

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Казанский национальный исследовательский
технологический университет»

На правах рукописи



САМЕРХАНОВ ИЛЬДАР ЗЕФЭРОВИЧ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ
С КАНАЛАМИ РАЗЛИЧНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ**

1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
кандидат технических наук,
доктор педагогических наук,
профессор Нуриев Наиль Кашапович

Казань – 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КАНАЛАМИ РАЗЛИЧНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ.....	12
1.1. Общие положения теории массового обслуживания	12
1.2. Классические модели теории массового обслуживания.....	15
1.3. Постановки задач и результаты исследований систем с каналами различной производительности.....	17
ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КАНАЛАМИ РАЗЛИЧНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ.....	32
2.1. Математические модели.....	32
2.1.1. Модель n -канальной системы	33
2.1.2. Модели систем в стационарном режиме	35
2.1.3. Исследование нестационарного режима	44
2.2. Имитационные модели	50
2.2.1. Разработка имитационных моделей в среде AnyLogic	53
2.2.2. Адекватность имитационных моделей	70
2.2.3. Анализ эффективности системы при различных алгоритмах управления потоками.....	76
ГЛАВА 3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КАНАЛАМИ РАЗЛИЧНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ.....	82
3.1. Области эффективности в условиях пуассоновских потоков	82
3.2. Области эффективности в условиях неординарных потоков.....	101

3.2.1. Групповой поток	104
3.2.2. Смешанный поток	105
3.3. Разделение многоканальной системы на независимые приборы.....	113
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	128
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	132
Приложение А. Классификация систем массового обслуживания с каналами различной производительности	144

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Работа посвящена разработке и исследованию моделей систем массового обслуживания (СМО) с каналами различной производительности, а также изучению их структурно-функциональных особенностей.

Как известно, современный этап развития науки и техники значительно повышает роль методов теории вероятностей и, в частности, одного из ее разделов – теории массового обслуживания. В настоящее время модели обслуживания потоков требований имеют ключевое значение для решения ряда теоретических и прикладных задач в разных предметных областях, в том числе в телекоммуникационных, производственных, транспортных, вычислительных системах.

Вместе с тем, при проектировании и моделировании реальных объектов и процессов на сегодняшний день зачастую используется ряд теоретических упрощений, одним из наиболее распространенных среди которых является допущение об одинаковой производительности каналов обслуживания. При этом во многих реальных системах приборы часто не обладают одинаковой производительностью и не могут быть описаны с достаточной степенью точности классическими методами. В особенности диспропорция в интенсивностях обслуживающих устройств характерна для систем, напрямую связанных с деятельностью человека (например, call-центры, службы доставки и т.д.).

Особую актуальность тема диссертационной работы приобретает в связи с наступившей эрой Индустрии 4.0, характеризующейся стремительным развитием киберфизических систем. С учетом того, что ключевую роль в развитии систем такого типа играют цифровые двойники различных объектов и процессов, исследование систем массового обслуживания с каналами различной производительности может способствовать значительному расширению их возможностей.

В частности, в условиях текущей динамики развития науки и происходящего качественного скачка в современной технике и технологиях, одними из важнейших становятся вопросы повышения эффективности процессов любого типа.

В свою очередь, возможность управления потоками в системах массового обслуживания с неэквивалентными каналами может способствовать достижению более высоких эксплуатационных характеристик в сравнении с классическими системами, обладающими каналами равной производительности.

Кроме того, возможность администрирования потоков в СМО с неэквивалентными каналами позволяет ситуативно влиять на эксплуатационные характеристики системы, что представляет прикладной интерес для многих сложных объектов и процессов, требующих управления в режиме реального времени. При этом, для систем такого типа зачастую требуется высокая скорость вычислений. В данных условиях аналитические методы слабо применимы и переходят в разряд консервативных, в то же время возможности средств имитационного моделирования позволяют решать подобные задачи вполне эффективно.

Исследования в вышеуказанных направлениях позволяют сделать ряд нетривиальных выводов о системах массового обслуживания с каналами различной производительности. Таким образом, разработка и исследование моделей систем такого типа, а также изучение их структурно-функциональных особенностей представляется весьма актуальной научной проблемой.

Степень разработанности темы. Основы теории потока однородных событий, элементы которой в дальнейшем легли в основу теории массового обслуживания, разработаны А.Я. Хинчиным. Первые работы по теории массового обслуживания были выполнены А.К. Эрлангом. Большой вклад в развитие данного раздела теории вероятностей внесли А.Н. Колмогоров, Т. Саати, Б.В. Гнеденко, Е.С. Вентцель, Дж. Кендалл, Х. Таха, В. Феллер, А.А. Боровков и другие.

Впервые системы массового обслуживания с каналами различной производительности рассмотрены в работах Х. Гамбеля (Gumbel H.), А.А. Шахбазова, Б. Кришнамурти (Krishnamoorthy B.), Г.Л. Ионина и М.А. Шнепса, В.С. Сингха (Singh V.S.). В дальнейшем более подробно модели СМО такого типа рассматривали Д. Факинос (D. Fakinos), Г. Нат (Nath G.) и Э. Эннс (Enns E.), Р. Ларсен (Larsen, R.) и А. Агравала (Agrawala, A.), Б. Хайек (Hajek B.), У. Лин (Lin W.) и П. Куммар (Kumar P.R.), Дж. Уолланд (Walrand, J.), М. Рубинович

(Rubinovitch, M), Г. Коль (Koole, G.), И. Виниотис (Viniotis, I) и А. Эфремидес (Ephremides, A), З. Росберг (Rosberg Z.) и А.М. Маковски (Makowski A.M.), Р. Вебер (Weber R.) и другие.

В настоящее время исследованием систем с каналами различной производительности занимаются В.В. Рыков, Д.В. Ефросинин, А. Шахбазов, Х.О. Исгудер (H.O. Isguder), А.П. Котенко, А.З. Меликов, Б.К. Кумар (B. K. Kumar) и другие.

На сегодняшний день среди отечественной и зарубежной научной литературы представлено немало работ, внесших значительный вклад в развитие теории массового обслуживания, и в частности – моделей систем с каналами различной производительности. Одновременно с этим стоит отметить, что некоторые работы содержат в основном теоретические выводы, не всегда доступные для разработки приложений. Кроме того, несмотря на кажущуюся разнообразность исследований, посвященных данной тематике, ряд важных вопросов, связанных с функциональными особенностями систем такого типа и эффективным управлением потоками, остался вне поля зрения исследователей.

Объект исследования. Объектом исследования являются системы массового обслуживания с каналами различной производительности.

Предмет исследования. Предметом исследования являются математические и имитационные модели систем массового обслуживания с каналами различной производительности.

Соответствие исследования паспорту научной специальности. Область диссертационного исследования соответствует следующим пунктам паспорта научной специальности 1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: п.6. Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования, алгоритмов и методов имитационного моделирования на основе анализа математических моделей (технические науки); п.8. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента; п.9. Постановка и проведение численных экспериментов, статистический анализ их резуль-

татов, в том числе с применением современных компьютерных технологий (технические науки).

Цель исследования. Целью диссертационной работы является разработка и исследование моделей систем массового обслуживания с каналами различной производительности, изучение их структурно-функциональных особенностей.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

1) построение и исследование математических моделей систем массового обслуживания с каналами различной производительности; построение и исследование имитационных моделей систем массового обслуживания с каналами различной производительности;

2) проведение сравнительного анализа эксплуатационных характеристик систем массового обслуживания с каналами различной производительности, функционирующих в условиях различных схем управления потоками; экспериментальное определение наиболее эффективного алгоритма управления потоками;

3) проведение сравнительного анализа эксплуатационных характеристик систем массового обслуживания с каналами одинаковой и различной производительности (в условиях одинаковой суммарной интенсивности приборов в данных системах), функционирующих при пуассоновских и неординарных потоках;

4) исследование поведения эксплуатационных характеристик многоканальной системы массового обслуживания с приборами различной производительности при ее разделении на несколько независимых одноканальных систем;

5) апробация результатов диссертационного исследования, включая модели систем массового обслуживания с каналами различной производительности, а также особенности их функционирования.

Научная новизна. Результаты, полученные в диссертационной работе, обладают научной новизной, которая состоит в следующем:

1) разработаны и исследованы математические и имитационные модели систем массового обслуживания с каналами различной производительности, функ-

ционирующие в условиях различных схем управления потоками (пп. 6, 8 паспорта специальности 1.2.2);

2) доказана эффективность использования схемы управления потоками, при которой в системах массового обслуживания с неэквивалентными каналами без функции накопления очереди поступающие заявки направляются на свободные каналы наибольшей производительности (п. 9 паспорта специальности 1.2.2);

3) доказано, что системы массового обслуживания с каналами различной производительности при управлении потоками могут быть эффективнее классических систем с каналами одинаковой производительности (в условиях одинаковой суммарной интенсивности приборов в данных системах) как при пуассоновских, так и неординарных потоках; продемонстрирована зависимость показателей эффективности систем с каналами различной производительности от соотношения интенсивностей приборов и величины нагрузки на систему со стороны входного потока (пп. 8, 9 паспорта специальности 1.2.2);

4) доказано, что в условиях управления потоками разделение многоканальной системы с приборами различной производительности на несколько независимых одноканальных систем ухудшает ее показатели эффективности (пп. 8, 9 паспорта специальности 1.2.2).

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость диссертационной работы заключается в расширении области применения математического аппарата теории массового обслуживания в части систем, обладающих каналами различной производительности, результаты исследования применимы в широком классе предметных областей. Практическая значимость работы состоит в том, что значительная часть предложенных в диссертации выводов и результатов в части функциональных особенностей систем массового обслуживания с каналами различной производительности могут быть применены для решения прикладных задач проектирования (в т. ч. предпроектных исследованиях), моделирования и повышения эффективности телекоммуникационных, производственных, логистических, транспортных, вычислительных и других систем, которые могут быть описаны математическими моделями в терминах теории массового

обслуживания. Представленные в работе выводы в части разделения многоканальной системы на независимые одноканальные приборы могут быть полезны, к примеру, при проектировании или моделировании систем, связанных со специализацией каналов.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных в работе задач используются численные и аналитические методы с применением аппарата теории вероятностей, теории случайных процессов, теории массового обслуживания. Разработка имитационных моделей систем массового обслуживания осуществляется на базе среды AnyLogic. Информационную базу диссертационного исследования составили работы теоретического и прикладного характера (в т. ч. монографии, научные статьи, диссертации, учебные пособия) отечественных и зарубежных авторов, посвященные теории вероятностей, теории массового обслуживания, математическому и имитационному моделированию.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие положения исследования:

1) модели систем массового обслуживания с каналами различной производительности, функционирующих при различных схемах управления потоками;

2) результаты сравнительного анализа эксплуатационных характеристик систем массового обслуживания с каналами различной производительности без функции накопления очереди при различных схемах управления потоками, демонстрирующие эффективность алгоритма направления поступающих заявок на свободные приборы наибольшей производительности;

3) результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие, что системы массового обслуживания с каналами различной производительности при управлении потоками могут быть эффективнее классических систем с каналами одинаковой производительности (в условиях одинаковой суммарной интенсивности приборов в данных системах) как при пуассоновских, так и неординарных потоках; зависимость показателей эффективности систем с приборами различной производительности от соотношения интенсивностей каналов и величины нагрузки на систему со стороны входного потока;

4) результаты вычислительных экспериментов, демонстрирующие ухудшение показателей эффективности многоканальной системы массового обслуживания с приборами различной производительности при ее разделении на несколько независимых одноканальных систем.

Степень достоверности. Достоверность результатов, полученных в работе, обеспечивается корректностью использования математического аппарата теории вероятностей, теории массового обслуживания, численных методов и проверкой адекватности имитационных моделей.

Личный вклад автора. Основные положения, теоретические выводы и практическая часть получены автором самостоятельно. В совместных публикациях автору принадлежит участие в постановке задач, методы их решения и результаты экспериментальных исследований.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы доложены на VI Международной научно-практической конференции «Современные исследования и инновации в науке и технике» (Москва, 2022 г.), XIII Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы научных исследований» (Саратов, 2023 г.), XII Международной научно-практической конференции «Современные стратегии и цифровые трансформации устойчивого развития общества, образования и науки» (Москва, 2023 г.), XI Всероссийской научно-практической конференции по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности «Имитационное моделирование. Теория и практика» (ИММОД-2023) (Казань, 2023 г.).

Результаты диссертационного исследования используются в аналитической деятельности АО «Казанское пассажирское автотранспортное предприятие №1», а также в учебном процессе ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технологический университет».

Публикации. По тематике диссертации опубликовано 9 научных работ общим объемом 3,56 п.л. (авторский вклад – 3,17 п.л.), в том числе 5 статей в рецензируемых научных журналах, входящих в перечень ВАК – «Современные наукоемкие технологии», «Научно-технический вестник Поволжья», «Вестник Техно-

логического университета», 4 статьи – в прочих журналах и сборниках трудов всероссийских и международных конференций.

Структура и объем диссертации. Диссертационное исследование состоит из введения, 3 глав, заключения, списка литературы, одного приложения. Полный объем диссертации составляет 144 страницы, включая 64 рисунка и 53 таблицы. Список литературы содержит 109 наименований.

ГЛАВА 1. СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КАНАЛАМИ РАЗЛИЧНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ

В настоящей главе кратко изложены некоторые элементы теории массового обслуживания, приведены классические модели СМО с каналами одинаковой производительности, в формате литературного обзора представлены основные постановки задач и результаты исследований систем с каналами различной производительности.

1.1. Общие положения теории массового обслуживания

Система массового обслуживания характеризуется структурой, которая в простейшем случае состоит из следующих элементов:

- входящий поток требований (заявок);
- очередь;
- каналы обслуживания (приборы, устройства);
- выходящий поток требований (заявок).

На Рисунке 1.1 представлена общая схема функционирования системы массового обслуживания.

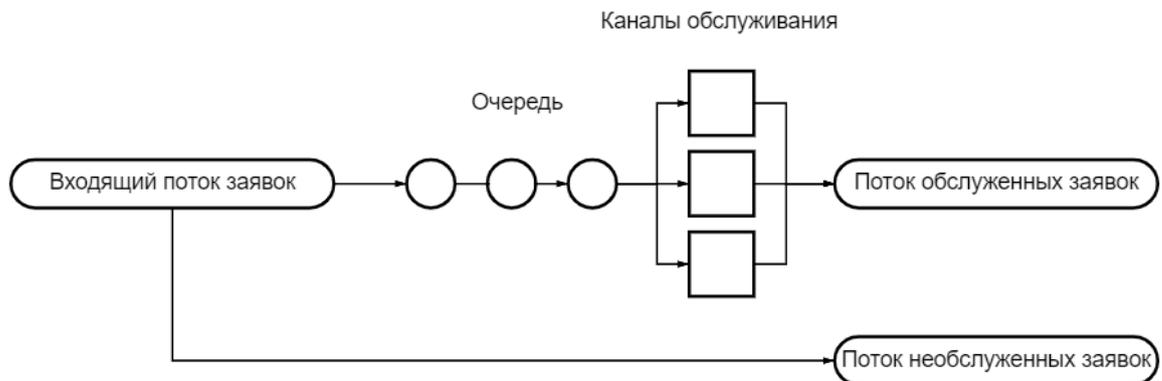


Рисунок 1.1 – Общая схема функционирования СМО (обобщено автором)

Работа любой СМО представляет собой выполнение поступающего на нее потока требований. Требования поступают одна за другой в некоторые случайные мо-

менты времени. Обслуживание поступившей заявки продолжается некоторое время, после чего канал освобождается и снова готов для приема следующей заявки. Каждая система массового обслуживания в зависимости от числа каналов и их производительности обладает определенной пропускной способностью.

Функционирование системы массового обслуживания представляет собой случайный процесс, так как моменты поступления заявок и время их обслуживания, как правило, случайны. Это приводит к тому, что в какие-то моменты времени скапливается излишне большое количество заявок, и они становятся в очередь или покидают систему необслуженными, а в какие-то моменты времени заявок в системе будет мало, в результате чего система будет недогружена.

При анализе случайных процессов в системах массового обслуживания часто используют граф состояний – схематическое изображение возможных состояний системы. Так, на Рисунке 1.2 представлен граф состояний 2-х канальной системы массового обслуживания без функции накопления очереди, обладающей каналами одинаковой производительности.

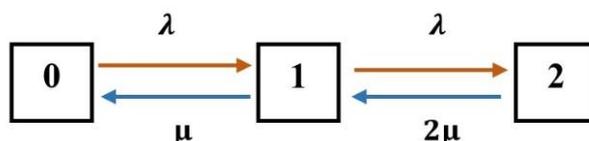


Рисунок 1.2 – Граф состояний 2-х канальной СМО с приборами одинаковой производительности (построено автором)

Представленная система может находиться в одном из 3 состояний:

- в системе нет заявок;
- в системе 1 заявка на обслуживании;
- в системе 2 заявки на обслуживании.

Переход системы из состояния «0» в состояние «1» происходит под воздействием потока интенсивностью λ , а возврат в состояние «0» происходит под воздействием потока обслуживания интенсивностью μ .

В качестве показателей эффективности систем массового обслуживания могут рассматриваться различные параметры, в том числе:

- P_0 – вероятность состояния, при котором СМО свободна;

- $P_{\text{отк}}$ – вероятность состояния, при котором все каналы системы заняты;
- абсолютная пропускная способность – среднее число заявок, которое может обслужить СМО в единицу времени;
- относительная пропускная способность – отношение среднего числа заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени, к среднему числу поступивших за это же время заявок;
- \bar{k} – среднее число каналов, занятых обслуживанием требований.

Кроме того, зачастую в качестве параметров эффективности систем массового обслуживания также рассматриваются среднее время ожидания заявок в очереди, среднее число заявок в очереди, среднее время нахождения заявки в системе, среднее время обслуживания, и другие.

Системы массового обслуживания классифицируются по ряду признаков, рассмотрим некоторые из них. Так, по числу каналов обслуживания СМО подразделяются на 2 класса:

- одноканальные;
- многоканальные (n -канальные).

Многоканальные системы массового обслуживания могут состоять как из приборов одинаковой, так и различной производительности.

По дисциплине обслуживания СМО подразделяются на 2 класса:

- с функцией накопления очереди;
- без функции накопления очереди (с отказами).

В СМО без функции накопления очереди при поступлении в систему нового требования в момент, когда все каналы заняты, она получает отказ в обслуживании и покидает систему. В СМО с ожиданием в тех случаях, когда поступившая в систему заявка обнаруживает все каналы занятыми, она не покидает систему, а становится в очередь. Системы массового обслуживания с ожиданием также подразделяются на несколько классов: системы с ограниченной и неограниченной очередью, системы с ограниченным и неограниченным временем ожидания.

По ограничению потока заявок СМО подразделяются на 2 класса:

- замкнутые;

– открытые.

Система массового обслуживания, в которой поток требований ограничен и заявки, покинувшие систему, могут в нее возвращаться, является замкнутой, в противном случае – открытой.

По количеству этапов обслуживания СМО подразделяются на 2 класса:

- однофазные;
- многофазные.

Если в СМО процесс обслуживания состоит из одного этапа – она является однофазной, если из нескольких этапов, следующих один за другим – многофазной.

1.2. Классические модели теории массового обслуживания

Для дальнейшего сравнительного анализа с моделями систем массового обслуживания с неэквивалентными каналами, рассмотрим классические модели СМО с приборами одинаковой производительности без функции накопления очереди.

На Рисунке 1.3 представлен граф состояний 2-х канальной СМО с отказами, на вход которой поступает пуассоновский поток заявок интенсивностью λ . Приборы обладают равной интенсивностью μ . Система такого типа представляет собой классический процесс гибели-размножения.

