Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

«НОБЕЛЕВСКИЕ НАДЕЖДЫ КНИТУ-2020»

Номинация: математика

Исследовательская работа по теме:

«РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

Выполнила:

Фролова Юлия Алексеевна

Ученица 9 класса

МБОО «Лицей №2 г. Буинска РТ»

Руководитель:

Гафурова Венера Азатовна

Учитель математики

МБОО «Лицей №2 г. Буинска РТ»

Казань, 2020

Оглавление

Введение. 4
Рациональные уравнения. 5
Простейшие уравнения, сводящие к квадратным. 6
Метод замены. 7
Метод разложения на множители. 10
Возвратные уравнения. 12
Система рациональных уравнений. 15
Однородные системы. 15
Симметрические системы. 18
Искусственные методы. 20
Заключение. 24
Список литературы. 25

Введение.

> Невозможно избавиться от чувства, что математические формулы живут собственной жизнью и обладают собственным разумом, что они умнее нас, умнее даже тех, кто их открыл, что мы получаем из этих формул больше, чем в них было изначально заложено.
>
> *Генрих Герц*

Рациональные уравнения встречаются во всех вариантах 2 части ОГЭ, именно эти уравнения развивают многие математические навыки, которые пригодятся в будущем.

Гипотеза: Рациональные уравнения не имеют единый способ решений, для каждого вида рациональных уравнений существует свой метод и подход решения.

Цели учебно-исследовательской работы: показать различные методы и способы решения рациональных уравнений; повысить уровень математической культуры, прививая навыки самостоятельной исследовательской работы в математике.

Задачи:

- разобрать основные приемы и методы решения рациональных уравнений.
- выполнить решение примеров и задач, касающихся данной темы.

Материал исследовательской работы может быть интересен и полезен для учащихся 9-11 классов, также он может быть пригоден для элективных занятий, при подготовке к олимпиадам, а также для самостоятельного изучения.

Рациональные уравнения.

Введем понятие рациональной функции, которое понадобится нам в этом и в следующем разделах. Рациональной функцией от аргумента X называется такая функция, аналитическое выражение которой строится из X и констант с помощью операций арифметики (сложение, вычитание, умножение, деление) и операций возведения в натуральную степень. Согласно другому, но эквивалентному приведенному, варианту определения, рациональной называется такая функция, которая представима в виде отношении двух многочленов. Рациональным уравнением называется такое уравнение, у которого и левая, и правая части являются рациональными функциями. Здесь также возможен эквивалентный вариант, а именно: рациональным называется уравнение вида R(x)=0, где R(x)- рациональная функция. Легко усматривается, что решение рационального уравнения сводиться к решению уравнения вида Ф(x)=0, где Ф(x)- некоторый многочлен. Если при этом степень многочлен Ф(x) не превышает двух, то уравнение решается стандартными средствами, поскольку либо линейным, либо квадратным. Если же степень многочлена Ф(x) больше двух, то решение означенного уравнения требует специальных приемов, к рассмотрению которых мы и переходим.

Простейшие уравнения, сводящие к квадратным.

Пример 1. $x^4 + x^2 - 6 = 0$

Решение: Данное уравнение называется биквадратным и решается при помощи замены

$$t = x^2, t \geq 0$$

Запишем квадратное уравнение относительно t, соответствующее исходному биквадратном

$$t^2 + t - 6 = 0$$

Решая это уравнение, находим $t_1 = 2$ и $t_2 = -3$. Корень t_2 - посторонний корень, так как $t \geq 0$. Возвращаясь к исходной переменной, получаем

$$x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{2}.$$

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$.

Пример 2. $(x^2 + x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) = 2$.

