omega^2\right)} = \frac{Q_0}{m\,k^2\left(1 - \omega^2 / k^2\right)}. \qquad (7.14)$$

После подстановки (7.13), (7.12) в (7.11), решение уравнения (7.10) принимает вид

$$x(t) = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt) + A_0 \sin(\omega t). \qquad (7.15)$$

Свободные колебания балки являются затухающими колебаниями, поэтому для анализа основных свойств вынужденных колебаний в (7.15) можно положить $c_1 = c_2 = 0$. В этом случае формула (7.15), описывающая вынужденные колебания балки в месте расположения ее приведенной массы, с учетом выражения (7.14), записывается так:

$$x(t) = \frac{Q_0}{m\,k^2\left(1 - \omega^2 / k^2\right)}\sin(\omega t). \qquad (7.16)$$

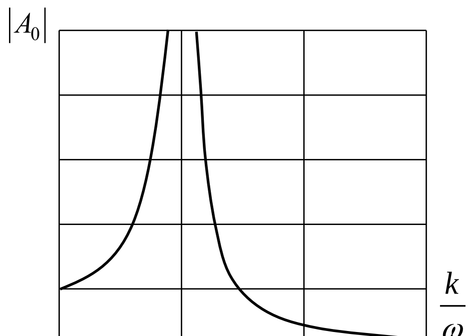


Рис.7.3. График зависимости амплитуды прогиба от частоты свободных колебаний

Как видно из этого уравнения, величина амплитуды прогиба A_0 зависит от отношения частоты свободных колебаний к частоте вынужденных колебаний k/ω. На рисунке 7.3 представлен график изменения величины $|A_0|$ в зависимости от значений k/ω.

Как видно из рисунка 7.3 и формулы (7.16), если частота собственных колебаний балки близка к частоте вынужденных колебаний ($k \to \omega$), то амплитуда прогиба балки может быть сколь угодно большой ($|A_0| \to \infty$).

Явление значительного возрастания амплитуды колебаний при совпадении частот вынужденных и собственных колебаний (при $k \to \omega, |A_0| \to \infty$), *называется резонансом*.

Для выполнения лабораторной работы требуется с использованием компьютерной программы построить график колебаний упругой механической системы и проанализировать полученные результаты.

Исходные данные для ввода в компьютерную программу (рис. 7.4) вычисляются по формулам:

$$m = 10 + 0{,}1 \cdot n\left(кг\right),\ c = 1900 + 10 \cdot n\left(н/м\right),$$

$$\alpha_1 = 500 + 10 \cdot n\left(\frac{Н \cdot с}{м}\right),$$

$$\alpha_2 = 400 + 10 \cdot n\left(\frac{Н \cdot с^2}{м^2}\right),\ Q_0 = 200 \cdot n\left(Н\right),$$

где n - номер варианта.

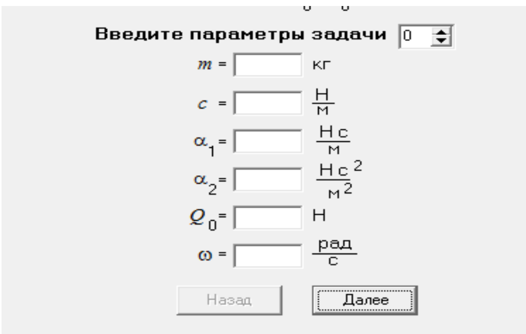


Рис. 7.4. Окно для исходных данных

Далее, задавая внешние силы и коэффициенты α_1, α_2 выбирается тип колебаний (собственные, затухающие, вынужденные), вводятся начальные условия и время движения точки t_1 (рис. 7.5).