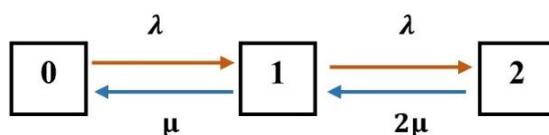


Рисунок 1.3 – Граф состояний 2-х канальной СМО с приборами одинаковой производительности (построено автором)

Система имеет 3 возможных состояния, их вероятности в стационарном (финальном) режиме описываются следующими выражениями:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}, P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} \right]^{-1}, P_1 = \frac{\rho}{1!} P_0, P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0, \quad (1.1)$$

где ρ – приведенная интенсивность потока заявок, P_0 – вероятность того, что система свободна, P_1 – вероятность того, что в СМО находится 1 заявка на обслуживании,

а P_2 – вероятность того, что в СМО находится 2 заявки. Сумма вероятностей всех состояний системы $\sum_{i=0}^2 P_i = 1$.

Рассмотрим 3-х канальную систему с приборами одинаковой производительности, граф состояний которой представлен на Рисунке 1.4.

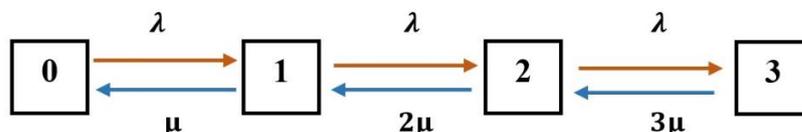


Рисунок 1.4 – Граф состояний 3-х канальной СМО с приборами одинаковой производительности (построено автором)

Данная система имеет 4 возможных состояния, их вероятности в стационарном режиме описываются следующими выражениями:

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} \right]^{-1}, P_1 = \frac{\rho}{1!} P_0, P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0, P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0 \quad (1.2)$$

Также рассмотрим граф состояний 4-х канальной СМО с приборами одинаковой производительности, представленный на Рисунке 1.5.

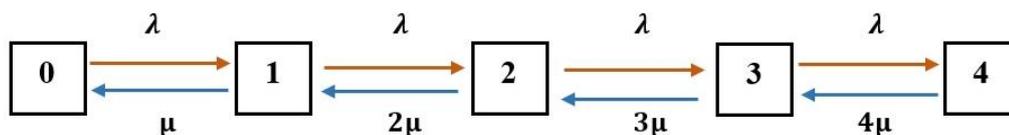


Рисунок 1.5 – Граф состояний 4-х канальной СМО с приборами одинаковой производительности (построено автором)

Система имеет 5 возможных состояний, их вероятности в стационарном режиме описываются следующими выражениями:

$$P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} \right]^{-1}, \quad (1.3)$$

$$P_1 = \frac{\rho}{1!} P_0, P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0, P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0, P_4 = \frac{\rho^4}{4!} P_0$$

1.3. Постановки задач и результаты исследований систем с каналами различной производительности

Вопросы теории массового обслуживания (ТМО) рассматривались многими отечественными и зарубежными авторами: моделям систем обслуживания посвящено немало исследований как сугубо прикладного, так и теоретического характера. Интерес научного сообщества к данной области теории вероятностей и случайных процессов во многом объясняется ее значением и универсальностью для решения широкого круга научно-прикладных проблем.

В настоящее время задачи, решение которых сводится к расчету характеристик СМО, возникают в самых разных сферах, в том числе в производственных, логистических, бытовых, телекоммуникационных, компьютерных системах и др. Одновременно с этим, несмотря на разнообразные приложения, большинство исследованных моделей систем массового обслуживания опираются на ряд упрощений, одним из которых является одинаковая производительность каналов обслуживания. В настоящее время в общей массе научно-исследовательских работ, посвященных ТМО, моделям систем с каналами различной производительности, развитие которых представляется актуальным по ряду очевидных причин, уделено недостаточно внимания.

Здесь же важно отметить, что многие реальные системы, которые могут быть представлены в виде моделей СМО, обладают каналами различной интенсивности. В частности, однозначное представление системы в виде классической модели с приборами одинаковой производительности возможно только для технических объектов и процессов (зачастую и в системах такого типа используются неэквивалентные приборы). Напротив, практически любые системы, в которых роль каналов обслуживания играют люди, или процессы, непосредственно управляемые людьми (службы доставки, call-центры, транспортные компании и т.д.), однозначно могут быть описаны только моделями систем с каналами различной производительности.

В некоторых случаях, когда величины интенсивностей каналов различаются незначительно, этим фактом можно пренебречь (если возможная погрешность в рамках решаемой задачи это допускает). Однако для систем, требующих высокой точности, или в которых интенсивности каналов сильно различаются, подобные допущения (в т. ч. использование для их описания классических моделей с каналами одинаковой производительности) могут приводить к неадекватности моделей, т.е. их неспособности отражать основные характеристики реального объекта или процесса с приемлемой точностью.

Далее в работе будут представлены результаты основных научно-исследовательских работ, оказавших, по мнению автора, наибольшее влияние на развитие теории массового обслуживания в части систем с каналами различной производительности, и заложившие основу настоящей диссертационной работы. Прежде чем перейти к их рассмотрению, представляется целесообразным кратко обратиться также и к фундаментальным трудам, оказавшим значимое влияние на развитие теории массового обслуживания.

Первые задачи, решение которых оказало особое влияние на становление теории телетрафика, и в дальнейшем – теории массового обслуживания, были рассмотрены датским математиком и инженером А.К. Эрлангом в период 1909–1922 гг. и касались вопросов проектирования телефонных сетей. Так, в работе [1] (1909), получившей широкое признание по всему миру, А.К. Эрланг представил формулу для расчета вероятностей потерь вызовов в условиях пуассоновского потока. Идеи А.К. Эрланга были обобщены и получили последующее развитие в работах шведского инженера К. Пальма.

Дальнейшее развитие теория телетрафика получила в исследовательских работах выдающегося советского математика А.Я. Хинчина, что и привело к возникновению новой области прикладной математики – теории массового обслуживания. Сам термин «теория массового обслуживания» также был предложен А.Я. Хинчиным, основные результаты трудов которого были опубликованы в монографии [2] (1963). В свою очередь, методы теории массового обслуживания

опирались на фундаментальные работы А.Н. Маркова и А.Н. Колмогорова в области теории случайных процессов.

Возрастающий интерес научного сообщества к методам теории массового обслуживания (что явилось следствием развития прикладных возможностей теории) предопределило ее стремительное развитие, и сегодня вопросам ТМО посвящено немало фундаментальных трудов отечественных и зарубежных авторов: в первую очередь следует назвать книги Б.В. Гнеденко и И.Н. Коваленко [3] (1966), Л. Такача [4] (1971), Т. Саати [5] (1971), А.А. Боровкова [6] (1972), Л. Клейнрока [7] (1979). Большое влияние на популяризацию и развитие теории массового обслуживания, до этого почти не освещавшейся в учебной литературе, также оказало изложение ее основ в работе Е.С. Вентцель [8] (1969). Одним из наиболее фундаментальных и классических учебных пособий в данной области в настоящее время считается работа Г.И. Ивченко, В.А. Каштанова и И.Н. Коваленко [9] (1982). Там же приведен список изданий и публикаций по теории массового обслуживания, которые получили признание специалистов. Значимый вклад в развитие методов прикладной теории массового обслуживания внес А.П. Кирпичников [10].

Несмотря на то, что вышеперечисленные труды, вне всякого сомнения, носят фундаментальный характер и в них рассматривается весьма широкий круг прикладных и теоретических задач теории массового обслуживания, о существовании систем с каналами различной производительности в них только упоминается: в некоторых работах в явном виде, в некоторых – опосредованно.

В настоящее время представляется возможным выделить несколько основных направлений научно-исследовательских работ (НИР), посвященных системам с неэквивалентными приборами, среди них:

– исследования, связанные с управлением потоками заявок и их распределением между каналами обслуживания; в данных работах изучаются, как правило, характеристики систем при различных схемах администрирования потоков, их эффективность и функциональные особенности;

– исследования, связанные с изучением различных модификаций систем с каналами различной производительности (системы с отдельными очередями, с приоритетами, с отпусками, с катастрофами и др.);

– исследования, связанные с приложениями систем с неэквивалентными каналами; в данных работах изучаются, как правило, задачи моделирования реально существующих объектов и процессов.

Предложенное на Рисунке 1.6 разделение НИР по направлениям является весьма условным и не ставит своей целью структурировать все работы о системах массового обслуживания с каналами различной производительности на определенные классы, но представлена лишь для упрощенной систематизации наиболее важных, с точки зрения автора, видов публикаций. Кроме того, во многих работах одновременно рассматривается несколько задач: в частности, вопросы управления потоками заявок являются общими для многих исследований данной области.



Рисунок 1.6 – Основные направления исследований СМО с каналами различной производительности (предложено автором)

В отличие от классических СМО с каналами одинаковой производительности, в системах с неодинаковой интенсивностью работы приборов возникают задачи управления потоками заявок (другими словами, распределения заявок между каналами обслуживания).

Наиболее часто используются следующие схемы управления:

– равновероятное распределение (RCS – Randomly Chosen Server), при котором заявка поступает на один из свободных каналов системы с одинаковой вероятностью;

– распределение с приоритетом «сильнейшего» канала (FSF – Fastest Server First), при котором заявка поступает на свободный канал наибольшей производительности;

– пороговое управление, при котором «сильный» канал занят всегда, а медленный включается только в том случае, если количество заявок в очереди достигает определенного уровня. Очевидно, что данный вид управления потоком не может быть использован в системах с отказами.

Иногда рассматриваются схема управления с приоритетом «слабого» канала, при котором заявка поступает на свободный канал наименьшей производительности (SSF – Slowest Server First), и распределение между приборами с вероятностью, пропорциональной их интенсивностям обслуживания.

Вообще, СМО с каналами различной производительности привлекли внимание исследователей во второй половине XX века: по всей видимости, впервые такая система была рассмотрена в работе Х. Гамбеля (Gumbel H.) [11] (1960). В данной статье представлены результаты исследования системы с бесконечной очередью и равновероятным распределением заявок, функционирующей в режиме пуассоновских потоков, предложены формулы для вычисления стационарных состояний системы. В русскоязычной литературе первая работа, посвященная системам с каналами различной производительности, опубликована, по всей видимости, А.А. Шахбазовым [12] (1962), который рассмотрел пуассоновские потоки в системе массового обслуживания с потерями.

Равновероятное распределение заявок в системе с каналами различной производительности рассматривал также В.С. Сингх (Singh V.S.). В [13] (1970) В.С. Сингх исследовал 2-х канальную систему с отказами, в [14] (1971) представил результаты исследования 3-х канальной системы с бесконечной очередью, в т. ч. вычислил вероятности стационарных состояний, среднее время ожидания и среднее количество заявок в системе. Работа [14] стала также одной из первых, в которой была рассмотрена система, состоящая более чем из 2 приборов.

2-х канальную систему, функционирующую в условиях равновероятного распределения заявок, рассматривал в [15] (1980) также Д. Факинос (D. Fakinos).

В работе Г.Л. Ионина и М.А. Шнепса [16] (1966) исследуется система с каналами различной производительности без функции накопления очереди, и для минимизации вероятностей отказов в обслуживании при установившемся режиме предлагается направлять заявки на свободный канал наибольшей производительности. Похожая задача также рассматривалась в [17] Г. Натом (Nath G.) и Э. Эннсом (Enns E.).

Другой вариант управления потоками в системе с каналами различной производительности был рассмотрен Б. Кришнамурти (Krishnamoorthy B.) [18] (1963). Исследуя 2-х канальную СМО с очередью в условиях пуассоновского потока, Б. Кришнамурти предположил, что канал с меньшей производительностью стоит занимать только в том случае, если более «быстрый» канал занят, а количество заявок в очереди достигает определенного порогового уровня $\left\lceil \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\rceil + 1$, где μ_1 – производительность «быстрого» канала, μ_2 – производительность «медленного» канала.

В дальнейшем более подробно пороговое управление в 2-х канальных СМО рассмотрели Р. Ларсен (Larsen, R.) и А. Агравала (Agrawala, A.) [19] (1983), Б. Хайек (Hajek B.) [20] (1984), У. Лин (Lin W.) и П. Куммар (Kumar P.R.) [21] (1984), Дж. Уолранд (Walrand, J.) [22] (1984), М. Рубинович (Rubinovitch, M.) [23] (1985), Г. Кооль (Koole, G.) [24] (1995) и другие.

Следующим шагом в исследовании данного метода распределения заявок стало изучение систем, состоящих более чем из 2 приборов. Такая задача рассматривалась в работах И. Виниотиса (Viniotis, I) и А. Эфремидеса (Ephremides, A.) [25] (1988), З. Росберга (Rosberg Z.) и А.М. Маковски (Makowski A.M.) [26] (1990), Р. Вебера (Weber R.) [27] (1993) и других.

Значительный вклад в развитие теории массового обслуживания, и в частности – моделей систем с каналами различной производительности внес В.В. Рыков. Так, термин «управляемая система массового обслуживания» был введен О. И. Бронштейном и В. В. Рыковым в работе [28]. Приведем определение данного понятия из работы [29]: «Систему, в которой какие-либо из параметров, определяющих тот или иной из ее элементов, допускают применение управляю-

щих воздействий, назовем управляемой системой массового обслуживания (УСМО)» [29]. В [30] (2001) В.В. Рыковым приводится доказательство оптимальности пороговых значений. Стоит заметить, что неполнота приведенных в указанной работе доказательств, с точки зрения автора настоящей диссертационной работы – формальная (в статье не было явно оговорено условие устойчивости оптимального управления), была отмечена в работе Ф. Верикюра (Véricourt, F. De.) и Ю.П. Чжоу (Y. P. Zhou) [31] (2006).

Строгостью математического аппарата применительно к системам с каналами различной производительности отличаются работы В.В. Рыкова и Д.В. Ефросинина. В [32] (2003) Д.В. Ефросининым и В.В. Рыковым оптимальная относительно критерия минимизации средней длины очереди политика управления исследуется с помощью численного метода с использованием алгоритма Ховарда. В работе [33] (2008) Д. В. Ефросининым и В. В. Рыковым рассмотрены характеристики производительности систем с неэквивалентными каналами при оптимальной и других дисциплинах занятия каналов, проведено их сравнение. В качестве одного из выводов авторы отмечают, что «если ввести некоторый коэффициент однородности (неоднородности) типа $k_H = \frac{1/\mu_{max}}{1/\mu_{min}} = \frac{\mu_{min}}{\mu_{max}}$, то если k_H близок к единице, характеристики производительности системы с неоднородными приборами приближаются к аналогичным характеристикам системы с однородными приборами» [33]. В [34] (2009) В.В. Рыковым и Д.В. Ефросининым рассмотрена система с каналами различной производительности с дополнительной структурой штрафов за ожидание и обслуживание. Продемонстрировано, что критерием выбора более эффективного прибора является наименьшая полная стоимость обслуживания на этом приборе. В некоторых работах Д.В. Ефросинина [35–36] (2016–2017) пороговое управление рассмотрено применительно к ненадежным каналам обслуживания.

Вопросы эффективного распределения заявок между обслуживающими устройствами различной производительности также рассматривались в работах Е.А. Печеного, Н.К. Нуриева и С.Д. Старыгиной. Так, в работах [37–38] на базе уравнений Колмогорова представлены модели систем с неэквивалентными кана-

лами для 3 схем управления потоками заявок: равновероятно между каналами; с вероятностью, пропорциональной интенсивностям каналов; с приоритетом «сильного» канала. В [38] авторами сделан вывод о нецелесообразности объединения в одну систему приборов, значительно различающихся по интенсивностям обслуживания, в [39] представлен сравнительный анализ эксплуатационных характеристик систем с каналами одинаковой и различной производительности.

В [40–42] продемонстрированы области параметров, в которых системы с каналами различной производительности могут быть эффективнее классических систем с одинаковыми приборами.

Отдельного внимания заслуживают работы, посвященные системам с упорядоченным входом, функционирование которых в общем случае представляет собой следующий процесс: в системе имеется n каналов. Перед каждым каналом есть своя очередь конечной емкости. При поступлении заявка попадает на прибор с номером 1 и, если он свободен, обслуживается на нем. Если канал занят – встает к нему в очередь. Если канал с номером 1 занят и очередь перед ним заполнена, заявка переходит к каналу с номером 2; если канал с номером 2 занят – встает перед ним в очередь; если очередь перед каналом 2 заполнена – переходит к каналу 3 и так до тех пор, пока заявка не найдет свободный канал или место в очереди. Если свободных приборов и мест в очереди нет – заявка покидает систему необслуженной.

Модели подобных систем были изучены в работах Р.Б. Купера (R.B. Cooper) [43] (1976), М. Мацуи (M. Matsui) и Дж. Фукуты (J. Fukuta) [44] (1977), В.М. Навейна (W.M. Nawijn) [45–46] (1983–1984), Б. Пурбабая (B. Pourbabai) и Д. Сондермана (D. Sonderman) [47–48] (1986, 1987), Д.Д. Яо (D.D. Yao) [49–50] (1986, 1987), В. Саглама (V. Saglam) и А. Шахбазова (A. Shahbazov) [51] (2007), Х.О. Исгудера (H.O. Isguder) и К.К. Челикоглу (C.C. Celikoglu) [52] (2012), Х.О. Исгудера (H.O. Isguder) и У.У. Кочера (U.U. Kocer) [53] (2014). В работах Б.У. Лина (B.W. Lin) и Э.А. Эльсайда (E.A. Elsayed) [54–55] (1978, 1983), по-видимому, впервые, системы с упорядоченным входом были смоделированы с помощью компьютерных программ.

Принципиально новые методы расчета и моделирования систем массового обслуживания с отдельными очередями к каналам рассмотрены в работах А.П. Котенко, которого можно назвать пионером в анализе систем с точки зрения организации эффективных структур. В работах А.П. Котенко для аналитического описания СМО с каналами различной производительности предложено использовать конечные автоматы Мили.

В [56] для описания систем с различными каналами (с каналами различной производительности и/или отдельными очередями) авторами предлагается следующий протокол оптимизации работы системы по среднему времени обслуживания заявок и минимизации вероятности отказа: если существует только один свободный канал обслуживания, заявка направляется к нему. В противном случае выбирается i -й канал обслуживания, способный обработать заявку с минимальным средним суммарным временем T обслуживания попавших в него заявок:

$$T = \min_{i: 0 \leq y_i \leq |x_i m_i - 1|} \mu_i^{-1} (y_i + 1 + \chi_i), \quad (1.4)$$

где μ_i – пропускная способность, m_i – число мест в очереди i -го канала, y_i соответствует наполненности очереди i -го канала, χ_i – случайная величина, характеризующая незавершенность обработки заявки, находящейся в i -м канале в момент поступления новой заявки, $0 \leq \chi_i \leq 1$. В работе представлен метод моделирования СМО с помощью конечных автоматов Мили. Также авторами отмечается, что представление системы массового обслуживания конечным автоматом позволяет описывать системы для различных потоков, в т. ч. не пуассоновских. В [57] представлена разработка комплекса программ имитационного моделирования систем с различными каналами, в основе алгоритма которого также лежит использование конечных автоматов.

Современный этап развития моделей систем массового обслуживания с каналами различной производительности также связан с разработкой и изучением различных модификаций подобных систем и их структурных элементов. К примеру, одной из таких модификаций являются разнотипные заявки. Впервые системы такого типа рассмотрены А.З. Меликовым.