Решение: Попытка перемножить скобки в левой части исходного уравнения приводит нас к уравнению четвёртой степени, вид которого вселяет пессимизм. Поэтому, как и в предыдущем примере, введем новую переменную. Обозначим через t выражение $x^2 + x$. Относительно переменной t исходное уравнение примет вид

$$(t - 1) \cdot (t + 1) = 2.$$

Ответ: $x \in (-1 \pm \sqrt{1} + \frac{4\sqrt{3}}{2}; 2 \pm \sqrt{1} + \frac{4\sqrt{3}}{2})$

Пример 3. Решить уравнение $x (x + 1) (x + 2) (x + 3) = -\frac{3}{4}$

Решение: В данном уравнении не видно удобной замены переменной. Но если внести *x* в крайнюю правую скобку левой части, а две другие скобки перемножить, то получится уравнение

$(x^2 + 3x) \cdot (x^2 + 3x + 2) =- \frac{3}{4}$

в котором увидеть новую переменную уже не составляет труда:

$$t = x^2 + 3x.$$

Ответ: $x \in (-3\pm\frac{\sqrt{3}}{2}; -3\pm\frac{\sqrt{7}}{2})$.

Метод замены.

Биквадратное уравнение $ax^4 + вx^2 +c = 0$. Делая замену $t= x^2$, можно переписать исходное уравнение в виде квадратного уравнения $at^2 +вt + c = 0$, найти его решения (если, конечно, они существуют), а уже затем восстановить, исходя из найденных значений t, искомые решения x исходного уравнения. Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих применение данного метода в более сложных ситуациях.

Задача 1. Решить уравнение $(x^2 + x + 1) (x^2 + x + 2) =12$

Решение: Введем замену $y= x^2 + x + 1$, то есть рассмотрим неизвестную величину y, связанную с неизвестной величиной x указанным соотношением. Легко усматривается, что исходное уравнение, будучи переписанным через y, приобретает следующий вид $y^2 + y -12=0$

Корни полученного уравнения – это $y_1 = -4$ $y_2 = 3$. Для определения корней исходного уравнения имеем

$$x^2 + x + 1 = -4 \quad \text{и} \quad x^2 + x + 1 = 3$$

Первое из этих уравнений не имеет корней, а корнями второго уравнения являются числа $x_1 = -2$ $x_2 = 1$.

Ответ: $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$

Задача 2. Решить уравнение $(x^2-2x-1)^2+3x^2-6x-13=0$

Решение: Имея целью выделить повторяющиеся фрагмент x^2-2x-1, перепишем уравнение в виде

$$(x^2-2x-1)^2+3(x^2-2x-1)-10=0$$

Далее, вводя замену $y = x^2-2x-1$, получаем для нахождения y следующее уравнение $y^2+3y-10=0$, откуда $y_1 = -5$, $y_2 = 2$.

Таким образом, для нахождения x получается два уравнения $x^2-2x-1 = -5$ и $x^2-2x-1 = 2$.

Первое из этих уравнений не имеет корней, а корнями второго уравнения являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

Задача 3. Решить уравнение $\frac{x^2-10x+13}{x^2-6x+13} = \frac{3x}{x^2-8x+13}$

Решение: Отметим, что число x=0 не является решением данного уравнения. Это обстоятельство позволяет нам разделить числитель т знаменатель каждой из входящих в уравнение дробей на x, в результате чего исходное уравнение преобразуется в $\frac{x+\frac{13}{x}-10}{x+\frac{13}{x}-6}=\frac{3}{x+\frac{13}{x}-8}$

Вводя очевидную замену y= $x+\frac{13}{x}$, получаем $\frac{y-10}{y-6}=\frac{3}{y-8}$

Откуда находим, что $y_1=7$, $y_2=14$. Для нахождения x получаем два уравнения

$x+\frac{13}{x}=7$ и $x+\frac{13}{x}=14$

Первое из этих уравнений не имеет решений, а решениями второго уравнения являются $x_1=1$, $x_2=13$.

Ответ: $x_1=1$, $x_2=13$.

Рассмотрим теперь так называемые ***однородные уравнения***.

Уравнения вида *au+bv=0* называется однородным уравнением первой степени, $au^2+buv+cv^2=0$ называется однородным уравнением второй степени

$au^3+bu^2v+cuv^2+dv^3=0$ называется однородным уравнением третьей степени относительно u и v и так далее. Поделив обе части однородного уравненияk-ой степени на v^k, мы получим уравнение с одним неизвестным y=u/v. При этом, разумеется, отдельно должен быть рассмотрен случай, когда v=0. далее рассматривается уравнение, сводящееся к однородному.