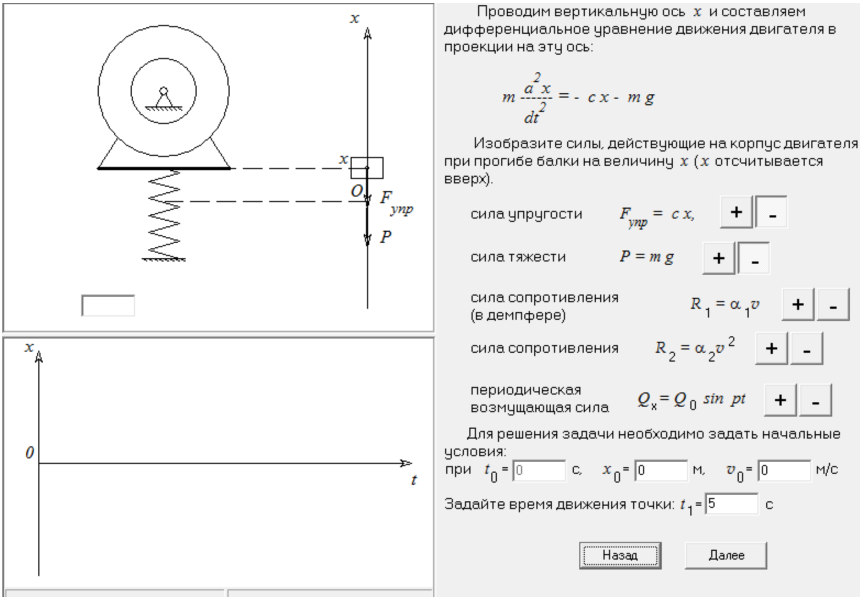


Рис. 7.5. Окно для ввода сил и начальных данных

Примеры колебаний упругой механической системы. В рассмотренных далее примерах полагаем $m = 10\,кг$,

$$c = 1960\,\frac{Н}{м},\; k = \sqrt{c/m} = 14\,\frac{рад}{с}.$$

Собственные колебания. Для описания колебаний используется однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$x = A \cdot \mathrm{Sin}\left(kt + \gamma\right),$$

где A – амплитуда собственных колебаний, k – частота собственных колебаний, γ – начальная фаза колебаний.

Пусть $x_0 = 0$; $v_0 = 0$; $t_1 = 5\,с$; $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0$.

Решение уравнения движения механической системы получается на основе компьютерной программы. График изменения $x\ (t)$ во времени показан на рисунке 7.6. На этом и последующих рисунках δ_{CT} – прогиб балки под действием веса расположенного на ней твердого тел.

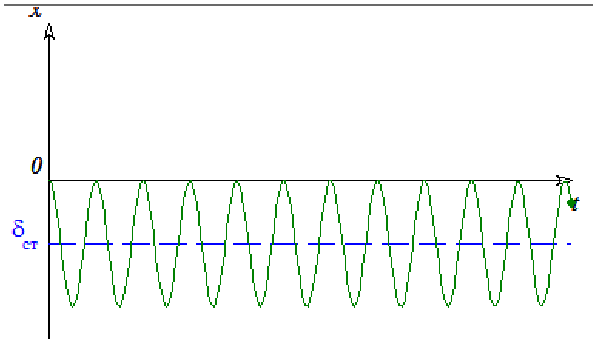


Рис. 7.6. График собственных колебаний

Изменение начальных условий влияет на величину амплитуды колебаний. Например, при $x_0 = 0{,}06\,м$, $v_0 = 0$, $t_1 = 5\,с$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ получаются колебания, показанные на рисунке 7.7.

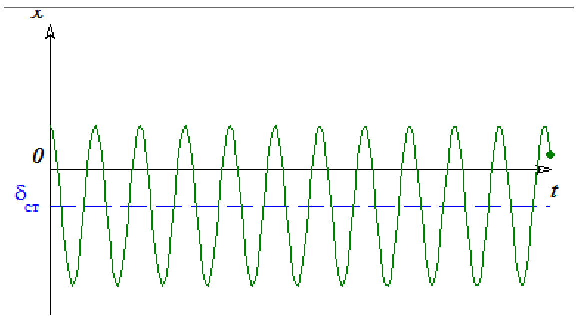


Рис. 7.7. График собственных колебаний

Затухающие колебания. Однородное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x+2b\frac{dx}{dt}=0,$$

где b - коэффициент затухания, $k^2=\frac{c}{m}$, $2b=\frac{\alpha}{m}$.