Так, в [58] (2019) авторами рассматриваются системы, в которую поступают заявки 2 типов: высокоприоритетные (H-запросы) и низкоприоритетные (L-запросы). Заявки с высоким приоритетом обслуживаются на «быстрых» каналах (F-серверы), заявки с низким приоритетом в зависимости от состояния системы могут обслуживаться как на «медленных» (S-серверы), так и на «быстрых» каналах. Для организации их обслуживания в указанной работе вводятся скачкообразные приоритеты (jump priorities, JP), при которых могут осуществляться скачки L-запросов в очередь H запросов, что позволяет избежать слишком долгого ожидания в очереди низкоприоритетных запросов. Для определения приоритетов в системе с отдельными очередями предлагается следующее пороговое правило:

$$J(n_H, n_L) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } n_L - n_H \geq r, n_H < K_H \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases} \quad (1.5)$$

где $J(n_H, n_L)$ – вероятность перехода L-запроса в H-буфер, n_L – число низкоприоритетных L-запросов, n_H – число высокоприоритетных H-запросов, r – пороговый параметр, K_H – максимальное число H-запросов в системе. Иными словами, низкоприоритетный L-запрос переходит в конец очереди с высокоприоритетными H-запросами в том случае, если разница между числом L-запросов и H-запросов в системе больше специально введенного параметра r ($1 \leq r \leq K_L$). В противном случае он поступает в очередь с L-запросами или получает отказ в обслуживании.

Другое правило определения скачкообразных приоритетов рассмотрено в работе [60]. Состояние системы задается вектором (h, l) , где h – число h-запросов, l – число l-запросов в системе. В отличие от [58], в [60] вводится уже два пороговых параметра: $r_l, 1 \leq r_l \leq K_l$ и $r_h, 1 \leq r_h \leq K_h$. Здесь K_l и K_h – количество l-заявок и h-заявок соответственно.

$$J(h, l) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } l \geq r_l \text{ и } h < r_h \\ 0 & \text{в других случаях} \end{cases} \quad (1.6)$$

В [59] рассмотрены системы с разнотипными заявками без очередей. В зависимости от состояния системы низкоприоритетные и высокоприоритетные заявки могут обслуживаться как на «медленных», так и на «быстрых» серверах. Для организации обслуживания предлагается следующее правило. Если при поступ-

лении высокоприоритетной или низкоприоритетной заявки в соответствующей группе серверов есть хотя бы один свободный сервер, то эта заявка начинает обслуживаться в своей группе. Если при поступлении высокоприоритетной H-заявки все «быстрые» сервера заняты, но есть хотя бы один свободный «медленный» сервер, то с вероятностью $\alpha(i)$, $0 \leq \alpha(i) \leq 1$ заявка начинает обслуживаться в любом свободном «медленном» сервере, или с вероятностью $1 - \alpha(i)$ покидает систему необслуженной. Если при поступлении низкоприоритетной L-заявки все «медленные» сервера заняты, но есть хотя бы один свободный «быстрый» сервер, то с вероятностью $\beta(j)$, $0 \leq \beta(j) \leq 1$ заявка начинает обслуживаться в любом свободном «быстром» сервере, или с вероятностью $1 - \beta(j)$ покидает систему необслуженной.

В [61] рассмотрена 2-х канальная система с бесконечной очередью, в которую поступает пуассоновский поток идентичных заявок. В данной системе «быстрый» F-сервер работает всегда, а «медленный» S-сервер включается с определенной вероятностью α , $0 \leq \alpha \leq 1$ только тогда, когда длина очереди не меньше определенной пороговой величины N.

Немалый интерес также представляют работы, посвященные системам массового обслуживания с ненадежными приборами («прогулки прибора», «отпуска»). Каналы в таких системах характеризуются тем, что время от времени могут выходить из строя и восстанавливаться. Применительно к системам с каналами различной производительности одним из первых системы такого типа рассмотрели Б.К. Кумар (B. K. Kumar) и С.П. Мадхесари (S. P. Madhesari) в работе [62] (2005). Также системы с ненадежными приборами рассмотрены в статьях [63–68] и др.

В ряде работ рассмотрены системы с катастрофами. Катастрофы, происходящие случайным образом, приводят к уничтожению заявок, ожидающих в очереди, и временному отключению приборов. Примерами таких систем могут быть, к примеру, компьютерные системы и сети, зараженные вирусными программами. Системы такого типа рассмотрены, к примеру, в работах [69–71].

В [72] (2018) О.А. Осиповым рассматривается СМО с каналами различной производительности, в которой заявки, поступающие на обслуживание, делятся на фрагменты и мгновенно занимают все свободные приборы. Каждая заявка считается обслуженной только после того, как все его фрагменты завершат обслуживание.

В рассмотренных ранее работах предполагалось, что потоки в системе – ординарные (то есть вероятность одномоментного поступления нескольких заявок в систему равна нулю). Зачастую в реальных системах требования могут поступать одновременно. По всей видимости, первые работы, положившие начало исследованиям систем с групповыми заявками, были опубликованы Н. Бейли (Bailey N.) [73] (1954) и Ф. Даунтоном (Downton F.) [74] (1955). Также системы такого типа рассматривали М. Шодри (Chaudhry M. L.) и Дж. Темплетон (Templeton J. G.) [75] (1983), Г. Руперт (Rupert G.) и Дж. Миллер (Miller J.) [76] (1959), Н. Джайсвал [77] (1961), Ю. Бхат (Bhat U. N.) [78] (1964). Системы с групповым обслуживанием также рассматривались в работах П. Финча (Finch P. D.) [79] (1962) и Дж. Гойяла (Goyal J. K.) [80] (1967). Большой вклад в развитие систем с групповым обслуживанием каналов внес М.Ньютс [81]. Значительный вклад в развитие и популяризацию группового обслуживания внесли труды Дж. Коэн (Cohen J.) [82] и Т. Саати [5]. В некоторых работах групповые потоки рассмотрены в системах массового обслуживания с каналами различной производительности, к примеру [83].

Важное значение для развития научных исследований имеют обзорные публикации [84] (2020). Такие работы позволяют в сжатом и структурированном виде представить результаты исследований в определенной области. Классическими обзорами в теории массового обслуживания считаются работы И.Н. Коваленко [85–86] (1965–1971). Большой обзор, посвященный управляемым системам массового обслуживания приведен В.В. Рыковым [29] (1975), или, например, в работе [87] (1975). Краткие обзоры работ про системы с каналами различной производительности можно найти, к примеру, в работах [88–89] и некоторых других.

Не претендуя на полноту представленного обзора научно-исследовательских работ, посвященных СМО с каналами различной производи-

тельности (данный вопрос, без сомнения, должен являться предметом самостоятельного исследования), важно отметить, что автору неизвестна обобщающая литература, посвященная исключительно системам с приборами различной производительности и включающая в себя полную и систематизированную теоретическую базу данной области. Вполне очевидно, что такой обзор может способствовать развитию исследований систем с неэквивалентными каналами.

Одновременно с этим стоит отметить, что в русскоязычной литературе, посвященной СМО с каналами различной производительности, в настоящее время отсутствует общепринятая и устоявшаяся терминология.

Так, применительно к системам массового обслуживания с каналами различной производительности наиболее часто используют термины «неоднородные приборы» [32–34; 56; 57], «различимые каналы» [56; 57], «неэквивалентные каналы» [37–42], «каналы (приборы) различной производительности» [12; 16; 29; 38–42], «каналы с неодинаковой (различной) интенсивностью работы» [39; 72], «различные дисциплины обслуживания» [56], «серверы с различными скоростями» [60; 61], «гетерогенные серверы» [58–61] и другие. В зарубежной литературе используется также различная терминология, но чаще всего применительно к системам с каналами различной производительности используется термин «гетерогенные серверы» («heterogeneous servers», «HS»).

В настоящей диссертационной работе преимущественно используется термин «каналы разной производительности», так как он, по мнению автора, наиболее содержательно отражает суть изучаемого явления.

Резюмируя обзор работ, посвященных СМО с каналами различной производительности, стоит отметить, что на сегодняшний день среди отечественной и зарубежной научной литературы представлено немало исследований, внесших значительный вклад в развитие теории массового обслуживания, и в частности – моделей систем с неэквивалентными каналами. По всей видимости, наиболее существенное влияние на развитие данной области внесли:

– первые статьи, посвященные системам с каналами различной производительности (Х. Гамбель, А.А. Шахбазов, Б. Кришнамурти и другие);

– первые публикации, посвященные системам с каналами различной производительности, состоящим более чем из 2 приборов (В. Сингх, И. Виниотис, А. Эфремидес, З. Росберг и А.М. Маковски, Р. Вебер и др.);

– современные работы, посвященные методам эффективного управления потоками заявок в системах такого типа и их различным модификациям (В.В. Рыков и др.).

Нельзя не отметить единство взглядов всех авторов на тему актуальности изучения моделей систем с каналами различной производительности. Одновременно с этим, некоторые работы содержат в основном теоретические выводы, не всегда доступные специалистам-практикам, а также слабо применимые для решения задач прикладного характера.

Таким образом, несмотря на кажущуюся обширность тем и направлений, представленных в рассмотренных выше работах, целый ряд конкретных вопросов, связанных с СМО с каналами различной производительности, в настоящее время не проработан на достаточном уровне и требует дополнительных исследований, а некоторые аспекты данной области остались вне поля зрения исследователей.

В частности, на сегодняшний день практически не исследованы параметры, при которых система с неэквивалентными каналами могла бы быть эффективнее классической СМО с приборами одинаковой производительности. Вне всяких сомнений, установление подобных областей может способствовать значительному расширению прикладных возможностей моделей систем обслуживания.

Кроме того, различная производительность каналов значительно усиливает, по всей видимости, «системный» характер эффективности СМО. Иными словами, общая производительность многоканальной СМО (приборы работают в одной системе), в условиях управления потоками заявок, может быть значительно выше суммарной производительности тех же каналов, работающих отдельно. Исследований на данную тематику, насколько известно автору настоящей работы, также не проводилось. Выявление сходств и различий функционирования таких систем представляет интерес в части организации их эффективного функционирования, в частности в рамках специализации приборов.

Также практически не исследованы модели систем массового обслуживания с неэквивалентными приборами, функционирующие в режиме неординарных потоков. При этом многие реальные объекты и процессы зачастую характеризуются возможностью одновременного поступления заявок.

Таким образом, несмотря на существенный прогресс с 60-х годов XX века моделей систем массового обслуживания с каналами различной производительности, а также их приложений, на сегодняшний день многие задачи данной области не получили решения или требуют дополнительных исследований. Резюмируя результаты краткого обзора постановок задач и результатов исследований СМО с каналами различной производительности, видится целесообразным представить классификацию систем такого типа, включающую в себя их разделение по основным схемам управления потоками (Приложение А).

Выводы по первой главе

В данной главе кратко изложены основные положения теории массового обслуживания, приведены классические модели систем с каналами одинаковой производительности. Представлен обзор литературы, который позволил выявить основные тенденции научных исследований, связанных с системами массового обслуживания с неэквивалентными приборами, а также определить некоторые актуальные задачи данной области, которые в настоящее время не получили решения или требуют проведения дополнительных исследований.

Полученные результаты опубликованы в работе [89].

ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КАНАЛАМИ РАЗЛИЧНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ

В настоящей главе представлены математические и имитационные модели систем массового обслуживания с каналами различной производительности, материалы численного исследования систем такого типа в нестационарном режиме, а также ряд результатов вычислительных экспериментов, в ходе которых проведен сравнительный анализ эксплуатационных характеристик систем с неэквивалентными приборами в условиях различных схем управления потоками.

2.1. Математические модели

В отличие от ранее рассмотренных классических моделей теории массового обслуживания, не предполагающих функции внешнего управляющего воздействия на систему, важнейшей особенностью СМО с каналами различной производительностью является необходимость управления потоками заявок.

Очевидно, что в современных условиях возможность внесения изменений в алгоритмы функционирования СМО имеют важное значение, так как позволяют ситуативно влиять на эксплуатационные характеристики системы в условиях сохранения ее текущих параметров. Иными словами, возможность управляющего воздействия позволяет варьировать величины показателей эффективности системы, не прибегая к увеличению или уменьшению затрачиваемых на ее функционирование ресурсов.

В научной литературе применительно к внешним воздействиям на потоки заявок используются различные термины, среди них: «управление» [32–34], «администрирование» [37–42], «диспетчеризация» [56–57], «схема доступа» [60–61] и другие.

Выделяют, как правило, следующие стратегии управления потоками:

– равновероятное распределение (RCS – Randomly Chosen Server), при котором заявка поступает на любой свободный канал с одинаковой вероятностью;

- пропорциональное распределение, при котором заявка поступает в любой из свободных каналов с вероятностью, пропорциональной ее производительности;
- распределение заявок с приоритетом наиболее «сильного» канала (FSF – Fastest Server First), при котором заявка поступает на свободный канал наибольшей производительности;
- распределение заявок с приоритетом наименее «сильного» канала, при котором заявка поступает на свободный канал наименьшей производительности;
- пороговое управление, при котором «сильный» канал занят всегда, а «слабый» включается только в том случае, если количество заявок в очереди достигает определенного уровня. Данный вид управления не может быть реализован в системах без функции накопления очереди.

В рамках следующих разделов будут рассмотрены математические и имитационные модели систем массового обслуживания, функционирующих в режиме некоторых из перечисленных схем управления потоками.

2.1.1. Модель n -канальной системы

Рассмотрим n -канальную систему массового обслуживания с приборами различной производительности без функции накопления очереди, на вход которой поступает пуассоновский поток заявок интенсивности λ , $\lambda > 0$. Будем полагать, что интенсивности каналов различны и равны μ_i , $i = \overline{1, n}$, причем $0 < \mu_1 < \mu_2 \dots < \mu_n$.

Обозначим суммарную интенсивность каналов через $M = \sum_{i=1}^n \mu_i$, а величину нагрузки на систему через $\gamma = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^n \mu_i} = \lambda M^{-1}$.

Выделим некоторые состояния системы:

P_0 – в системе нет заявок, все каналы свободны;

P_1 – в системе одна заявка и ее обслуживанием занят канал интенсивностью μ_1 ;

...;

P_{Q-2} – в системе $(n - 1)$ заявок и они обслуживаются каналами $\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$;

P_{Q-1} – в системе n заявок и они обслуживаются каналами $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Также является вероятностью того, что новая заявка, поступившая в систему, получит отказ в обслуживании и покинет систему.

Q показывает общее число состояний n -канальной системы массового обслуживания с приборами различной производительности и вычисляется по комбинаторной формуле $Q = \sum_{k=0}^n C_n^k$ [38]. Здесь n – общее число каналов в системе, k – наборы возможных состояний системы, характеризующиеся одинаковым количеством занятых каналов. Через $Q_k = \sum_{k=0}^k C_n^k$ обозначим общее число состояний системы до набора состояний k .

Таким образом, в отличие от классических моделей СМО, обслуживание заявки тем или иными прибором в системах с каналами различной производительности являются по своей сути разными состояниями. Также вполне очевидно, что увеличение числа каналов в системах такого типа приводит к быстрому увеличению числа возможных состояний (соответственно, увеличению размерности математической модели, позволяющей рассчитать вероятности состояний СМО), что предопределяет достаточную трудоемкость аналитических расчетов их характеристик и параметров.

Система дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы такого типа при равновероятном распределении заявок, имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu_1 P_1(t) + \mu_2 P_2(t) + \dots + \mu_n P_n(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = -(\mu_1 + \lambda) P_1(t) + \frac{\lambda}{n} P_0(t) + \mu_2 P_{n+1}(t) + \dots + \mu_n P_{2n-1}(t) \\ \dots; \\ \frac{dP_{Q-2}(t)}{dt} = -(\mu_2 + \dots + \mu_n + \lambda) P_{Q-2}(t) + \frac{\lambda}{2} P_{(Q-2)-n+1}(t) + \dots \\ \dots + \frac{\lambda}{2} P_{(Q-2)-1}(t) + \mu_1 P_{Q-1}(t) \\ \frac{dP_{Q-1}(t)}{dt} = -(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) P_{Q-1}(t) + \lambda P_{Q-2}(t) + \dots + \lambda P_{(Q-1)-1}(t) \\ \sum_{i=0}^{Q-1} P_i(t) = 1 \\ P_0(0) = 1, P_1(0) = 0, P_2(0) = 0, \dots, P_{Q-1}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Решением данной системы будут вероятности состояний $P_0(t), \dots, P_{Q-1}(t)$.

Очевидно, что при других схемах управления потоками коэффициенты при значениях вероятностей состояний P будут отличаться.

2.1.2. Модели систем в стационарном режиме

Рассмотрим стационарный (финальный) режим работы систем такого типа, их графы состояний и модификации систем уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей состояний.

На Рисунке 2.1 представлен граф состояний 2-х канальной СМО с приборами различной производительности без функции накопления очереди. Заявки распределяются по каналам обслуживания с одинаковой вероятностью. Здесь λ – интенсивность потока, поступающего в систему. Интенсивности первого и второго обслуживающих устройств различны и равны μ_1 и μ_2 соответственно, причем здесь и далее в работе полагаем что $\mu_1 < \mu_2$. Таким образом, для перехода системы из состояния P_0 в состояние P_1 или P_2 интенсивность потока составит $\lambda/2$, а для перехода системы в состояние P_3 – λ . Числа в нижней части квадратов имеют смысл номеров каналов обслуживания, задействованных при соответствующем состоянии системы.

Данная СМО имеет 4 возможных состояния:

P_0 – система свободна;

P_1 – в системе одна заявка и ее обслуживанием занят канал с интенсивностью μ_1 ;

P_2 – в системе одна заявка и ее обслуживанием занят канал с интенсивностью μ_2 ;

P_3 – в системе две заявки на обслуживании. Очевидно, что P_3 также является и вероятностью того, что новая заявка, поступившая в систему, получит отказ и покинет систему необслуженной.

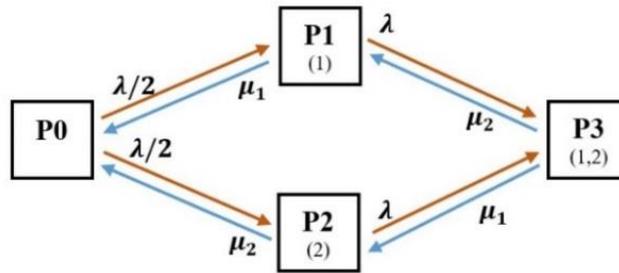


Рисунок 2.1 – Граф состояний 2-х канальной СМО с приборами различной производительности (построено автором)

Система уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей состояний представленной 2-х канальной системы массового обслуживания имеет вид:

$$\begin{cases} \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 - \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}\right) P_0 = 0 \\ \mu_2 P_3 + \frac{\lambda}{2} P_0 - (\mu_1 + \lambda) P_1 = 0 \\ \mu_1 P_3 + \frac{\lambda}{2} P_0 - (\mu_2 + \lambda) P_2 = 0 \\ \lambda P_1 + \lambda P_2 - (\mu_1 + \mu_2) P_3 = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Нормировочное условие:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1 \quad (2.3)$$

Рассмотрим модель 2-х канальной системы для схемы управления с пропорциональным распределением заявок. На Рисунке 2.2 представлен граф состояний системы такого типа.