Задача 4. Решить уравнение $(x-2)^2(x+1)^2-(x-2)(x^2-1)-2(x-1)^2=0$.

Если положить u=(x-2) (x+1), а v=(x-1), то исходное уравнение может быть переписано в виде $u^2-uv-2v^2=0$.

Легко проверяется, что число x=1 не является решением исходного уравнения, и поэтому можно считать, что $v\neq0$. Разделив последнее уравнение на v^2 и введя замену $y=\frac{u}{v}$, получаем $y^2-y-2=0$, решениями которого являются $y_1=-1$ и $y_2=2$.

Выражая y через x, получаем для нахождения x два следующих уравнения $\frac{(x-2)(x+1)}{x-1}$=-1 и $\frac{(x-2)(x+1)}{x-1}$=2.

Решением первого из этих уравнений является числа $x=\pm\sqrt{3}$, а решением второго являются числа x=0 и x=3.

Ответ: $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=-\sqrt{3}$, $x_3=0$, $x_4=3$.

Метод разложения на множители.

Здесь мы будем рассматривать уравнения вида Ф(x)=0, где Ф(x)-многочлен с целыми коэффициентами, и решать их, раскладывая многочлен Ф(x) на множители. Процедура этого разложения основывается на следующих двух утверждениях.

Утверждение 1. Пусть несократимая дробь p/q является корнем многочлена $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0. Тогда a_n делится на q, а a_0 делится на p.

Утверждение 2. Пусть несократимая дробь p/q является корнем многочлена Ф(x) с целыми коэффициентами. Тогда Ф (x)=(qx-p) Q(x), где Q(x)-также многочлен с целым коэффициентами, причем его степень на единицу меньше степени многочлена Ф(x).

Особенно важным в практическом отношении (имеется в виду практика конкурсных экзаменов) является случай, когда многочлен Ф (x) имеет приведённую форму, то есть когда $a_n=1$. В применении к таким (приведённым) многочленам сформулированные выше утверждения 1 и 2 преобразуются в

Утверждение 3. Пусть целое число x_0 является корнем приведенного многочлена с целыми коэффициентами. Тогда свободный член этого многочлена делится на x_0.

Утверждение 4. Пусть x_0-целый корень приведенного многочлена Ф (х) с целыми коэффициентами. Тогда Ф (х)=(х-x_0) Q(х), где Q(х)- также многочлен с целыми коэффициентами, причем его степень на единицу меньше степени многочлена Ф(х)

Практическое использование утверждений 3 и 4 в применении к пройдённому многочлену Ф(х) с целыми коэффициентами состоит в следующем. Сначала составляется список всех целых делителей свободного члена многочлена Ф(х). Входящие в этот список числа последовательно проверяются (непосредственной подстановкой в Ф(х) до момента нахождения числа x_0, являющегося корнем многочлена Ф(х). После этого входящие в Ф(х) слагаемые группируются таким образом, чтобы реализовать разложение Ф(х) =(х-x_0) Q(х). Проиллюстрируем вышесказанное на примере решения задачи.

Задача. Решить уравнение $x-x^3+2x^2+x-3=0$

Сначала составим список целых делителей свободного члена. В него входят -1,1,-3,3. Непосредственной проверкой убеждаемся, что число х= -1 является корнем рассматриваемого многочлена. Поэтому этот многочлен может быть разложен на множители, одним из которых является (х+1). Имея в виду выделение этого общего множителя (х+1), проведем следующее преобразование многочлена, стоящего в левой части данного уравнения:

$x^4-x^3+2x^2+x-3=x^4+x^3-2x^3-2x^2+4x^2+4x-3x-3=(x^4+x^3) - (2x^3+2x^2) + (4x^2+4x) -(3x+3) = x^3(x+1) -2x^2(x+1) + 4x (x+1) -3(x+1) = (x+1) (x^3-2x^2+4x-3)$.

На этом завершается первый этап разложения на множители. Его итогом является установленное равенство: $x^4-x^3+2x^2+x-3=(x+1) (x^3-2x^2+4x-3)$.