Обозначая $k_1=\sqrt{k^2-b^2}$, решение уравнения представим в виде

$$x=Ae^{-bt}\,\mathrm{Sin}\left(k_1t+\gamma\right).$$

Полагаем $x_0=-0,05\,м$; $v_0=5\frac{м}{с}$; $t_1=5\,с$; $\alpha_1=5\frac{Н\cdot с}{м}$; $\alpha_2=0$; $\omega=0$; $b=0,25\,\frac{Н\cdot с}{кг\cdot м}$. График изменения $x\ (t)$ во времени показан на рисунке 7.8. Получается, что при выбранных значения параметров $(k>b)$ колебания будут затухающими. Это связано с тем, что в механической системе имеется демпфер (действует сила сопротивления $2b\frac{dx}{dt}$, пропорциональная скорости $\frac{dx}{dt}$). Поэтому, и амплитуда колебаний с течением времени уменьшается.

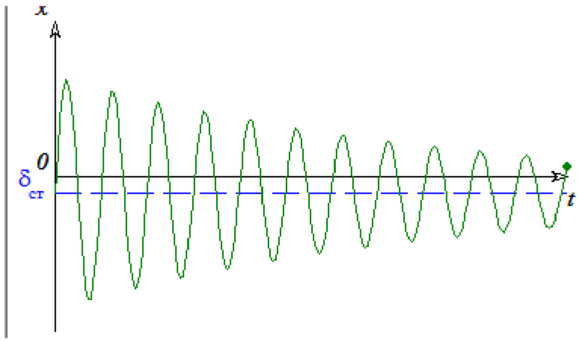


Рис. 7.8. График затухающих колебаний

При $x_0 = -0,05\,м$; $v_0 = 5\dfrac{м}{с}$; $t_1 = 5\,с$; $\alpha_1 = 280\,\dfrac{Н \cdot с}{м}$; $\alpha_2 = 0$; $b = 14\dfrac{Н \cdot с}{кг \cdot м}$, колебательное движение отсутствует (рис. 7.9), так как $k = b$.

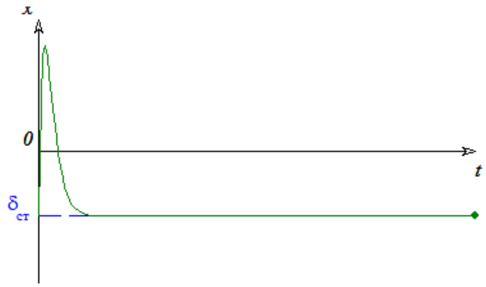


Рис. 7.9. График затухающих колебаний

Вынужденные колебания при наличии демпфера (сопротивления среды). Неоднородное дифференциальное уравнение движения имеет вид $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x + 2b\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{Q_0}{m}\operatorname{Sin}\omega t$, где $k^2 = \dfrac{c}{m}$, $2b = \dfrac{\alpha}{m}$.

При $x_0 = -0,05\,м$; $v_0 = 0$; $t_1 = 30\,с$; $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0$; $Q_0 = 100\,Н$; $\omega = 0,5\dfrac{рад}{с}$ получаются колебания, представляющие собой наложение собственных и вынужденных колебаний соответственно (рис. 7.10).

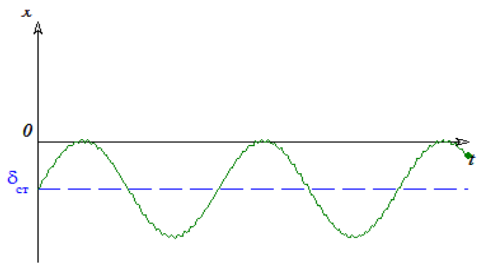


Рис. 7.10. График наложения собственных и вынужденных колебаний

При $x_0 = 0{,}05\ м$; $v_0 = 0$; $t_1 = 20\ с$; $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0$; $Q_0 = 100\ Н$; $\omega = 5\ \dfrac{рад}{с}$ также получаются колебания, состоящие из наложения собственных и вынужденных колебаний соответственно (рис. 7.11).