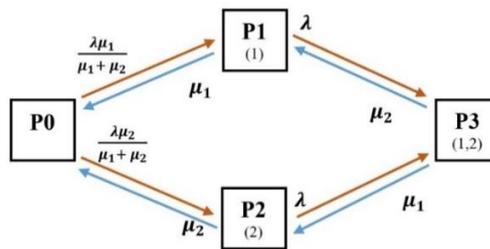


Рисунок 2.2 – Граф состояний 2-х канальной СМО с приборами различной производительности (построено автором)

Система уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей состояний представленной 2-х канальной системы имеет вид:

$$\begin{cases} \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 - \left(\frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right) P_0 = 0 \\ \mu_2 P_3 + \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} P_0 - (\mu_1 + \lambda) P_1 = 0 \\ \mu_1 P_3 + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} P_0 - (\mu_2 + \lambda) P_2 = 0 \\ \lambda P_1 + \lambda P_2 - (\mu_1 + \mu_2) P_3 = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

Нормировочное условие:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1 \quad (2.5)$$

При данной схеме администрирования для перехода системы из состояния P_0 в состояние P_1 интенсивность потока составляет $\frac{\lambda\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$, а для перехода из состояния P_0 в состояние P_2 интенсивность равна $\frac{\lambda\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$. Для перехода системы в состояние P_3 , при котором задействовано два канала, интенсивность потока равна λ .

Рассмотрим модель 2-х канальной системы при использовании стратегии распределения заявок с приоритетом канала наибольшей производительности. На Рисунке 2.3 представлен граф состояний такой системы.

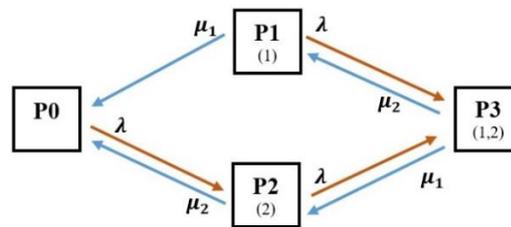


Рисунок 2.3 – Граф состояний 2-х канальной СМО с приборами различной производительности (построено автором)

Система уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей состояний представленной системы массового обслуживания имеет вид:

$$\begin{cases} \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 - \lambda P_0 = 0 \\ \mu_2 P_3 - (\mu_1 + \lambda) P_1 = 0 \\ \mu_1 P_3 + \lambda P_0 - (\mu_2 + \lambda) P_2 = 0 \\ \lambda P_1 + \lambda P_2 - (\mu_1 + \mu_2) P_3 = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Нормировочное условие:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 1 \quad (2.7)$$

Таким образом, как продемонстрировано на Рисунке 2.3, данная схема управления не предполагает перехода системы из состояния P_0 в P_1 , так как производительность обслуживающего устройства μ_1 априори меньше производительности устройства μ_2 . Соответственно, из состояния P_0 система может перейти только в состояние P_2 , интенсивность потока при этом равна λ .

Очевидно, что при использовании различных стратегий управления потоками заявок функциональные характеристики системы также будут различны для каждой из них, что может быть полезно для задач ситуативного управления объектами или процессами, которые работают по принципу систем массового обслуживания или, к примеру, при выборе наиболее оптимальной схемы администрирования потока для достижения наибольших показателей эффективности системы. В настоящей главе также будет представлен ряд результатов численных и вычислительных экспериментов, в рамках которых проведен сравнительный анализ эксплуатационных характеристик системы при ее функционировании в условиях различных алгоритмов администрирования потоков.

Рассмотрим модели 3-х канальных систем массового обслуживания. В отличие от 2-х канальных, такие СМО имеют уже 8 возможных состояний, что значительно затрудняет их исследование аналитическими методами без использования программных инструментов. На Рисунке 2.4 представлен граф состояний системы при равновероятном распределении заявок.

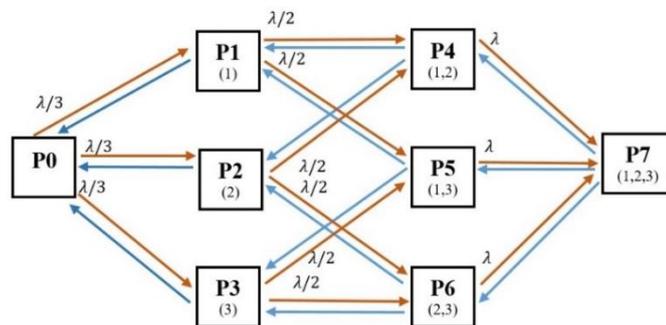


Рисунок 2.4 – Граф состояний 3-х канальной СМО с приборами различной производительности (построено автором)

Видно, что для перехода системы из состояния P_0 в состояние, характеризующееся одной заявкой в системе, интенсивность потока составляет $\lambda/3$, для перехода системы в состояние с 2 заявками интенсивность потока будет равна $\lambda/2$, для перехода системы в состояние P_7 интенсивность потока составит λ .

Система уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей состояний представленной системы имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3 - \left(\frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{3} \right) P_0 = 0 \\ \mu_2 P_4 + \mu_3 P_5 + \frac{\lambda}{3} P_0 - \left(\mu_1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) P_1 = 0 \\ \mu_1 P_4 + \mu_3 P_6 + \frac{\lambda}{3} P_0 - \left(\mu_2 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) P_2 = 0 \\ \mu_1 P_5 + \mu_2 P_6 + \frac{\lambda}{3} P_0 - \left(\mu_3 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) P_3 = 0 \\ \mu_3 P_7 + \frac{\lambda}{2} P_1 + \frac{\lambda}{2} P_2 - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) P_4 = 0 \\ \mu_2 P_7 + \frac{\lambda}{2} P_1 + \frac{\lambda}{2} P_3 - (\mu_1 + \mu_3 + \lambda) P_5 = 0 \\ \mu_1 P_7 + \frac{\lambda}{2} P_2 + \frac{\lambda}{2} P_3 - (\mu_2 + \mu_3 + \lambda) P_6 = 0 \\ \lambda P_4 + \lambda P_5 + \lambda P_6 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) P_7 = 0 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Нормировочное условие:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 = 1 \quad (2.9)$$

На Рисунке 2.5 представлен граф состояний 3-х канальной системы при распределении заявок с вероятностью, пропорциональной интенсивностям каналов обслуживания.

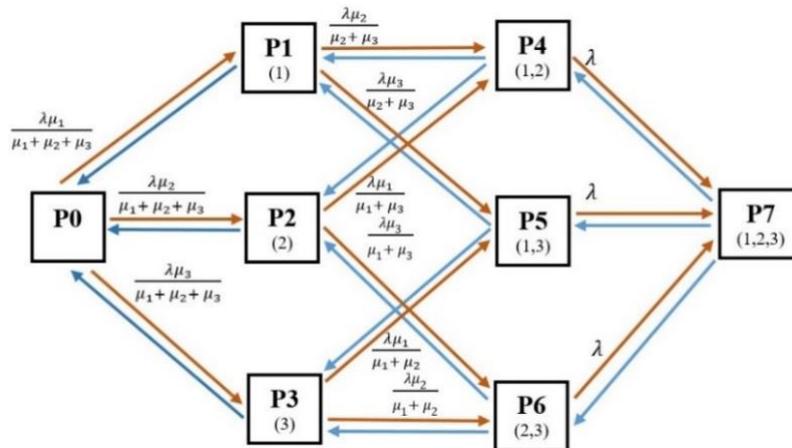


Рисунок 2.5 – Граф состояний 3-х канальной СМО с приборами различной производительности (построено автором)

Система уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей состояний представленной системы массового обслуживания имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3 - \left(\frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} + \frac{\lambda \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} \right) P_0 = 0 \\ \mu_2 P_4 + \mu_3 P_5 + \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} P_0 - \left(\mu_1 + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_2 + \mu_3} + \frac{\lambda \mu_3}{\mu_2 + \mu_3} \right) P_1 = 0 \\ \mu_1 P_4 + \mu_3 P_6 + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} P_0 - \left(\mu_2 + \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_3} + \frac{\lambda \mu_3}{\mu_1 + \mu_3} \right) P_2 = 0 \\ \mu_1 P_5 + \mu_2 P_6 + \frac{\lambda \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} P_0 - \left(\mu_3 + \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) P_3 = 0 \\ \mu_3 P_7 + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_2 + \mu_3} P_1 + \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_3} P_2 - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) P_4 = 0 \\ \mu_2 P_7 + \frac{\lambda \mu_3}{\mu_2 + \mu_3} P_1 + \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} P_3 - (\mu_1 + \mu_3 + \lambda) P_5 = 0 \\ \mu_1 P_7 + \frac{\lambda \mu_3}{\mu_1 + \mu_3} P_2 + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} P_3 - (\mu_2 + \mu_3 + \lambda) P_6 = 0 \\ \lambda P_4 + \lambda P_5 + \lambda P_6 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) P_7 = 0 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Нормировочное условие:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 = 1 \quad (2.11)$$

На рисунке 2.6 представлен граф состояний 3-х канальной системы при распределении заявок с приоритетом канала наибольшей производительности.

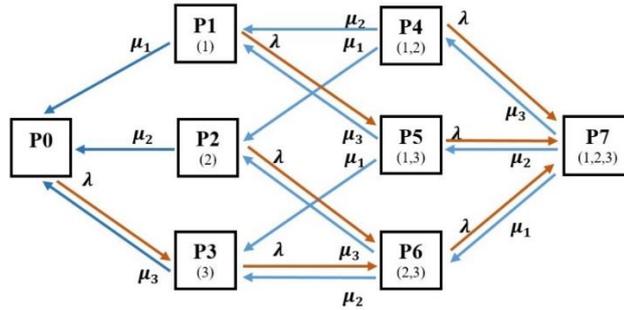


Рисунок 2.6 – Граф состояний 3-х канальной СМО с приборами различной производительности (построено автором)

Система уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей состояний представленной системы массового обслуживания имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3 - \lambda P_0 = 0 \\ \mu_2 P_4 + \mu_3 P_5 - (\mu_1 + \lambda) P_1 = 0 \\ \mu_1 P_4 + \mu_3 P_6 - (\mu_2 + \lambda) P_2 = 0 \\ \mu_1 P_5 + \mu_2 P_6 + \lambda P_0 - (\mu_3 + \lambda) P_3 = 0 \\ \mu_3 P_7 - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) P_4 = 0 \\ \mu_2 P_7 + \lambda P_1 - (\mu_1 + \mu_3 + \lambda) P_5 = 0 \\ \mu_1 P_7 + \lambda P_2 + \lambda P_3 - (\mu_2 + \mu_3 + \lambda) P_6 = 0 \\ \lambda P_4 + \lambda P_5 + \lambda P_6 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) P_7 = 0 \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Нормировочное условие:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 = 1 \quad (2.13)$$

Рассмотрим модели 4-х канальных СМО. Такие системы имеют 16 возможных состояний, что значительно усложняет использование аналитических методов для их расчетов. Граф состояний четырехканальной системы при равновероятном распределении заявок представлен на Рисунке 2.7.

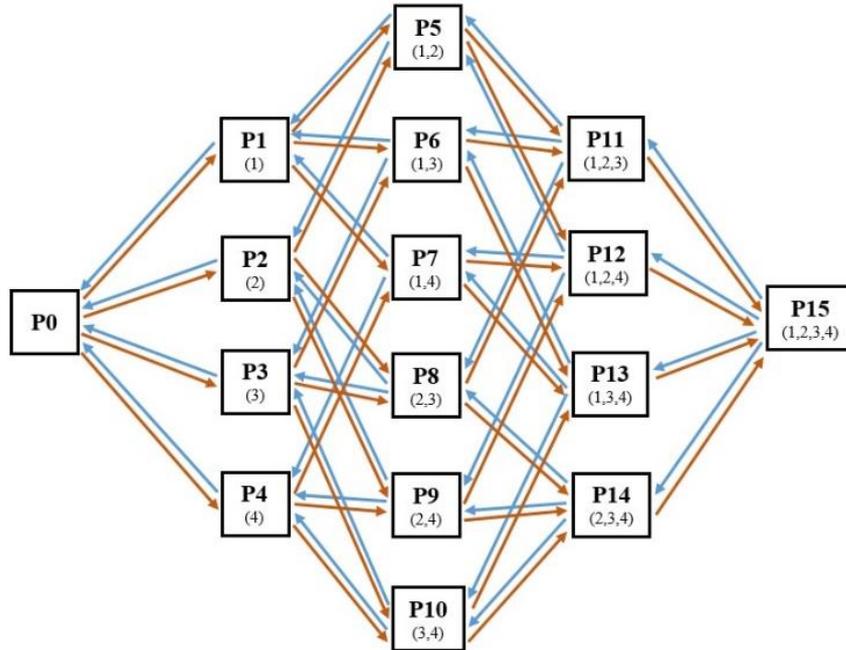


Рисунок 2.7 – Граф состояний 4-х канальной СМО с приборами различной производительности (построено автором)

Система уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей состояний представленной системы массового обслуживания имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3 + \mu_4 P_4 - \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} \right) P_0 = 0 \\
 \mu_2 P_5 + \mu_3 P_6 + \mu_4 P_7 + \frac{\lambda}{4} P_0 - \left(\mu_1 + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{3} \right) P_1 = 0 \\
 \mu_1 P_5 + \mu_3 P_8 + \mu_4 P_9 + \frac{\lambda}{4} P_0 - \left(\mu_2 + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{3} \right) P_2 = 0 \\
 \mu_1 P_6 + \mu_2 P_8 + \mu_4 P_{10} + \frac{\lambda}{4} P_0 - \left(\mu_3 + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{3} \right) P_3 = 0 \\
 \mu_1 P_7 + \mu_2 P_9 + \mu_3 P_{10} + \frac{\lambda}{4} P_0 - \left(\mu_4 + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{3} + \frac{\lambda}{3} \right) P_4 = 0 \\
 \mu_3 P_{11} + \mu_4 P_{12} + \frac{\lambda}{3} P_1 + \frac{\lambda}{3} P_2 - \left(\mu_1 + \mu_2 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) P_5 = 0 \\
 \mu_2 P_{11} + \mu_4 P_{13} + \frac{\lambda}{3} P_1 + \frac{\lambda}{3} P_3 - \left(\mu_1 + \mu_3 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) P_6 = 0 \\
 \mu_2 P_{12} + \mu_3 P_{13} + \frac{\lambda}{3} P_1 + \frac{\lambda}{3} P_4 - \left(\mu_1 + \mu_4 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) P_7 = 0 \\
 \mu_1 P_{11} + \mu_4 P_{14} + \frac{\lambda}{3} P_2 + \frac{\lambda}{3} P_3 - \left(\mu_2 + \mu_3 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) P_8 = 0 \\
 \mu_1 P_{12} + \mu_3 P_{14} + \frac{\lambda}{3} P_2 + \frac{\lambda}{3} P_4 - \left(\mu_2 + \mu_4 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) P_9 = 0 \\
 \mu_1 P_{13} + \mu_2 P_{14} + \frac{\lambda}{3} P_3 + \frac{\lambda}{3} P_4 - \left(\mu_3 + \mu_4 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} \right) P_{10} = 0 \\
 \mu_4 P_{15} + \frac{\lambda}{2} P_5 + \frac{\lambda}{2} P_6 + \frac{\lambda}{2} P_8 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \lambda) P_{11} = 0 \\
 \mu_3 P_{15} + \frac{\lambda}{2} P_5 + \frac{\lambda}{2} P_7 + \frac{\lambda}{2} P_9 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_4 + \lambda) P_{12} = 0 \\
 \mu_2 P_{15} + \frac{\lambda}{2} P_6 + \frac{\lambda}{2} P_7 + \frac{\lambda}{2} P_{10} - (\mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \lambda) P_{13} = 0 \\
 \mu_1 P_{15} + \frac{\lambda}{2} P_8 + \frac{\lambda}{2} P_9 + \frac{\lambda}{2} P_{10} - (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \lambda) P_{14} = 0 \\
 \lambda P_{11} + \lambda P_{12} + \lambda P_{13} + \lambda P_{14} - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) P_{15} = 0
 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Нормировочное условие:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + P_9 + P_{10} + P_{11} + P_{12} + P_{13} + P_{14} + P_{15} = 1 \quad (2.15)$$

На Рисунке 2.8 представлен граф состояний 4-х канальной системы при распределении заявок с вероятностью, пропорциональной интенсивностям каналов.

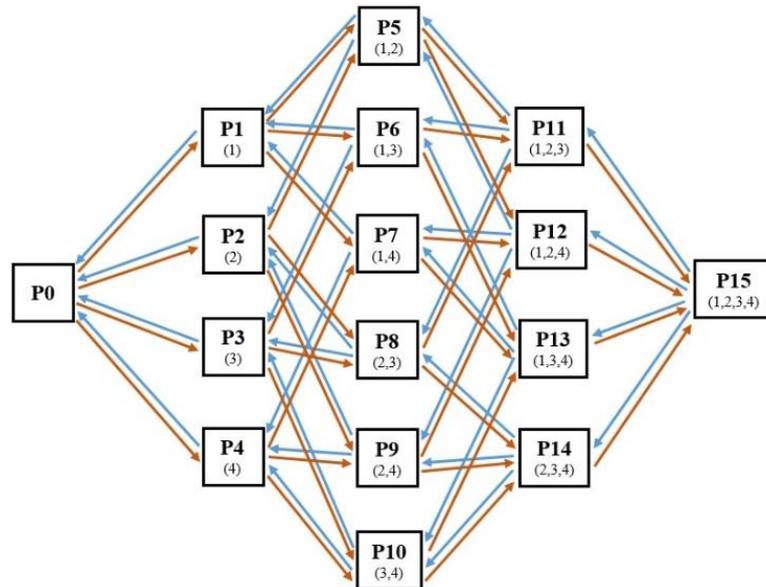


Рисунок 2.8 – Граф состояний 4-х канальной СМО с приборами различной производительности (построено автором)

Система Колмогорова для стационарных вероятностей состояний представленной системы массового обслуживания имеет вид:

$$\begin{cases}
 \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3 + \mu_4 P_4 - \left(\lambda \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4} \right) P_0 = 0 \\
 \mu_2 P_5 + \mu_3 P_6 + \mu_4 P_7 + \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4} P_0 - \left(\mu_1 + \lambda \frac{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4}{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4} \right) P_1 = 0 \\
 \mu_1 P_5 + \mu_3 P_8 + \mu_4 P_9 + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4} P_0 - \left(\mu_2 + \lambda \frac{\mu_1 + \mu_3 + \mu_4}{\mu_1 + \mu_3 + \mu_4} \right) P_2 = 0 \\
 \mu_1 P_6 + \mu_2 P_8 + \mu_4 P_{10} + \frac{\lambda \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4} P_0 - \left(\mu_3 + \lambda \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_4}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_4} \right) P_3 = 0 \\
 \mu_1 P_7 + \mu_2 P_9 + \mu_3 P_{10} + \frac{\lambda \mu_4}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4} P_0 - \left(\mu_4 + \lambda \frac{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} \right) P_4 = 0 \\
 \mu_3 P_{11} + \mu_4 P_{12} + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4} P_1 + \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_3 + \mu_4} P_2 - \left(\mu_1 + \mu_2 + \lambda \frac{\mu_3 + \mu_4}{\mu_3 + \mu_4} \right) P_5 = 0 \\
 \mu_2 P_{11} + \mu_4 P_{13} + \frac{\lambda \mu_3}{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4} P_1 + \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_4} P_3 - \left(\mu_1 + \mu_3 + \lambda \frac{\mu_2 + \mu_4}{\mu_2 + \mu_4} \right) P_6 = 0 \\
 \mu_2 P_{12} + \mu_3 P_{13} + \frac{\lambda \mu_4}{\mu_2 + \mu_3 + \mu_4} P_1 + \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} P_4 - \left(\mu_1 + \mu_4 + \lambda \frac{\mu_2 + \mu_3}{\mu_2 + \mu_3} \right) P_7 = 0 \\
 \mu_1 P_{11} + \mu_4 P_{14} + \frac{\lambda \mu_3}{\mu_1 + \mu_3 + \mu_4} P_2 + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_4} P_3 - \left(\mu_2 + \mu_3 + \lambda \frac{\mu_1 + \mu_4}{\mu_1 + \mu_4} \right) P_8 = 0 \\
 \mu_1 P_{12} + \mu_3 P_{14} + \frac{\lambda \mu_4}{\mu_1 + \mu_3 + \mu_4} P_2 + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} P_4 - \left(\mu_2 + \mu_4 + \lambda \frac{\mu_1 + \mu_3}{\mu_1 + \mu_3} \right) P_9 = 0 \\
 \mu_1 P_{13} + \mu_2 P_{14} + \frac{\lambda \mu_4}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_4} P_3 + \frac{\lambda \mu_3}{\mu_1 + \mu_2 + \mu_3} P_4 - \left(\mu_3 + \mu_4 + \lambda \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) P_{10} = 0 \\
 \mu_4 P_{15} + \lambda \frac{\mu_3}{\mu_3 + \mu_4} P_5 + \lambda \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_4} P_6 + \lambda \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_4} P_8 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \lambda) P_{11} = 0 \\
 \mu_3 P_{15} + \lambda \frac{\mu_4}{\mu_3 + \mu_4} P_5 + \lambda \frac{\mu_2}{\mu_2 + \mu_3} P_7 + \lambda \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_3} P_9 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_4 + \lambda) P_{12} = 0 \\
 \mu_2 P_{15} + \lambda \frac{\mu_4}{\mu_2 + \mu_4} P_6 + \lambda \frac{\mu_3}{\mu_2 + \mu_3} P_7 + \lambda \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} P_{10} - (\mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \lambda) P_{13} = 0 \\
 \mu_1 P_{15} + \lambda \frac{\mu_4}{\mu_1 + \mu_4} P_8 + \lambda \frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_3} P_9 + \lambda \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} P_{10} - (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \lambda) P_{14} = 0 \\
 \lambda P_{11} + \lambda P_{12} + \lambda P_{13} + \lambda P_{14} - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) P_{15} = 0
 \end{cases} \quad (2.16)$$

Нормировочное условие:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + P_9 + P_{10} + P_{11} + P_{12} + P_{13} + P_{14} + P_{15} = 1 \quad (2.17)$$

На Рисунке 2.9 представлен граф состояний 4-х канальной системы при распределении заявок с приоритетом канала наибольшей производительности.