Теперь нам предстоит повторить процедуру разложения, применив её к многочлену x^3-2x^2+4x-3. Опять составим список делителей свободного члена: -1,1,-3,3. Непосредственной проверкой убеждаемся, что число х=1 является корнем рассматриваемого на этом этапе многочлена. Поэтому в разложении будет фигурировать множитель (х-1). Имея в виду выделение такого множителя, проведем следующее преобразование рассматриваемого многочлена:

$x^3-2x^2+4x-3= x^3-x^2+x+3x-3=(x^3-x^2) - (x^2-x) + (3x-3) = x^2(x-1) -x(x-1) +3(x-1) =$

$(x-1) (x^2-x+3)$.

Объединяя результаты двух этапов разложения, получаем:

$x^4-x^3+2x^2+x-3=(x+1) (x-1) (x^2-x+3)$.

Учитывая, что квадратный трехчлен не имеет корней, получаем следующий ответ.

Ответ: $x_1= -1$, $x_2=1$.

Возвратные уравнения.

Уравнение вида $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+ a_1x + a_0 = 0$ называется *возвратным,* если его коэффициенты, стоящие на симметричных позициях, равны, то есть если $a_{n-k} = a_k$ при $k = 0, 1, . . ., n$.

Для начала рассмотрим возвратное уравнение четвертой степени вида

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$

где a, b. и c - некоторые числа, причем, $a \neq 0$. Его удобно решать с помощью следующего алгоритма:

- разделить левую и правую части уравнения на x^2, при этом не происходит потери решения, так как $x = 0$ не является корнем исходного уравнения при $a \neq 0$:

- группировкой привести полученное уравнение к виду

$a (x^2 + 1/x^2) + b (x + 1/x) + c = 0$:

- ввести новую переменную $t = x = 1/x$, тогда выполнено

$t^2 = x^2 + 2 + 1/x^2$, то есть $x^2 + 1/x^2 = t^2 - 2$

относительно новой переменной t рассматриваемое уравнение является квадратным:

- $at^2 + bt + c - 2a = 0$;

решить его относительно t, возвратиться к исходной переменной.

Пример 1. Решить уравнение $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$.

Решение: Разделим обе части уравнения на x^2. После группировки получаем

$(x^2+\frac{1}{x^2}) - 5\,(x+\frac{1}{x}) + 6 = 0$.

Замена $t = x + \frac{1}{x}$ позволяет свести это уравнение к квадратному уравнению

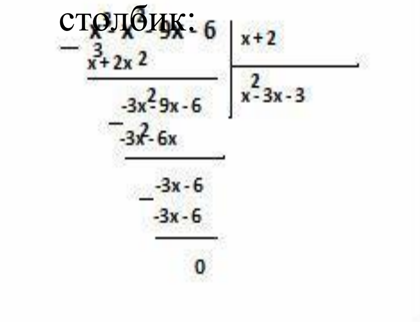
$(t^2 - 2) - 5t + 6 = 0$.

Ответ: $x = 2 \pm\sqrt{3}$.

Пример 2. Решить уравнение $x^3 - x^2 - 9x - 6 = 0$.

Решение: Попробуем угадать хотя бы один корень данного уравнения. “Кандидатами” в целочисленные корни (а только их есть надежда отгадать) являются числа ±1, ±2, ±3, ±6.

Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что x_1 = -2 действительно является его корнем. Разделим многочлен $x^3 - x^2 - 9x - 6$ на двучлен $x + 2$ в столбик:



Решив теперь квадратное уравнение $x^2 - 3x - 3 = 0$, получаем $x_2 = 3 - \frac{\sqrt{21}}{2}$,

$x_3 = 3 + \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Ответ: $x \in (-2; 3 - \frac{\sqrt{21}}{2}; 3 + \frac{\sqrt{21}}{2})$

Система рациональных уравнений.

Наиболее распространенным методом решения систем уравнений в школьной практике, например, систем двух уравнений с двумя неизвестными, является метод подстановки в простейшей форме, когда, используя одно уравнение системы, выражают какое-либо неизвестное через другое, а затем подставляют найденное выражение в неиспользованное уравнение системы. Результатом таких действий является сведение системы к уравнению. Такой метод хорошо работает, если хотя бы одно из уравнений системы - линейное. В противном случае значительные сложности могут возникнуть уже на первом этапе решения, когда одно неизвестно выражается через другое. В такой ситуации надо применить, как правило, метод замены, выбирая эту замену с учетом особенностей конкретной системы.