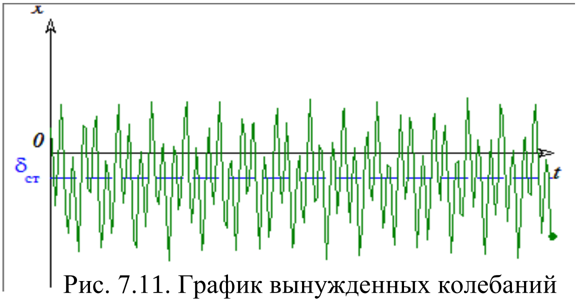


Рис. 7.11. График вынужденных колебаний

Графики на рисунках 7.10 и 7.11 заметно различаются. Это связано с тем, что величины частот вынужденных колебаний в этих случаях существенно отличаются.

При $x_0 = 0{,}05\ м$; $v_0 = 0$; $t_1 = 20\ с$; $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 0$; $Q_0 = 100\ Н$; $\omega = 14\dfrac{рад}{с}$ возникают колебания, показанные на рисунке 7.12. С течением времени амплитуда колебаний увеличивается. Возникает явление резонанса, которое наступает при совпадении частоты вынужденных и собственных колебаний (при $k = \omega$).

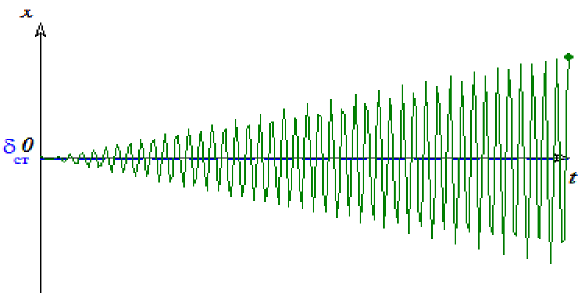


Рис. 7.12. График колебаний при резонансе

Другие случаи колебаний.

При $x_0 = 0{,}05\,м;\quad v_0 = 0;\quad t_1 = 20\,с;\quad \alpha_1 = 5\,\dfrac{Н \cdot с}{м};\quad \alpha_2 = 0;$ $Q_0 = 0;\quad \omega = 5\,\dfrac{рад}{с}$ с течением времени колебания затухают (рис.7.13).

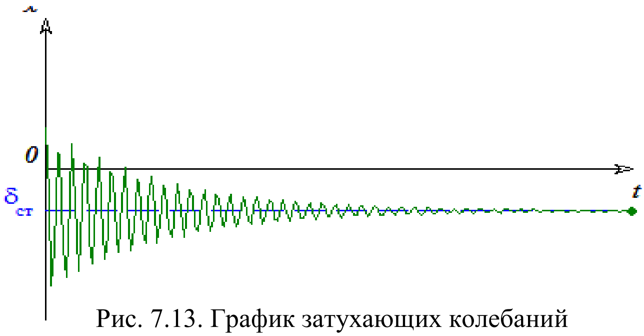


Рис. 7.13. График затухающих колебаний

При $x_0 = 0{,}05\,м;\quad v_0 = 0;\quad t_1 = 30\,с;\quad \alpha_1 = 280\,\dfrac{Н \cdot с}{м};\quad \alpha_2 = 0;$ $Q_0 = 0;\quad \omega = 14\,\dfrac{рад}{с}$ колебательного процесса не возникает (рис. 7.14).

Рис. 7.14. График затухающих колебаний

При $x_0 = 0,05\,м$; $v_0 = 3\dfrac{м}{с}$; $t_1 = 5\,с$; $\alpha_1 = 280\dfrac{Н \cdot с}{м}$; $\alpha_2 = 0$; $Q_0 = 500\,Н$; $\omega = 5\dfrac{рад}{с}$ получаем график вынужденных колебаний, показанный на рисунке 7.15.