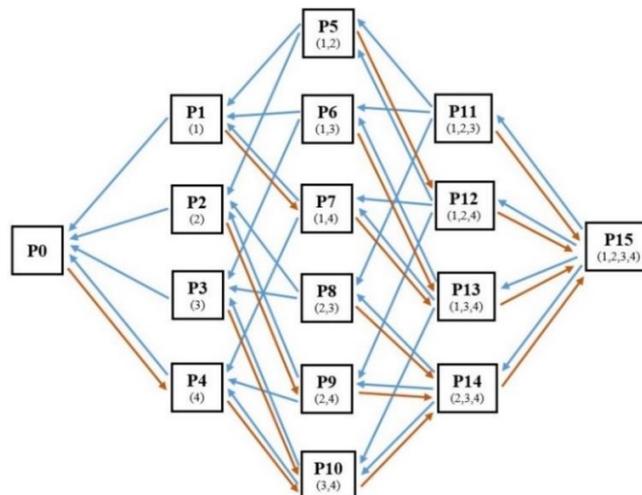


Рисунок 2.9 – Граф состояний 4-х канальной СМО с приборами различной производительности (построено автором)

Система уравнений Колмогорова для стационарных вероятностей состояний представленной системы массового обслуживания:

$$\begin{cases} \mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \mu_3 P_3 + \mu_4 P_4 - \lambda P_0 = 0 \\ \mu_2 P_5 + \mu_3 P_6 + \mu_4 P_7 - (\mu_1 + \lambda) P_1 = 0 \\ \mu_1 P_5 + \mu_3 P_8 + \mu_4 P_9 - (\mu_2 + \lambda) P_2 = 0 \\ \mu_1 P_6 + \mu_2 P_8 + \mu_4 P_{10} - (\mu_3 + \lambda) P_3 = 0 \\ \mu_1 P_7 + \mu_2 P_9 + \mu_3 P_{10} + \lambda P_0 - (\mu_4 + \lambda) P_4 = 0 \\ \mu_3 P_{11} + \mu_4 P_{12} - (\mu_1 + \mu_2 + \lambda) P_5 = 0 \\ \mu_2 P_{11} + \mu_4 P_{13} - (\mu_1 + \mu_3 + \lambda) P_6 = 0 \\ \mu_2 P_{12} + \mu_3 P_{13} + \lambda P_1 - (\mu_1 + \mu_4 + \lambda) P_7 = 0 \\ \mu_1 P_{11} + \mu_4 P_{14} - (\mu_2 + \mu_3 + \lambda) P_8 = 0 \\ \mu_1 P_{12} + \mu_3 P_{14} + \lambda P_2 - (\mu_2 + \mu_4 + \lambda) P_9 = 0 \\ \mu_1 P_{13} + \mu_2 P_{14} + \lambda P_3 + \lambda P_4 - (\mu_3 + \mu_4 + \lambda) P_{10} = 0 \\ \mu_4 P_{15} - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \lambda) P_{11} = 0 \\ \mu_3 P_{15} + \lambda P_5 - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_4 + \lambda) P_{12} = 0 \\ \mu_2 P_{15} + \lambda P_6 + \lambda P_7 - (\mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \lambda) P_{13} = 0 \\ \mu_1 P_{15} + \lambda P_8 + \lambda P_9 + \lambda P_{10} - (\mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \lambda) P_{14} = 0 \\ \lambda P_{11} + \lambda P_{12} + \lambda P_{13} + \lambda P_{14} - (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) P_{15} = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Нормировочное условие:

$$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + P_9 + P_{10} + P_{11} + P_{12} + P_{13} + P_{14} + P_{15} = 1 \quad (2.19)$$

Как было отмечено ранее, увеличение числа каналов в системах такого типа значительно увеличивает размерность ее математической модели, что приводит к технической трудоемкости аналитических расчетов. С учетом этого, для проведения серии вычислительных экспериментов с системами, обладающими неэквивалентными каналами, в рамках работы используется аппарат имитационного моделирования.

2.1.3. Исследование нестационарного режима

Некоторые реальные объекты и процессы, которые могут быть описаны математическими моделями в терминах теории массового обслуживания, характеризуются функционированием в неустановившемся режиме работы.

На примере 2-х канальных СМО с приборами различной производительности оценим время, которое требуется для перехода системы из нестационарного состояния в стационарное при различных схемах управления потоками. Задача схожего типа рассматривалась в [90], где с помощью системы имитационного моделирования GPSS World исследовалось время, необходимое для перехода в квазистационарное состояние системы, функционирующей в режиме поликомпонентных потоков.

Для проведения численных экспериментов в качестве параметров исследуемой модели системы используем $\lambda = 4, \mu_1 = 1, \mu_2 = 4$.

На Рисунке 2.10 представлен алгоритм для численного расчета системы массового обслуживания с каналами различной производительности в нестационарном режиме.



Рисунок 2.10 – Алгоритм численных расчетов СМО с неэквивалентными приборами в нестационарном режиме (предложен автором)

Рассмотрим 2-х канальную СМО, функционирующую при равновероятном распределении заявок. Система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний данной системы:

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) + \mu_2 P_2(t) - \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}\right) P_0(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \mu_2 P_3(t) + \frac{\lambda}{2} P_0(t) - (\mu_1 + \lambda) P_1(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \mu_1 P_3(t) + \frac{\lambda}{2} P_0(t) - (\mu_2 + \lambda) P_2(t) \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda P_1(t) + \lambda P_2(t) - (\mu_1 + \mu_2) P_3(t) \end{cases} \quad (2.20)$$

Нормировочное условие:

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1 \quad (2.21)$$

Начальные условия функционирования системы образуют следующие значения функций:

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0 \quad (2.22)$$

Для решения системы дифференциальных уравнений используется метод Эйлера. Для изменения шага времени t используем $h = 0,15$.

На Рисунке 2.11 представлен график зависимости вероятностей состояний 2-х канальной системы массового обслуживания от времени t при схеме управления с равновероятным распределением заявок.

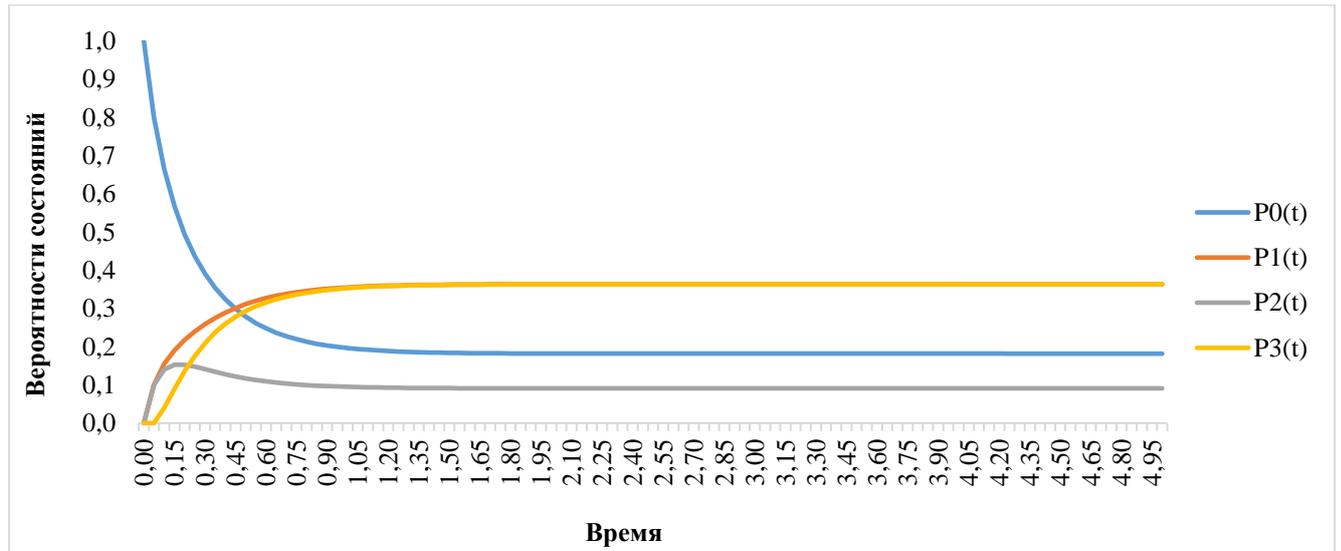


Рисунок 2.11 – Зависимость вероятностей состояний от времени (рассчитано автором)

Установлено, что вероятности состояний системы такого типа входят в стационарный режим при моменте времени $t = 2,2$.

График свидетельствует о достаточно быстром вхождении процесса в стационарный режим, при котором вероятности состояний перестают зависеть от временных характеристик.

На Рисунке 2.12 представлена зависимость относительной пропускной способности Q и среднего числа занятых каналов \bar{k} от времени. Представленные графики также демонстрируют довольно быстрый переход в стационарный режим. Для показателя Q момент времени составил $t = 1,1$, для показателя \bar{k} момент времени $t = 1,4$.

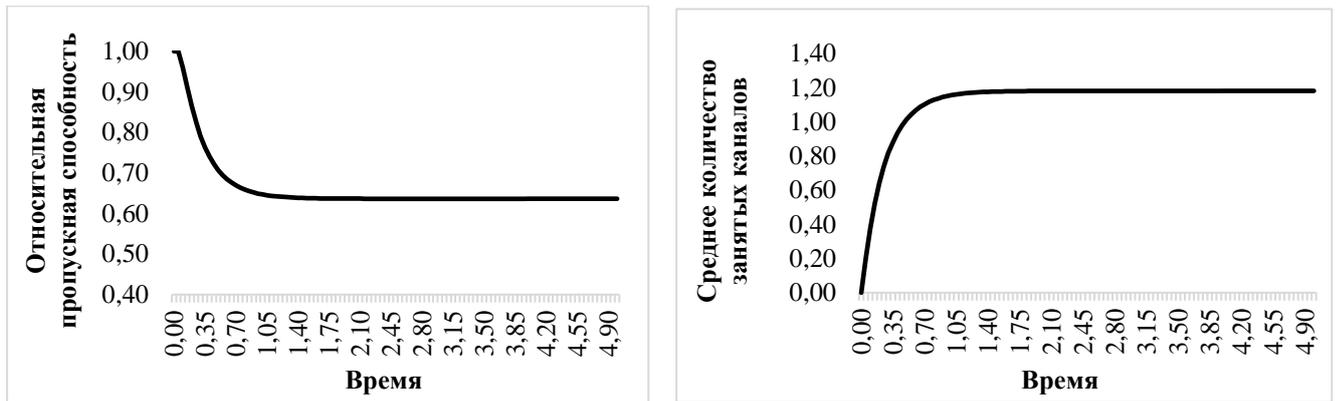


Рисунок 2.12 – Зависимость относительной пропускной способности Q и среднего числа занятых каналов \bar{k} от времени (рассчитано автором)

Оценим время, которое требуется для выхода на стационарный режим 2-х канальной СМО, функционирующей при распределении заявок с вероятностью, пропорциональной интенсивностям обслуживающих устройств.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний данной системы:

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) + \mu_2 P_2(t) - \left(\frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) P_0(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \mu_2 P_3(t) + \frac{\lambda \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} P_0(t) - (\mu_1 + \lambda) P_1(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \mu_1 P_3(t) + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} P_0(t) - (\mu_2 + \lambda) P_2(t) \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda P_1(t) + \lambda P_2(t) - (\mu_1 + \mu_2) P_3(t) \end{cases} \quad (2.23)$$

Нормировочное условие:

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1 \quad (2.24)$$

Начальное условие:

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0 \quad (2.25)$$

На Рисунке 2.13 представлен график зависимости вероятностей состояний данной системы (параметры $\lambda = 4, \mu_1 = 1, \mu_2 = 4$) от времени t . Таким образом, представленные материалы демонстрируют, что вероятности состояний системы такого типа входят в стационарный режим при моменте времени $t = 2,35$.

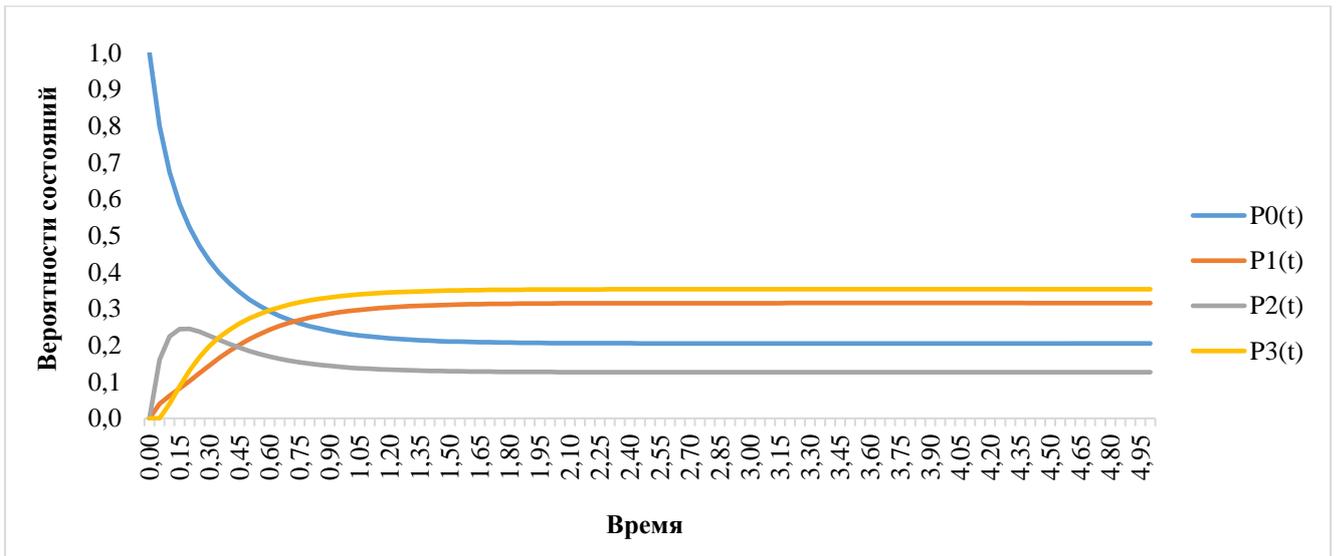


Рисунок 2.13 – Зависимость вероятностей состояний от времени (рассчитано автором)

На Рисунке 2.14 представлена зависимость относительной пропускной способности Q и среднего числа занятых каналов \bar{k} от времени.

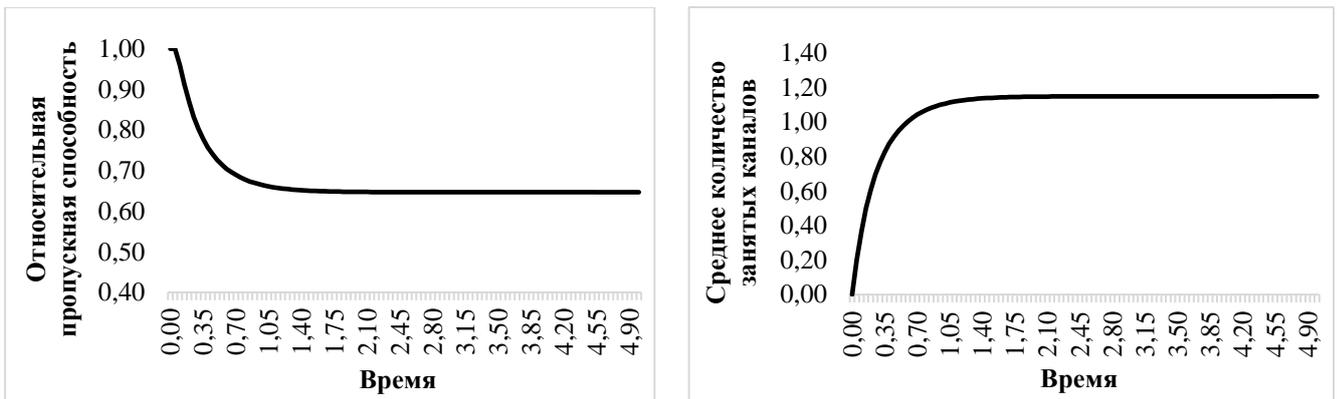


Рисунок 2.14 – Зависимость относительной пропускной способности Q и среднего числа занятых каналов \bar{k} от времени (рассчитано автором)

Представленные графики также демонстрируют довольно быстрый переход в стационарный режим. Показатели относительной пропускной способности Q и числа занятых каналов \bar{k} переходят в стационарный режим при моменте времени t от 1,25 до 1,85 соответственно.

Рассмотрим время выхода на стационарный режим 2-х канальной СМО, функционирующей при распределении заявок с приоритетом канала наибольшей производительности.

Система дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний представленной системы массового обслуживания:

$$\begin{cases} \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu_1 P_1(t) + \mu_2 P_2(t) - \lambda P_0(t) \\ \frac{dP_1(t)}{dt} = \mu_2 P_3(t) - (\mu_1 + \lambda) P_1(t) \\ \frac{dP_2(t)}{dt} = \mu_1 P_3(t) + \lambda P_0(t) - (\mu_2 + \lambda) P_2(t) \\ \frac{dP_3(t)}{dt} = \lambda P_1(t) + \lambda P_2(t) - (\mu_1 + \mu_2) P_3(t) \end{cases} \quad (2.26)$$

Нормировочное условие:

$$P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) + P_3(t) = 1 \quad (2.27)$$

Начальное условие:

$$P_0(0) = 1, P_1(0) = P_2(0) = P_3(0) = P_4(0) = 0 \quad (2.28)$$

На Рисунке 2.15 представлен график зависимости вероятностей состояний данной системы (параметры $\lambda = 4, \mu_1 = 1, \mu_2 = 4$) от времени t .