Однородные системы.

Система двух уравнений с двумя неизвестными называется однородной системой порядка n (n-натуральное число), если она имеет вид

$$\begin{cases} \mathrm{a}_n x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + a_n y^n = c \\ b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + b_2 x^{n-2} y^2 + \cdots \ldots + b_n y^n = \ d \end{cases}$$

Однородные системы решают следующим способом. Из первого уравнения, предварительно умноженного на d, вычитают второе уравнение, предварительно умноженное на c. В результате получается уравнение, описанное в конце параграфа 1 раздела 1. Используя описанную там методику, можно из полученного уравнения найти отношение y/x, что откроет путь к решению всей системы, поскольку появится возможность простого выражения одного неизвестного через другое последующей подстановки.

Задача 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x^2 + xy + y^2 = 8 \\ x^2 - 2xy + 3y^2 = 9 \end{cases}$

Решение: Действуя по описанной выше процедуре, вычтем из первого уравнения, предварительно умноженного на 9, второе уравнение, предварительно умноженное на 8. В результате получим уравнение

$10x^2+25xy-15y^2= 0 \implies 2x^2+5xy-3y^2= 0$

Таким образом, исходная система равносильна следующей

$$\begin{cases} 2x^2 + xy + y^2 = 8 \\ 2x^2 + 5xy - 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Отметим, что $y\neq 0$ и, пользуясь этим, разделим второе уравнение на y^2, получая уравнение /1/

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 5\left(\frac{x}{y}\right) - 3 = 0$$

Пусть $t = \left(\frac{x}{y}\right)$, тогда для t получается уравнение $2t^2+5t-3= 0$, откуда

$t_1=0,5$, $t_2= -3$.

Следовательно, уравнение /1/ равносильно совокупности

$\left(\frac{x}{y}\right)_1 = 0,5$ и $\left(\frac{x}{y}\right)_2 = -3$

Отсюда следует, что исходная система равносильна совокупности систем

$$\begin{cases} 2x^2 + xy + y^2 = 8 \\ y = 2x \end{cases} \qquad /а/$$

$$\begin{cases} 2x^2 + xy + y^2 = 8 \\ x = -3y \end{cases} \qquad /б/$$

Решение систем /а/ и /б/ не представляет интереса, и поэтому мы просто приведем готовый ответ, а именно: решениями системы, /а/ является пары (1,2) и (-1,-2), а решениями системы /б/ являются пары $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ответ: (1,2), (-1,-2), $\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Задача 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3-3y^3=2 \\ x^2y-2xy^2=1 \end{cases}$

Решение: Вычтем из первого уравнения второе, предварительно умноженное на 2 и получим $x^3-2x^2y+4xy^2-3y^3=0$/

Легко устанавливается, что $y\neq0$.Это обстоятельство позволяет нам разделить полученное уравнение на y^3, после чего получаем

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3-2\left(\frac{x}{y}\right)^2+4\left(\frac{x}{y}\right)-3=0$$

После введения замены $t=\frac{x}{y}$ данное уравнение превращается в

$$t^3-2t^2+4t-3=0 \qquad /1/$$

Обозначим многочлен, стоящий в левой части уравнения /1/, через Ф(t) и попытаемся разложить его на множители, используя методику, описанную в параграфе 2 раздела 1 для приведенных многочленов. Составим, прежде всего, список целых делителей свободного члена этого многочлена: -1,1,-3,3. Непосредственной проверкой устанавливается, что число t=1 является корнем Ф(t), и поэтому Ф(t) раскладывается на множители, одним из которых является

t= 1. Имея в виду выделение этого общего множителя, преобразуем Ф(t) следующим образом

$$t^3-2t^2+4t-3=t^3-t^2-t^2+t+3t-3=(t^3-t^2)-(t^2-t)+(3t-3)=t^2(t-1)-t(t-1)+3(t-1)=(t-1)(t^2-t+3)$$

Поскольку квадратный трехчлен t^2-t+3 не обращается в нуль, можно заключить, что уравнение /1/ имеет единственный корень t=1. Таким образом, исходная система оказывается равносильной системе

$$\begin{cases} x^3 - 3y^3 = 2 \\ x = y \end{cases}$$

Решением, которой является пара чисел (-1,-1).