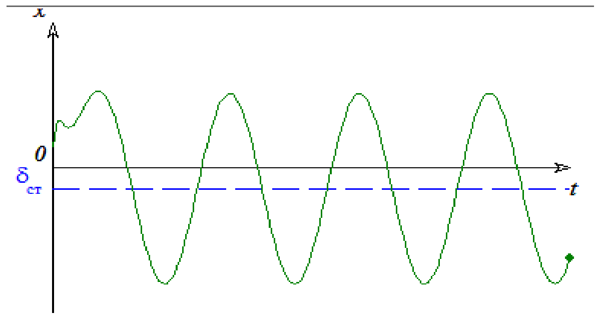


Рис. 7.15. График вынужденных колебаний

На рисунке 7.16 показаны колебания упругой системы при $x_0 = 0,05\,м$; $v_0 = 0$; $t_1 = 30\,с$; $\alpha_1 = 280\dfrac{Н \cdot с}{м}$; $\alpha_2 = 0$; $Q_0 = 0$; $\omega = 14\dfrac{рад}{с}$.

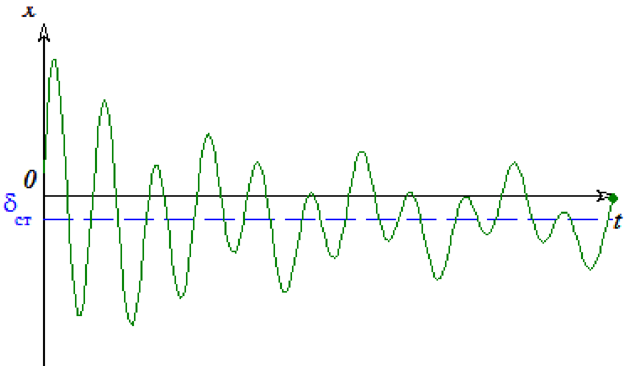


Рис. 7.16. График вынужденных колебаний

Порядок выполнения работы.

1. Ознакомление с теоретическими соотношениями.
2. С использованием компьютерной программы строится график колебаний упругой механической системы в следующих случаях:

- собственные колебаний системы при нулевых начальных условиях ($x_0 = 0, v_0 = 0$);
- собственные колебаний системы при ненулевых начальных условиях ($x_0 \neq 0, v_0 \neq 0$);
- затухающие колебания при ненулевых начальных условиях ($x_0 \neq 0, v_0 \neq 0$, случай, когда $k = b$);
- вынужденные колебания при ненулевых начальных условиях ($x_0 \neq 0, v_0 \neq 0$).
- вынужденные колебания системы в случае резонанса, при ненулевых начальных условиях ($x_0 \neq 0, v_0 \neq 0$);

3. Проводится анализ полученных графиков, формулируются выводы.
4. Составляется отчет, содержащий основные теоретические соотношения и построенные графики для разных видов колебаний.

Контрольные вопросы.

1. Сформулируйте принцип Даламбера.
2. Какие колебания называются свободными (собственными) колебаниями?
3. Как определяется частота и период собственных колебаний?
4. Какие колебания называются затухающими?
5. В каком виде задается сила сопротивления при затухающих колебаниях?
6. Как определяется коэффициент затухания?
7. Какие колебания называются вынужденными колебаниями?
8. Какое явление называется резонансом?
9. Какова размерность частоты и периода колебаний?

Литература

1. Ахметшин М.Г., Гумерова Х.С., Петухов Н.П. Теоретическая механика. (Учебное пособие). Изд-во КНИТУ, 2012. 134 с.
2. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И.В. Мещерский – СПб.: Лань: Омега – Л, 2005. – 448 с.
3. Серазутдинов М.Н. Прикладная механика: учебник: 2-е изд., перераб. / М.Н. Серазутдинов, Н.П. Петухов, Э. Н. Островская, С.Г. Сидорин; – Казань: Центр инновационных технологий, 2016. – 326 с.
4. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: Учеб. для втузов / С. М. Тарг – М. Высш. Школа, 2001. – 416 с.
5. Яблонский А.А. Курс теоретической механики: Ч.1. Статика. Кинематика; Ч.2. Динамика: учебное пособие для втузов / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – 14-е изд., испр. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 608 с.