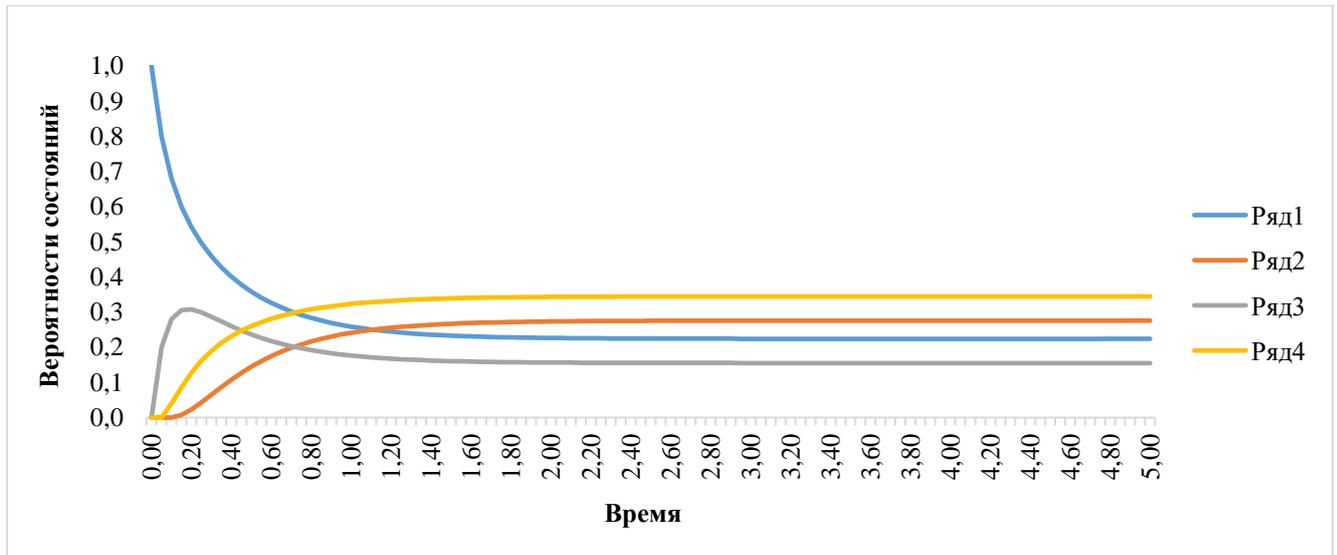


Рисунок 2.15 – Зависимость вероятностей состояний от времени (рассчитано автором)

Вероятности состояний системы данной системы входят в стационарный режим при моменте времени $t = 2,70$.

Графики зависимости относительной пропускной способности Q и среднего числа занятых каналов \bar{k} от времени, представленные на Рисунке 2.16, также демонстрируют довольно быстрый выход на стационарный режим.

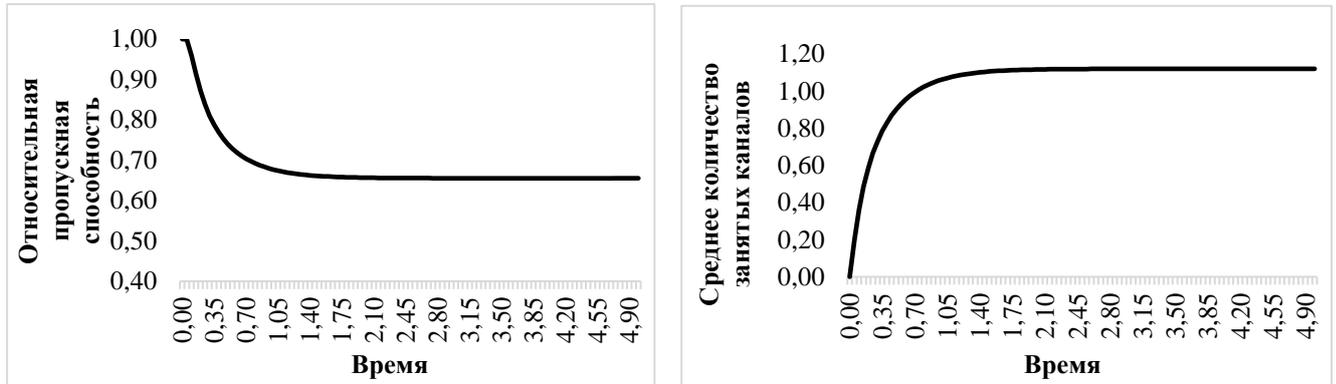


Рисунок 2.16 – Зависимость относительной пропускной способности Q и среднего числа занятых каналов \bar{k} от времени (рассчитано автором)

Показатели Q и \bar{k} переходят в стационарный режим при моменте времени t от 1,25 до 1,80 соответственно.

Таким образом, для всех рассмотренных схем управления потоками представленные графики свидетельствует о достаточно быстром вхождении процесса функционирования систем массового обслуживания с каналами различной производительности в стационарный режим, при котором вероятности состояний перестают зависеть от временных характеристик.

2.2. Имитационные модели

Возможности использования аналитических методов для решения задач, связанных с расчетом характеристик систем массового обслуживания с каналами различной производительности сильно ограничены ввиду быстрого роста размерности их математических моделей с увеличением числа каналов, и, соответственно – технической трудоемкости вычислений. Одним из подходов для решения задач такого типа является применение средств имитационного моделирования, позволяющих с достаточной степенью точности рассчитать требуемые характеристики. В современных условиях важным преимуществом методов имитационного моделирования так-

же является возможность получения результатов в режиме реального времени, что важно для ситуативного управления многими реальными объектами и процессами, которые могут быть представлены в виде систем массового обслуживания.

По теме имитационного моделирования СМО опубликовано немало научно-исследовательских работ и учебных материалов [91–99, 106]. В данных работах рассмотрены модели как классических систем, так и их многочисленные модификации, при этом в большей части известных работ системы рассматриваются с допущением об одинаковой производительности приборов.

Рассмотрим алгоритмы управления потоками заявок, которые могут быть реализованы методами имитационного моделирования. На Рисунке 2.17 представлена блок-схема алгоритма управления потоком с равновероятным распределением.



Рисунок 2.17 – Блок-схема алгоритма управления потоком с равновероятным распределением заявок (предложена автором)

На Рисунке 2.18 представлена блок-схема алгоритма управления потоком заявок с пропорциональным распределением заявок.



Рисунок 2.18 – Блок-схема алгоритма управления потоком с пропорциональным распределением заявок (предложена автором)

На Рисунке 2.19 представлена блок-схема алгоритма управления потоком заявок с приоритетом канала наибольшей производительности.



Рисунок 2.19 – Блок-схема алгоритма управления потоком с приоритетом канала наибольшей производительности (предложена автором)

2.2.1. Разработка имитационных моделей в среде AnyLogic

Для проведения комплекса вычислительных экспериментов в рамках настоящего исследования разработан комплекс программ в виде имитационных моделей систем массового обслуживания на базе среды AnyLogic. Данное программное обеспечение обладает удобным графическим интерфейсом и предоставляет возможность использовать язык программирования Java, что позволяет решать с его помощью широкий круг теоретических и прикладных задач в разных предметных областях [92; 97; 100–102].

Стоит отметить, что методы имитационного моделирования предполагают численный характер решения задачи. С учетом этого, для обеспечения требуемой точности моделей они должны быть проверены на адекватность.

Имитационная модель 2-х канальной системы массового обслуживания с приборами различной производительности представлена на Рисунке 2.20.

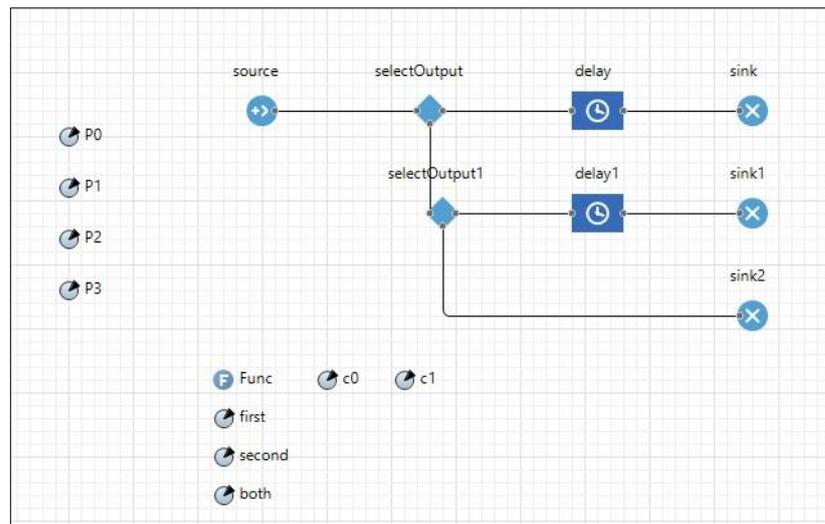


Рисунок 2.20 – Имитационная модель 2-х канальной СМО с приборами различной производительности (построена автором)

Модель состоит из следующих блоков:

- source* – для создания заявок на обслуживание с заданной интенсивностью;
- selectOutput*, *selectOutput1* – для распределения и направления заявок в следующие блоки;
- delay*, *delay1* – для задержки заявок, имеют смысл каналов обслуживания;

$sink$, $sink1$, $sink2$ – для уничтожения заявок.

Помимо блоков, в модели определены переменные для подсчета стационарных вероятностей состояний системы:

$P0$ – система свободна;

$P1$ – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок $delay$;

$P2$ – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок $delay1$;

$P3$ – в системе 2 заявки на обслуживании (в блоках $delay$ и $delay1$).

Также в модели определены переменные для подсчета числа всех возникших состояний системы:

$first$ – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок $delay1$;

$second$ – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок $delay$;

$both$ – в системе 2 заявки на обслуживании (в блоках $delay$ и $delay1$).

Кроме того, в имитационной модели определены переменные булевского типа:

$c0$ – переменная булевского типа, определяющая возможность поступления заявки в канал $delay$ или $delay1$;

$c1$ – переменная булевского типа, определяющая возможность поступления заявки в канал $delay1$ или выхода без обслуживания.

На Рисунке 2.21 представлены основные свойства блока *Source*.

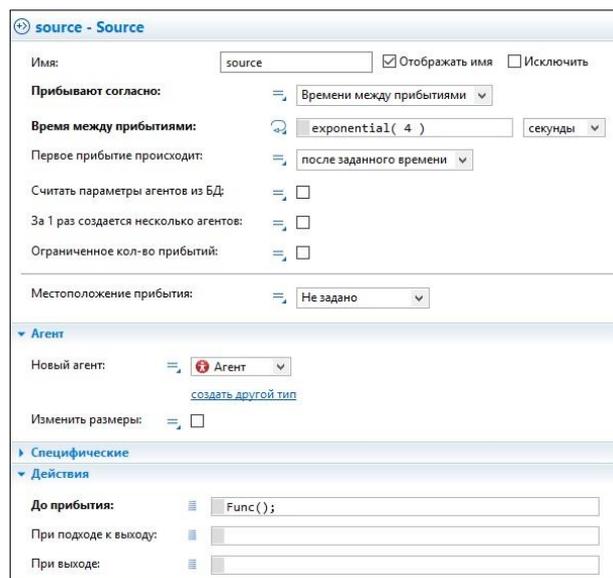


Рисунок 2.21 – Свойства блока *Source*

На Рисунках 2.22 – 2.23 представлены основные свойства блоков *selectOutput*, *selectOutput1*, *selectOutput2*.

selectOutput - SelectOutput

Имя: Отображать имя Исключить

Выход true выбирается: Заданной вероятностью
 При выполнении условия

Условие:

Рисунок 2.22 – Свойства блока *selectOutput*

selectOutput1 - SelectOutput

Имя: Отображать имя Исключить

Выход true выбирается: Заданной вероятностью
 При выполнении условия

Условие:

Рисунок 2.23 – Свойства блока *selectOutput1*

На Рисунках 2.24 – 2.25 представлены основные свойства блока *Delay*. Блоки *Delay* и *Delay1* в имитационных моделях СМО с каналами различной производительности отличаются свойством «время задержки».

delay - Delay

Имя: Отображать имя Исключить

Тип задержки: Определенное время
 До вызова функции stopDelay()

Время задержки: секунды

Вместимость:

Максимальная вместимость:

Место агентов:

Рисунок 2.24 – Свойства блока *Delay*

delay1 - Delay

Имя: Отображать имя Исключить

Тип задержки: Определенное время
 До вызова функции stopDelay()

Время задержки: секунды

Вместимость:

Максимальная вместимость:

Место агентов:

Рисунок 2.25 – Свойства блока *Delay1*

На Рисунке 2.26 представлены основные свойства блока *sink*. Блоки *sink*, *sink1*, *sink2*, *sink3* идентичны.

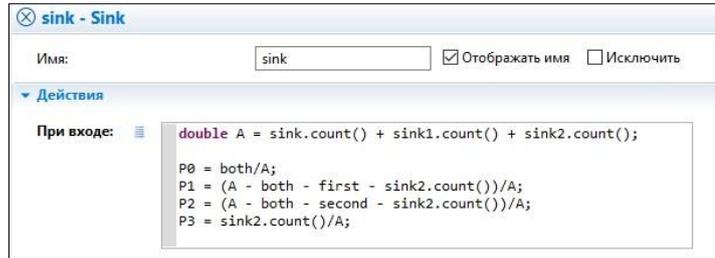


Рисунок 2.26 – Свойства блока *Sink*

Также имитационная модель включает в себя функцию *Func()* для подсчета параметров и реализации алгоритма управления потоком заявок (выбора поступления заявки в блок *delay* или *delay1*.)

Далее представлен листинг функции *Func()* для схемы управления потоком с равновероятным распределением заявок.

```

if ((delay.size() == 0) && (delay1.size() == 0)) {
    int bool = uniform_discr(0,1);
    both++;
    if (bool == 0){
        c0 = true;}
    else {
        c0 = false;
        c1 = true;}}
else
    if (delay.size() == 0){
        first++;
        c0 = true;
    }
    else
        if (delay1.size() == 0){
            second++;
            c0 = false;
            c1 = true;
        }
        else {
            c0 = false;
            c1 = false;}

```

Листинг функции *Func()* для схемы управления, при которой вероятности поступления заявок в каналы пропорциональны интенсивностям потоков обслуживания соответствующих каналов.

```

if ((delay.size() == 0) && (delay1.size() == 0)) {
    both++;
    boolean b = randomTrue(0.2);
    if (b == true){
        c0 = true;}
    else {
        c0 = false;
        c1 = true;}
else
    if (delay.size() == 0){
        first++;
        c0 = true;
    }
    else
        if (delay1.size() == 0){
            second++;
            c0 = false;
            c1 = true;
        }
        else {
            c0 = false;
            c1 = false;}
}

```

Листинг функции *Func()* для схемы управления, при которой заявка направляется на свободный канал наибольшей интенсивности.

```

if ((delay.size() == 0) && (delay1.size() == 0)) {
    both++;
    c0 = false;
    c1 = true;}
else
    if (delay.size() == 0){
        first++;
        c0 = true;
    }
    else
        if (delay1.size() == 0){
            second++;
            c0 = false;
            c1 = true;
        }
        else {
            c0 = false;
            c1 = false;}
}

```

На Рисунке 2.27 представлены результаты моделирования 2-х канальной системы массового обслуживания при интенсивности входного потока $\lambda = 4$, интенсивностях приборов $\mu_1 = 1, \mu_2 = 4$.

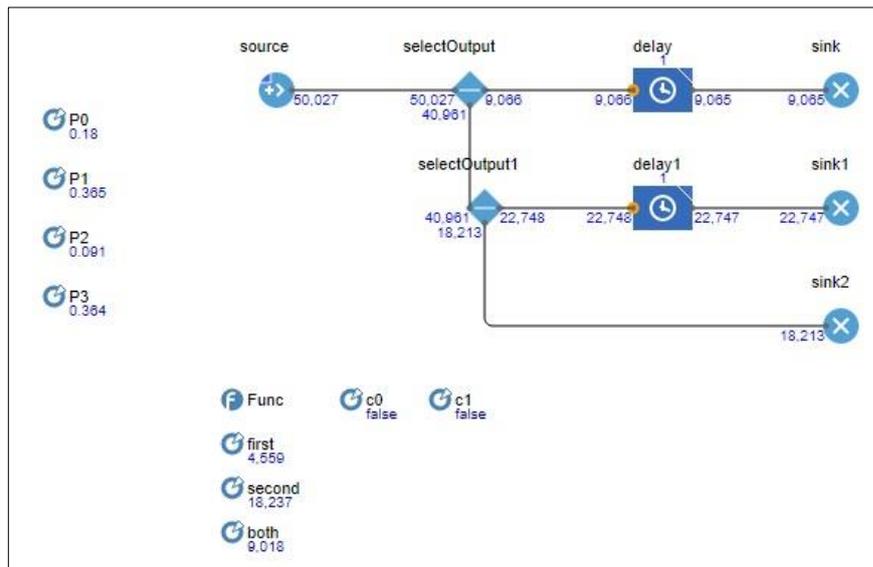


Рисунок 2.27 – Пример результатов моделирования

Таким образом, по результатам имитационного эксперимента было сгенерировано 50027 заявок, из них 9065 были обслужены в блоке *delay* и покинули систему через блок *sink*, 22747 заявок были обслужены в блоке *delay1* и покинули систему через блок *sink1*, а 18213 заявок не были обслужены и покинули систему через *sink2*.

При этом вероятности состояний системы в стационарном режиме составили:

$P_0 = 0,18$ (в системе нет заявок);

$P_1 = 0,365$ (в системе 1 заявка на обслуживании в блоке *delay*);

$P_2 = 0,091$ (в системе 1 заявка на обслуживании в блоке *delay1*);

$P_3 = 0,364$ (в системе 2 заявки на обслуживании; поступившая в этот момент новая заявка получит отказ в обслуживании).

Рассмотрим имитационную модель 3-х канальной системы массового обслуживания с неэквивалентными каналами, представленной на Рисунке 2.28.

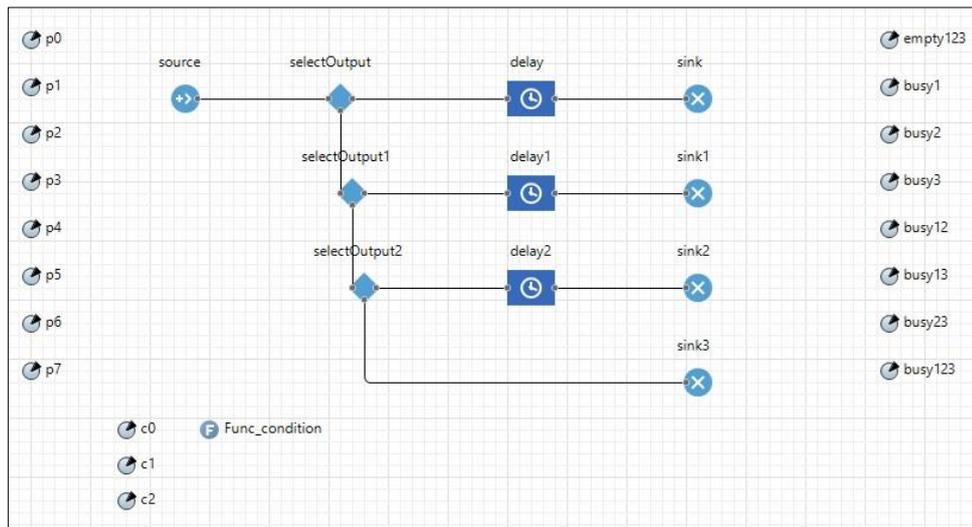


Рисунок 2.28 – Имитационная модель 3-х канальной СМО с приборами различной производительности (построена автором)

Данная модель состоит из следующих блоков:

source – для создания заявок на обслуживание с заданной интенсивностью;

selectOutput, *selectOutput1*, *selectOutput2* – для распределения и направления заявок в следующие блоки;

delay, *delay1*, *delay2* – для задержки заявок, имеют смысл каналов;

sink, *sink1*, *sink2*, *sink3* – для уничтожения заявок.