Ответ: (-1,-1).

Симметрические системы.

Для описания этого вида системы введем определение симметрической функции двух переменных. Функция F(x, y) называется симметрической, если аналитическое выражение, задающее эту функцию, не изменяется при замене переменной x на переменную y, а переменной y на переменную x. Симметрической системой двух уравнений с двумя неизвестными называется система вида

$\begin{cases} F1(\text{x}, \text{y}) = 0 \\ F2(\text{x}, \text{y}) = 0 \end{cases}$, где F_1(x, y) и F_2(x, y)- симметрические.

Аналогично может быть введено понятие симметрической системы трех уравнений с тремя неизвестными и так далее. Метод решения симметрических систем основан на том, что симметрические многочлены переменных x, y могут быть выражены через симметрические многочлены x+y и xy, называемые основными. В связи с этим оказывается весьма эффективной замена u=x+y, v=xy, существенно упрощающая систему. Проиллюстрируем это на примере.

Задача 1. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x + y + xy = 23 \end{cases}$

Решение: Легко проверяется, что данная система является симметрической. Поэтому, согласно приведенной выше рекомендации, вводим замену u=x+y, v=xy. Отметим, что $x^2+y^2-(x+y)^2-2xy$. Поэтому исходная система в переменных u, v приобретает вид

$$\begin{cases} u^2 - 2v = 34 \\ u + v = 23 \end{cases} \qquad /1/$$

Из второго уравнения следует, что v-23-u. Подставив это в первое уравнение, получим $u^2+2u-80=0$, откуда $u_1=8$, $u_2=-10$. Таким образом, после нахождения соответствующих значений $v_1=15$, $v_2=33$, можно заключить, что решением системы /1/ являются две пары чисел, а именно (8,15) и (-10,33). Следовательно, исходная система оказывается равносильной совокупности двух следующих систем уравнений.

/а/ $\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$ /б/ $\begin{cases} x + y = -10 \\ xy = 33 \end{cases}$

Решением системы /а/ являются две пары (3,5) и (5,3), а система /б/, как это легко устанавливается, не имеет решений. Мы не приводим подробных выкладок, сопутствующих решению систем /а/ и /б/ в силу их совершенной тривиальности и поскольку они легко могут быть воспроизведены читателем.

Ответ: (3,5), (5,3).

Задача 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^3 + y^3 + x^3y^3 = 17 \\ x + y + xy = 5 \end{cases}$

Решение: Данная система - симметрическая. Поэтому вводим замену u=x+y, v=xy. Отметим, что $x^3+y^3=(x+y)\ (x^2+y^2-xy)=(x+y)\ (x^2+2xy-y^2)-3xy=(x+y)\ (x+y)^2-3xy$

В силу приведенного преобразования становится ясным, что исходная система трансформируется в следующую систему

$$\begin{cases} u(u^2 - 3v) + v^3 = 17 \\ u + v = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 - 3uv + v^3 = 17 \\ u + v = 5 \end{cases}$$

На первый взгляд, мы мало чего добились, поскольку первое уравнение системы осталось весьма громоздким. Однако нас выручает то обстоятельство, что второе уравнение системы превратилось в линейное. Это позволяет выразить одно неизвестное через другое: $u=5-v$. Подставим это в первое уравнение системы и получим

$$(5-v)^3-3(5-v)v+v^3=17 \Longrightarrow 125-75v+15v^2-v^3-15v+3v^2+v^3=17 \Longrightarrow v^2-5v+6=0$$

Легко устанавливается, что корнями этого уравнения являются $v_1=2$ и $v_2=3$. Тогда $u_1=3$ и $u_2=2$.

Таким образом, исходная система равносильна следующей совокупности двух систем

/б/ $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases}$ /а/ $\begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases}$

Система /а/ имеет решения (1,2) и (2,1), а /б/ не имеет.

Ответ: (1,2), (2,1).

Искусственные методы.

В двух предыдущих главах данного раздела были описаны и проиллюстрированы методы решения рациональных систем, имеющих алгоритмический характер. Но разумеется, эти методы не являются универсальными, и некоторые системы им не поддаются. В этой ситуации следует искать способ такого преобразования исходной системы, которой привел бы её к виду, допускающему применение стандартных методов решения. Мы при этом хотели бы подчеркнуть, что единого, годного во всех ситуациях, способа нахождения желаемого преобразования системы просто не существует. При решении той или иной конкретной системы приходится это преобразование находить, так сказать, наощупь, методом проб и ошибок. Но ошибок можно сделать существенно меньше, если предварительно ознакомится и сохранить в памяти, хотя бы несколько различных примеров упомянутых преобразований. Мы полагаем, что разобрав приводимые далее в этой главе задачи, вы сможете выработать интуицию в нахождении мотивов эффективных преобразований различных систем.

Задача 1. Решить систему уравнений   /1/

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ 2x^4 - x^3y + x^2y^2 + xy^3 = 3 \end{cases}$$

Решение: Возведем первое уравнение системы /1/ в квадрат и перейдем к системе /2/

$$\begin{cases} x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 4 \\ 2x^4 - x^3y + x^2y^2 + xy^3 = 3 \end{cases}$$

Прежде всего, отметим, что мы возвышали в квадрат уравнение, обе части которого неотрицательны, а поэтому система /2/ равносильна системе /1/. На первый взгляд, сделанное преобразование лишь усложнило систему. В некотором смысле это действительно так. Но взамен мы получили возможность применить стандартный и весьма эффективный метод получения однородного уравнения по методу, описанному в параграфе 1 данного раздела.

Теперь применительно к системе /2/ проделаем следующую процедуру. Из второго уравнения, предварительно умноженного на 4, вычтем первое уравнение, предварительно умноженное на 3. В результате получим однородное уравнение

$5x^4-4x^3y-2x^2y^2+4xy^3-3y^4=0$

Отметим, что $y \neq 0$. Это обстоятельство позволяет нам разделить полученное уравнение на y^4, преобразуя его в $5\left(\frac{x}{y}\right)^4 - 4\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{y}\right) - 3 = 0$

Теперь, посредством введения замены t=$\frac{x}{y}$, найдем

$5t^4-4t^3-2t^2+4t-3=0$ /3/

В поисках целых корней данного уравнения переберем делители свободного члена: -1,1,-3,3. Непосредственной проверкой устанавливаем, что t= -1 и t= 1 являются корнями данного уравнения. Согласно материалу параграфа 2 раздела 1, многочлен, стоящий в левой части уравнения /3/, может быть разложен на множители, среди которых будут (t+1) и (t-1). Имея в виду выделение этих множителей, проведем следующее преобразование упомянутого многочлена.

$5t^4-4t^3-2t^2+4t-3= 5t^4-5t^2-4t^3+4t+3t^2-3= (5t^4-5t^2)-(4t^3+4t)+(3t^2-3)=$

$5t^2(t^2-1)-4t(t^2-1)+3(t^2-1)= (t^2-1)(5t^2-4t+3)$

Поскольку квадратный трехчлен $5t^2-4t+3$ не имеет корней, можно заключить, что решениями уравнения /3/ являются только t_1= -1 и t_2= 1. Следовательно, исходная система /1/ равносильна совокупности систем

/4/ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x = -y \end{cases}$ и /5/ $\begin{cases} x^2+y^2 = 2 \\ x = y \end{cases}$

Решением системы /4/ являются пары (-1,1) и (1,-1). Решением системы /5/ являются пары (-1,-1) и (1,1).

Ответ: (-1,1), (1,-1), (-1,-1), (1,1).