Помимо блоков, в модели определены переменные для подсчета стационарных вероятностей состояний:

P_0 – система свободна;

P_1 – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок *delay*;

P_2 – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок *delay1*;

P_3 – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок *delay2*;

P_4 – в системе 2 заявки на обслуживании (в блоках *delay* и *delay1*);

P_5 – в системе 2 заявки на обслуживании (в блоках *delay* и *delay2*);

P_6 – в системе 2 заявки на обслуживании (в блоках *delay1* и *delay2*);

P_7 – в системе 3 заявки на обслуживании.

Также в модели определены переменные для подсчета числа всех возникших состояний системы:

empty123 – система свободна;

busy1 – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок *delay*;

busy2 – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок *delay1*;

busy3 – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок *delay2*;

busy12 – в системе 2 заявки на обслуживании (в блоках *delay* и *delay1*);

busy13 – в системе 2 заявки на обслуживании (в блоках *delay* и *delay2*);

busy23 – в системе 2 заявки на обслуживании (в блоках *delay1* и *delay2*);

busy123 – в системе 3 заявки на обслуживании;

Кроме того, в модели определены переменные булевского типа:

c0 – определяет возможность поступления заявки в канал *delay* или *delay1*;

c1 – определяет возможность поступления заявки в канал *delay1* или *delay2*;

c2 – определяет возможность поступления заявки в канал *delay2* или выхода

без обслуживания;

На Рисунке 2.29 представлены основные свойства блока *Source*.

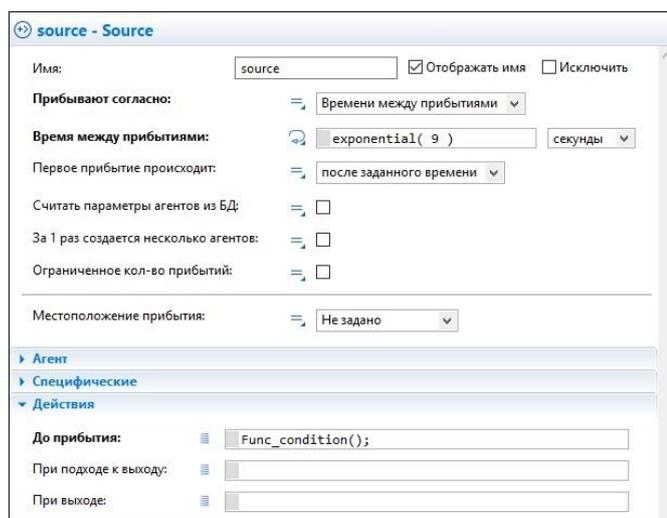


Рисунок 2.29 – Свойства блока *Source*

На Рисунках 2.30 – 2.32 представлены основные свойства блоков *selectOutput*, *selectOutput1*, *selectOutput2*.

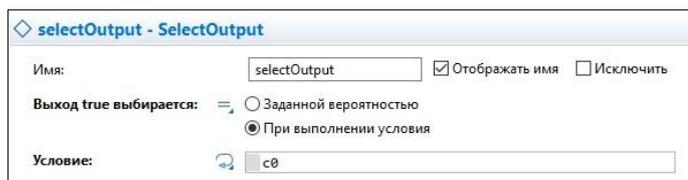
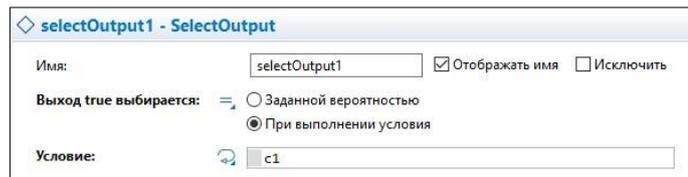
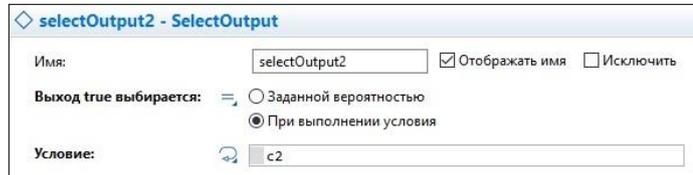
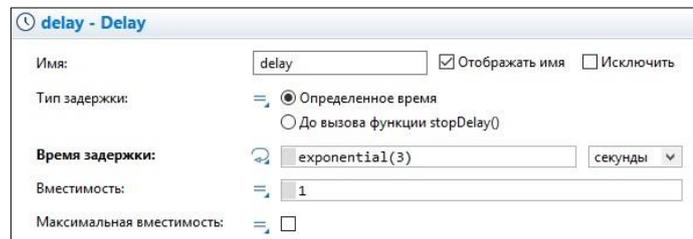


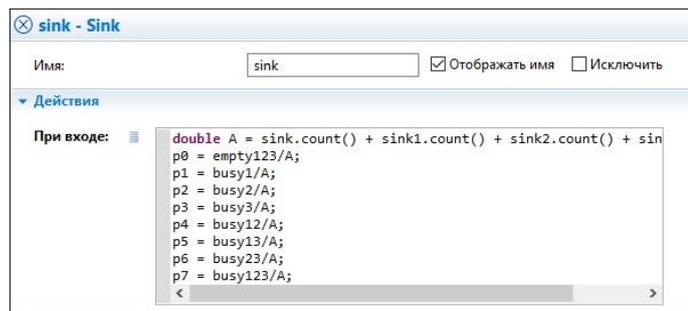
Рисунок 2.30 – Свойства блока *selectOutput*

Рисунок 2.31 – Свойства блока *selectOutput1*Рисунок 2.32 – Свойства блока *selectOutput2*

На Рисунке 2.33 представлены основные свойства блока *Delay*.

Рисунок 2.33 – Свойства блока *Delay*

На Рисунке 2.34 представлены основные свойства блока *sink*. Блоки *sink*, *sink1*, *sink2*, *sink3* идентичны.

Рисунок 2.34 – Свойства блока *Sink*

Также имитационная модель включает в себя функцию *Func_condition()* для подсчета параметров и реализации алгоритма управления потоком заявок (выбора поступления заявки в блок *delay*, *delay1* или *delay2*).

Далее представлен листинг функции *Func_condition()* для схемы управления потоком, при которой поступившая в систему заявка направляется на любой из свободных каналов с одинаковой вероятностью.

```

if ((delay.size() == 0) && (delay1.size() == 0) && (delay2.size() == 0)){
empty123++;
int bool = uniform_discr(0,2);
if (bool == 0){
c0 = true;}
else if (bool == 1){
c0 = false;c1 = true;}
else {
c0 = false; c1=false; c2 = true;}}
else if ((delay1.size()==0) && (delay2.size()==0)){
busy1++;
int bool = uniform_discr(0,1);
if (bool == 0){
c0 = false; c1 = true;}
else if (bool == 1){
c0 = false; c1 = false; c2 = true;}}
else if ((delay.size()==0) && (delay2.size()==0)){
busy2++;
int bool = uniform_discr(0,1);
if (bool == 0){
c0 = true;}
else if (bool == 1){
c0 = false; c1 = false; c2 = true;}}
else if ((delay.size()==0) && (delay1.size()==0)){
busy3++;
int bool = uniform_discr(0,1);
if (bool == 0){
c0 = true;}
else if (bool == 1){
c0 = false; c1 = true;}}
else if (delay.size() == 0){
busy23++;c0 = true;}
else if (delay1.size() == 0){
busy13++;c0 = false; c1 = true;}
else if (delay2.size() == 0){
busy12++; c0 = false; c1 = false; c2 = true;}
else {busy123++; c0 = false; c1 = false; c2 = false;}

```

Далее представлен листинг функции *Func_condition()* для схемы управления, при которой вероятности поступления заявок в свободные каналы обслуживания пропорциональны интенсивностям потоков обслуживания соответствующих каналов.

```

if ((delay.size() == 0) && (delay1.size() == 0) && (delay2.size() == 0)){
empty123++;
double p = uniform (0,100);
if (p<=11,11) {c0 = true;}
else if (p<=44,44){c0 = false; c1 = true;}
else {c0 = false; c1 = false; c2 = true;}}
else if ((delay1.size()==0) && (delay2.size() == 0) ){
busy1++;

```

```

double p = uniform (0,100);
if (p<=37,5) {c0 = false;c1 = true;}
else {c0 = false; c1 = false; c2 = true;}}
else if ((delay.size()==0) && (delay2.size() == 0) ){
busy2++;
double p = uniform (0,100);
if (p<=16,66) {c0 = true;}
else {c0 = false; c1 = false; c2 = true;}}
else if ((delay.size()==0) && (delay1.size() == 0) ){
busy3++;
double p = uniform (0,100);
if (p<=25) {c0 = true;}
else {c0 = false; c1 = true;}}
    else if (delay.size() == 0){
        busy23++; c0 = true;}
    else if (delay1.size() == 0){
        busy13++; c0 = false; c1 = true;}
    else if (delay2.size() == 0){
        busy12++; c0 = false; c1 = false; c2 = true;}
        else {busy123++; c0 = false; c1 = false; c2 = false;}

```

Листинг функции *Func_condition()* для схемы управления с приоритетом канала наибольшей производительности.

```

if ((delay.size() == 0) && (delay1.size() == 0) && (delay2.size() == 0)){
empty123++;
c0 = false; c1 = false; c2 = true;}
    else if ((delay1.size()==0) && (delay2.size() == 0) ){
        busy1++;
        c0 = false; c1 = false; c2 = true;}
    else if ((delay.size()==0) && (delay2.size() == 0) ){
        busy2++;
        c0 = false; c1 = false; c2 = true;}
    else if ((delay.size()==0) && (delay1.size() == 0) ){
        busy3++;
        c0 = false; c1 = true;}
        else if (delay.size() == 0){
            busy23++; c0 = true;}
        else if (delay1.size() == 0){
            busy13++; c0 = false; c1 = true;}
        else if (delay2.size() == 0){
            busy12++; c0 = false; c1 = false; c2 = true;}
            else {busy123++; c0 = false; c1 = false; c2 = false;}

```

На Рисунке 2.35 представлены результаты моделирования системы с каналами одинаковой производительности при параметрах $\lambda = 9$; $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 3$.

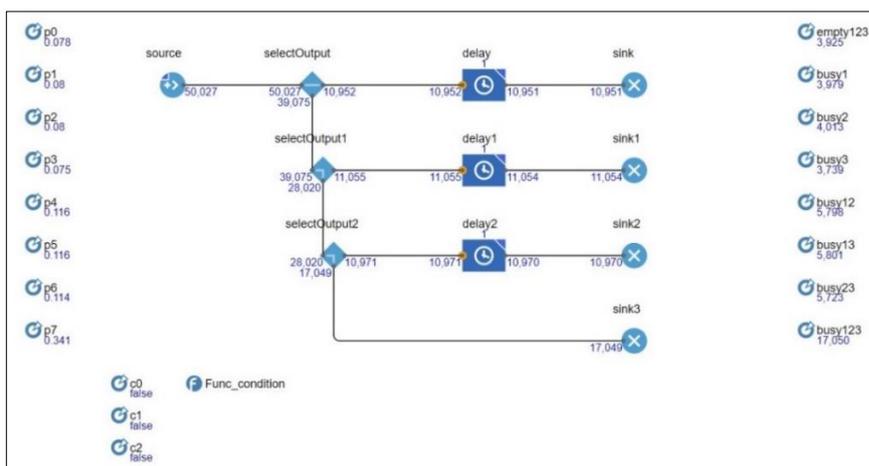


Рисунок 2.35 – Пример результатов имитационного моделирования

По результатам имитационного эксперимента видно, что было сгенерировано 50027 заявок, из них 10951 были обслужены в блоке *delay* и покинули систему через блок *sink*, 11054 заявок были обслужены в блоке *delay1* и покинули систему через блок *sink1*, 10970 заявок были обслужены в блоке *delay2* и покинули систему через блок *sink2*, 17049 заявок остались необслуженными.

Для проверки адекватности разработанной модели сравним результаты ее результаты с результатами аналитических расчетов.

На Рисунке 2.36 представлен граф состояний 3-х канальной СМО с каналами одинаковой производительности $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 3$. Интенсивность входного потока $\lambda = 9$.

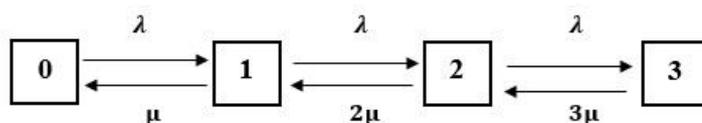


Рисунок 2.36 – Граф состояний 3-х канальной СМО с приборами одинаковой производительности (построено автором)

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 3, P_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \dots + \frac{\rho^n}{n!} \right]^{-1} = \frac{1}{13} = 0,077 \quad (2.29)$$

$$P_1 = \frac{\rho}{1!} P_0 = 0,231, P_2 = \frac{\rho^2}{2!} P_0 = 0,346, P_3 = \frac{\rho^3}{3!} P_0 = 0,346$$

Таким образом, результаты аналитических расчетов и результаты, полученные с помощью средств имитационного моделирования, представленные на Рисунке 2.35, практически совпали.

Рассмотрим имитационную модель 4-х канальной системы с приборами различной производительности, представленную на Рисунке 2.37.

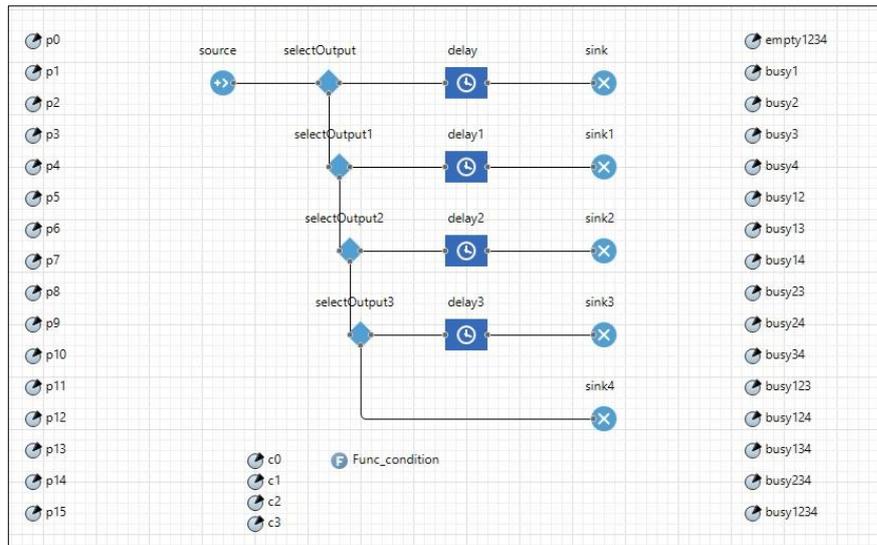


Рисунок 2.37 – Имитационная модель 4-х канальной СМО с приборами различной производительности (построена автором)

Данная модель состоит из следующих блоков:

source – для создания заявок на обслуживание с заданной интенсивностью;

selectOutput, *selectOutput1*, *selectOutput2*, *selectOutput3* – для распределения и направления заявок в следующие блоки;

delay, *delay1*, *delay2*, *delay3* – для задержки заявок;

sink, *sink1*, *sink2*, *sink3*, *sink4* – для уничтожения заявок.

Помимо блоков, в модели определены переменные для подсчета стационарных вероятностей состояний:

P0 – система свободна;

P1 – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок *delay*;

P2 – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок *delay1*;

P3 – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок *delay2*;

P4 – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок *delay3*;

P5 – в системе 2 заявки (*delay1* и *delay2*);

P6 – в системе 2 заявки (*delay1* и *delay3*);

P7 – в системе 2 заявки (*delay1* и *delay4*);

$P8$ – в системе 2 заявки ($delay2$ и $delay3$);

$P9$ – в системе 2 заявки ($delay2$ и $delay4$);

$P10$ – в системе 2 заявки ($delay3$ и $delay4$);

$P11$ – в системе 3 заявки ($delay1$, $delay2$, $delay3$);

$P12$ – в системе 3 заявки ($delay1$, $delay2$, $delay4$);

$P13$ – в системе 3 заявки ($delay1$, $delay3$, $delay4$);

$P14$ – в системе 3 заявки ($delay2$, $delay3$, $delay4$);

$P15$ – в системе 4 заявки ($delay1$, $delay2$, $delay3$, $delay4$);

Также в модели определены переменные для подсчета числа всех возникших состояний системы:

$empty1234$ – система свободна;

$busy1$ – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок $delay$;

$busy2$ – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок $delay1$;

$busy3$ – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок $delay2$;

$busy4$ – в системе 1 заявка и ее обслуживанием занят блок $delay3$;

$busy12$ – в системе 2 заявки ($delay1$ и $delay2$);

$busy13$ – в системе 2 заявки ($delay1$ и $delay3$);

$busy14$ – в системе 2 заявки ($delay1$ и $delay4$);

$busy23$ – в системе 2 заявки ($delay2$ и $delay3$);

$busy24$ – в системе 2 заявки ($delay2$ и $delay4$);

$busy34$ – в системе 2 заявки ($delay3$ и $delay4$);

$busy123$ – в системе 3 заявки ($delay1$, $delay2$, $delay3$);

$busy124$ – в системе 3 заявки ($delay1$, $delay2$, $delay4$);

$busy134$ – в системе 3 заявки ($delay1$, $delay3$, $delay4$);

$busy234$ – в системе 3 заявки ($delay2$, $delay3$, $delay4$);

$busy1234$ – в системе 4 заявки ($delay1$, $delay2$, $delay3$, $delay4$);

Также в модели определены переменные булевского типа:

$c0$ – переменная булевского типа, определяющая возможность поступления заявки в канал $delay$ или $delay1$;

$c1$ – переменная булевского типа, определяющая возможность поступления заявки в канал $delay1$ или $delay2$;

$c2$ – переменная булевского типа, определяющая возможность поступления заявки в канал $delay2$ или $delay3$;

$c3$ – переменная булевского типа, определяющая возможность поступления заявки в канал $delay3$ или выхода без обслуживания;

Для системы с параметрами $\lambda = 20$; $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 5$ получили следующие результаты, представленные на Рисунке 2.38.