Задача 2. Решить систему уравнений /1/$\begin{cases} x(y+z) = 27 \\ y(z+x) = 32 \\ z(x+y) = 35 \end{cases}$

Решение: Раскроем скобки в уравнениях системы /1/ и сложим все уравнения, в результате чего получим

2xy+2xz+2yz=94, откуда следует, что xy+xz+yz=47 /2/

Вычитая из уравнения /2/ первое, второе и третье уравнения системы /1/ получаем соответственно

/3/ $yz=20$ /4/ $xz=15$ /5/ $xy=12$

Перемножая уравнения /3/, /4/, /5/, получаем $(xyz)^2=3600$, откуда $xyz=-60$ или $xyz=60$. Рассмотрим последовательно две эти возможности. Если имеет место первая возможность /6/ $xyz=-60$, то, поделив /6/ на /3/, /4/ и /5/ получим соответственно $x=-3$, $y=-4$, $z=-5$. Если имеет место вторая возможность /7/ $xyz=60$, то аналогичная процедура приводит к результату $x=3$, $y=4$, $z=5$. Поскольку использовавшаяся в процессе решения задачи процедура перемножения уравнений может привести к появлению посторонних решений, найденные тройки чисел подлежат проверке. Проверка же показывает, что обе найденные тройки чисел удовлетворяют систем.

Ответ: (-3,-4,-5), (3,4,5).

Задача 3. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases}$

Решение: Отличительной чертой данной системы является то, что в ней неизвестных больше, чем уравнений. Такие системы решаются, как правило, методом экстремальных оценок, суть которого в некоторой степени проясняется на примере решения данной системы. Будем рассуждать следующим образом. Пусть (x, y, z) - решение системы. Тогда

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 3 = x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) - 3 = 3 - 2 \cdot 3 - 3 = 0$, откуда $x = y = z = 1$. Подчеркнем, что полученные равенства являются лишь необходимым условием, которому удовлетворяет решение, и поэтому найденная тройка чисел нуждается в проверке. Проверка же показывает, что найденная тройка действительно является решением системы.

Ответ (1, 1, 1).

Задача 4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0 \\ 2x^2 - 4x + y^3 + 3 = 0 \end{cases}$

Решение: Рассмотрим первое уравнение системы как квадратное относительно x, вычислим дискриминант и потребуем, чтобы он был неотрицателен.

$Д = 1 - y^4 \geqq 0 \Rightarrow |y| \leqq 1$

Перепишем теперь второе уравнение системы в виде

$2x^2 - 4x + 2 + y^3 + 1 = 0 \Rightarrow 2(x-1)^2 + y^3 + 1 = 0$

Отметим, что $(x - 1)^2 \geqq 0$. Отметим также, что в силу найденного выше условия $|y| \leqq I$, выполнено неравенство $y^3 + 1 \geqq 0$. Отсюда следует, что $x = 1$ и $y = - 1$. Проверка показывает, что найденная пара действительно удовлетворяет обоим уравнениям системы.

Ответ: (1, - 1).

Заключение.

При выполнении работы было изучено и проанализировано большое количество научно-популярной и учебной литературы по указанной теме, в том числе и примеры решений уравнений.

Опираясь на информацию, полученную после анализа решения рациональных уравнений различными методами, были сделаны следующие выводы:

1. Рациональные уравнения встречаются в олимпиадных заданиях и в итоговых экзаменах.
2. Рациональные уравнения развивают логическое мышление.
3. Рациональные уравнения повышают уровень математической культуры.

Таким образом, выдвинутая гипотеза исследования оказалось верной и доказанной.

Список литературы.

1. О.Черкасов, А.Якушев «Математика интенсивный курс подготовки к экзамены».
2. Письменский Д. Т. “Математика для старшеклассников”.
3. Г. Корн и Т.Корн “Справочник по математике”.
4. Алгебра. 9 класс. Сборник заданий для проведения письменного экзамена по алгебре за курс основной школы: методическое пособие. – Москва: Дрофа, 2001. – 190 с.
5. Райхмист Р.Б. Задачник по математике для учащихся средней школы и поступающих в ВУЗы: учебное пособие. – Московский лицей, 2001. – 303с.
6. Математика. 9-й класс. Подготовка к ГИА-2013. Учебно-тренировочные тесты по новому плану ГИА: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион-М, 2013. – 126 с.
7. Алгебраический тренажер. Пособие для школьников и абитуриентов/ Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. – Москва: Илекса, 2007. – 320с.