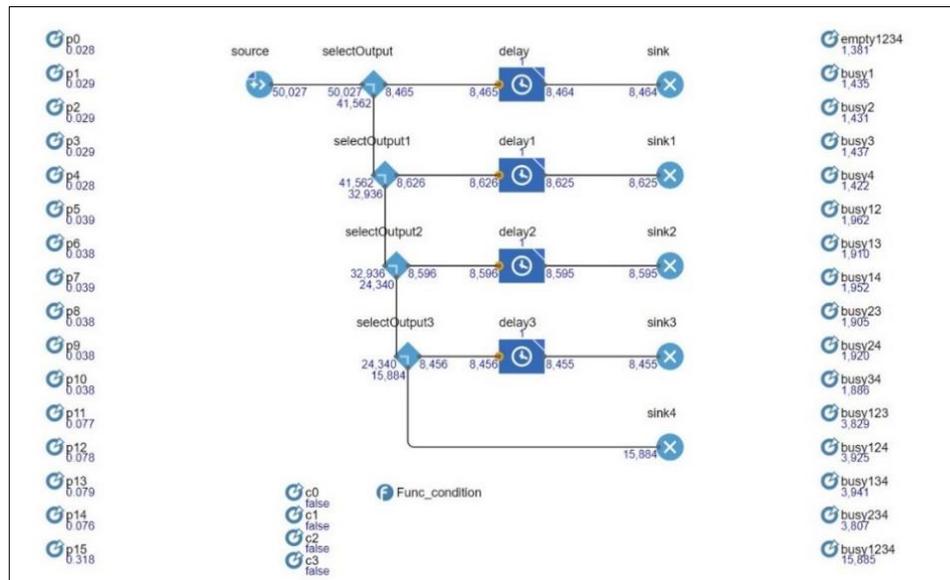


Рисунок 2.38 – Пример результатов имитационного моделирования

Видно, что по результатам имитационного эксперимента было сгенерировано 50027 заявок, из них 8464 были обслужены в блоке $delay$ и покинули систему через блок $sink$, 8625 заявок были обслужены в блоке $delay1$ и покинули систему через блок $sink1$, 8595 заявок были обслужены в блоке $delay2$ и покинули систему через блок $sink2$, 8455 заявок были обслужены в блоке $delay3$ и покинули систему через блок $sink3$, 15884 заявок остались необслуженными.

Рассмотрим имитационную модель 4-х канальной системы массового обслуживания с очередью, представленную на Рисунке 2.39.

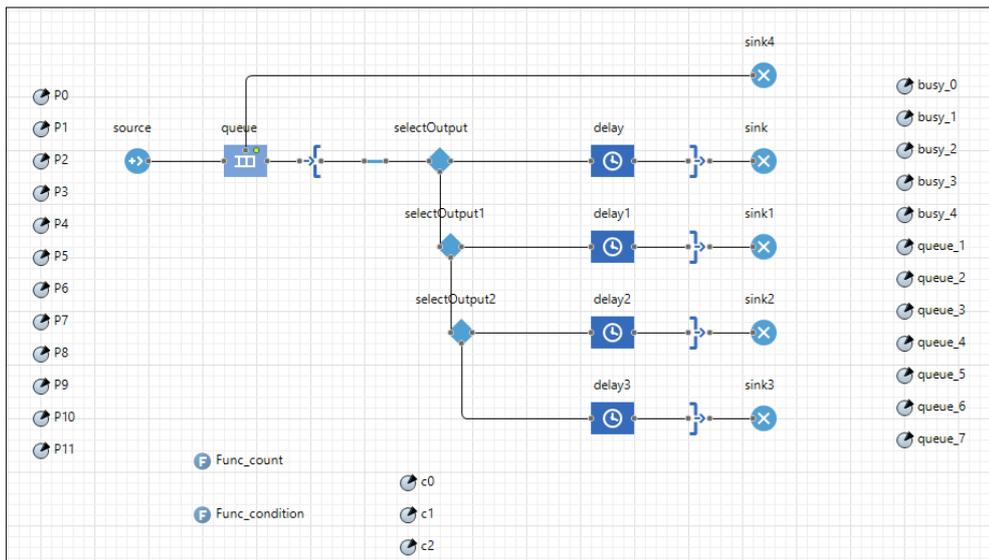


Рисунок 2.39 – Имитационная модель 4-х канальной СМО с приборами различной производительности и очередью (построена автором)

Данная модель состоит из следующих блоков:

source – для создания заявок;

queue – для создания очереди;

selectOutput, *selectOutput1*, *selectOutput2* – для направления заявок в следующие блоки;

delay, *delay1*, *delay2*, *delay3* – для задержки заявок;

sink, *sink1*, *sink2*, *sink3*, *sink4* – для уничтожения заявок;

restrictedAreaStart и *restrictedAreaEnd* – для ограничения количества заявок в области процесса;

plainTransfer – для задания действия заявкам, проходящим через данный блок.

Помимо блоков, в модели определены переменные для подсчета стационарных вероятностей состояний:

P0 – система свободна;

P1 – в системе 1 заявка на обслуживании;

P2 – в системе 2 заявки на обслуживании;

P3 – в системе 3 заявки на обслуживании;

P4 – в системе 4 заявки на обслуживании;

P5 – в системе 4 заявки на обслуживании, 1 – в очереди;

$P6$ – в системе 4 заявки на обслуживании, 2 – в очереди;

$P7$ – в системе 4 заявки на обслуживании, 3 – в очереди;

$P8$ – в системе 4 заявки на обслуживании, 4 – в очереди;

$P9$ – в системе 4 заявки на обслуживании, 5 – в очереди;

$P10$ – в системе 4 заявки на обслуживании, 6 – в очереди;

$P11$ – в системе 4 заявки на обслуживании, 7 – в очереди;

Также в модели определены переменные для подсчета количества случаев для каждого возможного состояния системы:

$busy_0$ – все каналы обслуживания свободны;

$busy_1$ – 1 канал занят;

$busy_2$ – 2 канала заняты;

$busy_3$ – 3 канала заняты;

$busy_4$ – 4 канала заняты;

$queue1$ – 4 канала заняты, очередь – 1;

$queue2$ – 4 канала заняты, очередь – 2;

$queue3$ – 4 канала заняты, очередь – 3;

$queue4$ – 4 канала заняты, очередь – 4;

$queue5$ – 4 канала заняты, очередь – 5;

$queue6$ – 4 канала заняты, очередь – 6;

$queue7$ – 4 канала заняты, очередь – 7;

Также в модели определены переменные булевского типа:

$c0$ – переменная булевского типа, определяющая возможность поступления заявки в канал $delay$ или $delay1$;

$c1$ – переменная булевского типа, определяющая возможность поступления заявки в канал $delay1$ или $delay2$;

$c2$ – переменная булевского типа, определяющая возможность поступления заявки в канал $delay2$ или выхода без обслуживания;

Для параметров $\lambda = 8$; $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 5$, при равной производительности обслуживающих устройств и максимальной длине очереди равной 1 получили результаты, представленные на Рисунке 2.40.

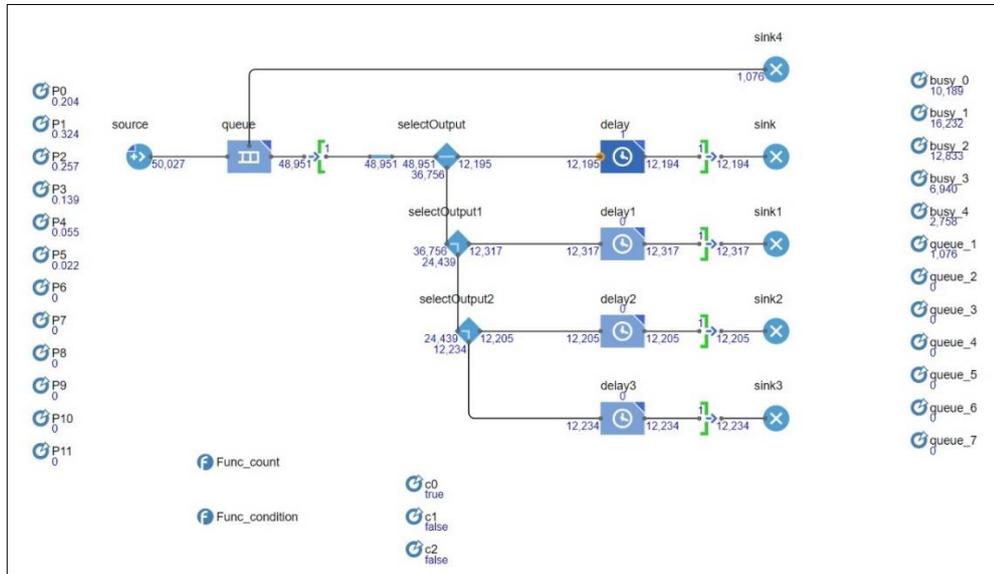


Рисунок 2.40 – Пример результатов имитационного моделирования

2.2.2. Адекватность имитационных моделей

Как было отмечено ранее, численный характер решения задач с помощью методов имитационного моделирования приводит к необходимости верификации полученных результатов [101–103]. С этой целью проведен ряд вычислительных экспериментов с двух-, трех- и четырехканальными системами с отказами, результаты которых были соотнесены с результатами аналитических расчетов.

В качестве основных показателей для сравнения использовались P_0 , показывающая вероятность того, что система свободна, и $P_{\text{отк}}$, показывающая вероятность того, что все каналы в системе заняты. В ходе экспериментов интенсивность входного потока варьировалась, а интенсивности каналов оставались неизменными.

Рассмотрим результаты имитационных и аналитических расчетов 2-х канальной системой массового обслуживания с приборами одинаковой производительности, представленные в Таблице 2.1. В строках «И» приведены результаты, получен-

ные с помощью имитационной модели, в строках «А» - результаты аналитических расчетов.

Таблица 2.1 – Результаты аналитических расчетов и имитационной модели

λ	μ_1	μ_2	И/А	P_0	$P_{отк}$
2	2,5	2,5	И	0,469	0,153
			А	0,472	0,151
4	2,5	2,5	И	0,256	0,329
			А	0,258	0,330
8	2,5	2,5	И	0,105	0,554
			А	0,107	0,548
10	2,5	2,5	И	0,077	0,617
			А	0,077	0,616

Из материалов таблицы видно, что наибольшее отклонение в 0,006 возникло при входном потоке $\lambda = 8$. Относительная погрешность в этом случае составляет 1,1%.

Проведем оценку адекватности имитационной модели 2-х канальной СМО с приборами различной интенсивности при $\mu_1 = 1, \mu_2 = 4$, функционирующей в условиях равновероятного распределения заявок. Результаты сведены в Таблицу 2.2.

Таблица 2.2 – Результаты аналитических расчетов и имитационной модели

λ	μ_1	μ_2	И/А	P_0	$P_{отк}$
2	1	4	И	0,363	0,183
			А	0,364	0,182
4	1	4	И	0,18	0,364
			А	0,182	0,364
8	1	4	И	0,072	0,57
			А	0,071	0,571
10	1	4	И	0,051	0,634
			А	0,051	0,633

По итогам анализа материалов таблицы обращает на себя внимание тот факт, что результаты аналитических и имитационных расчетов крайне близки, а в некоторых случаях – полностью совпадают. Наибольшее отклонение в 0,002 возникло при величине входного потока $\lambda = 4$. Таким образом, при рассмотренных параметрах относительная погрешность составила 1,1%.

Проведем оценку адекватности имитационной модели 2-х канальной СМО, функционирующей в условиях пропорционального распределения заявок. Результаты представлены в Таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Результаты аналитических расчетов и имитационной модели

λ	μ_1	μ_2	И/А	P_0	$P_{отк}$
2	1	4	И	0,418	0,164
			А	0,417	0,166
4	1	4	И	0,206	0,351
			А	0,205	0,354
8	1	4	И	0,077	0,567
			А	0,078	0,568
10	1	4	И	0,055	0,632
			А	0,054	0,630

Из материалов таблицы видно, что наибольшее отклонение в 0,003 возникло при входном потоке $\lambda = 4$. Относительная погрешность в этом случае составляет 0,85%.

Проведем оценку адекватности имитационной модели 2-х канальной СМО, функционирующей в условиях управления потоками с приоритетом канала наибольшей производительности. Результаты представлены в Таблице 2.4.

Таблица 2.4 – Результаты аналитических расчетов и имитационной модели

λ	μ_1	μ_2	И/А	P_0	$P_{отк}$
2	1	4	И	0,465	0,152
			А	0,462	0,154
4	1	4	И	0,224	0,346
			А	0,224	0,345
8	1	4	И	0,081	0,566
			А	0,082	0,565
10	1	4	И	0,057	0,631
			А	0,057	0,629

Из материалов таблицы видно, что наибольшее отклонение в 0,003 возникло при входном потоке $\lambda = 2$. Относительная погрешность в этом случае составляет 0,65%.

Проведем оценку адекватности имитационной модели 3-х канальной СМО с каналами одинаковой производительности. Результаты представлены в Таблице 2.5.

Из материалов таблицы видно, что наибольшее отклонение в 0,005 возникло при входном потоке $\lambda = 9$. Относительная погрешность в этом случае составляет 1,44%.

Таблица 2.5 – Результаты аналитических расчетов и имитационной модели

λ	μ_1	μ_2	μ_3	И/А	P_0	$P_{отк}$
9	3	3	3	И	0,078	0,341
				А	0,077	0,346
2	3	3	3	И	0,52	0,025
				А	0,516	0,025
5	3	3	3	И	0,206	0,159
				А	0,207	0,160
15	3	3	3	И	0,026	0,531
				А	0,025	0,521

Проведем оценку адекватности имитационной модели 3-х канальной СМО, функционирующей в условиях равновероятного распределения заявок. Результаты представлены в Таблице 2.6.

Таблица 2.6 – Результаты аналитических расчетов и имитационной модели

λ	μ_1	μ_2	μ_3	И/А	P_0	$P_{отк}$
9	1	3	5	И	0,047	0,371
				А	0,046	0,372
2	1	3	5	И	0,395	0,036
				А	0,398	0,035
5	1	3	5	И	0,133	0,184
				А	0,134	0,186
15	1	3	5	И	0,014	0,547
				А	0,015	0,546

Из материалов таблицы видно, что наибольшее отклонение в 0,003 возникло при входном потоке $\lambda = 2$. Относительная погрешность в этом случае составляет 0,75%.

Проведем оценку адекватности имитационной модели 3-х канальной СМО, функционирующей в условиях пропорционального распределения заявок. Результаты представлены в Таблице 2.7. Из материалов таблицы видно, что наибольшее отклонение в 0,005 возникло при входном потоке $\lambda = 2$. Относительная погрешность в этом случае составляет 1,02%.

Таблица 2.7 – Результаты аналитических расчетов и имитационной модели

λ	μ_1	μ_2	μ_3	И/А	P_0	$P_{отк}$
9	1	3	5	И	0,055	0,356
				А	0,055	0,364
2	1	3	5	И	0,493	0,028
				А	0,488	0,028
5	1	3	5	И	0,171	0,173
				А	0,168	0,174
15	1	3	5	И	0,016	0,543
				А	0,016	0,543

Проведем оценку адекватности имитационной модели 3-х канальной СМО, функционирующей в условиях управления потоками с приоритетом канала наибольшей производительности. Результаты представлены в Таблице 2.8.

Таблица 2.8 – Результаты аналитических расчетов и имитационной модели

λ	μ_1	μ_2	μ_3	И/А	P_0	$P_{отк}$
9	1	3	5	И	0,065	0,357
				А	0,068	0,353
2	1	3	5	И	0,598	0,02
				А	0,594	0,019
5	1	3	5	И	0,215	0,158
				А	0,213	0,158
15	1	3	5	И	0,018	0,542
				А	0,019	0,539

Из материалов таблицы видно, что наибольшее отклонение в 0,004 возникло при входном потоке $\lambda = 9$ и $\lambda = 2$. Относительная погрешность в этом случае составляет 1,13% и 0,67% соответственно.

Проведем оценку адекватности имитационной модели 4-х канальной СМО с каналами одинаковой производительности. Результаты представлены в Таблице 2.9.

Таблица 2.9 – Результаты аналитических расчетов и имитационной модели

λ	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	И/А	P_0	$P_{отк}$
20	5	5	5	5	И	0,028	0,318
					А	0,029	0,315
5	5	5	5	5	И	0,369	0,016
					А	0,369	0,015
8	5	5	5	5	И	0,207	0,057
					А	0,207	0,056
25	5	5	5	5	И	0,017	0,392
					А	0,015	0,391

Из материалов таблицы видно, что наибольшее отклонение в 0,003 возникло при входном потоке $\lambda = 20$. Относительная погрешность в этом составляет 0,95%.

Проведем оценку адекватности имитационной модели 4-х канальной СМО, функционирующей в условиях равновероятного распределения заявок. Результаты представлены в Таблице 2.10.

Таблица 2.10 – Результаты аналитических расчетов и имитационной модели

λ	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	И/А	P_0	$P_{отк}$
20	1	4	6	9	И	0,011	0,335
					А	0,011	0,340
5	1	4	6	9	И	0,207	0,027
					А	0,211	0,024
8	1	4	6	9	И	0,097	0,079
					А	0,099	0,078
25	1	4	6	9	И	0,006	0,424
					А	0,006	0,423

Из материалов таблицы видно, что наибольшее отклонение в 0,005 возникло при входном потоке $\lambda = 20$. Относительная погрешность составляет 1,47%.

Проведем оценку адекватности имитационной модели 4-х канальной СМО, функционирующей в условиях пропорционального распределения заявок. Результаты представлены в Таблице 2.11.

Таблица 2.11 – Результаты аналитических расчетов и имитационной модели

λ	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	И/А	P_0	$P_{отк}$
20	1	4	6	9	И	0,016	0,329
					А	0,016	0,325
5	1	4	6	9	И	0,33	0,018
					А	0,334	0,017
8	1	4	6	9	И	0,161	0,066
					А	0,163	0,064
25	1	4	6	9	И	0,007	0,419
					А	0,007	0,418

Из материалов таблицы видно, что наибольшее отклонение в 0,004 возникло при входном потоке $\lambda = 20$ и $\lambda = 5$. Относительная погрешность в этом случае составляет 1,23% и 1,19% соответственно.

Проведем оценку адекватности имитационной модели 4-х канальной СМО, функционирующей в условиях управления потоком заявок с приоритетом канала наибольшей производительности. Результаты представлены в Таблице 2.12.

Таблица 2.12 – Результаты аналитических расчетов и имитационной модели

λ	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	И/А	P_0	P15
20	1	4	6	9	И	0,021	0,322
					А	0,021	0,321
5	1	4	6	9	И	0,475	0,010
					А	0,478	0,010
8	1	4	6	9	И	0,251	0,051
					А	0,250	0,049
25	1	4	6	9	И	0,011	0,411
					А	0,010	0,410

Как видно по материалам таблицы, наибольшее отклонение в 0,003 возникло при $\lambda = 5$. При этом относительная погрешность в этом случае равна 0,63%.

Таким образом, по результатам ряда численных расчетов и вычислительных экспериментов представляется возможным заключить, что разработанные имитационные модели позволяют достаточно точно рассчитывать функциональные характеристики систем массового обслуживания с каналами различной производительности.

2.2.3. Анализ эффективности системы при различных алгоритмах управления потоками

С помощью имитационных моделей СМО, представленных в разделе 2.2.1, проведена серия вычислительных экспериментов, в ходе которых исследовались эксплуатационные характеристики систем с неэквивалентными каналами в условиях различных схем управления потоками, а также классических систем, обладающих той же суммарной производительностью.

Результаты серии вычислительных экспериментов с 3-х канальными СМО без функции накопления очереди сведены в Таблицу 2.13. В строках «С-1» представлены стационарные вероятности состояний P_0 и $P_{отк}$ при равновероятном распределе-

нии заявок между свободными приборами, в строках «С-2» – при распределении заявок между свободными приборами с вероятностью, пропорциональной их интенсивностям обслуживания, а в строках «С-3» – при распределении заявок с приоритетом канала наибольшей производительности.

Таблица 2.13 – Результаты вычислительных экспериментов с 3-х канальной СМО

λ	μ_1	μ_2	μ_3	Схема	P_0	$P_{отк}$
9	3	3	3	-	0,078	0,341
	1	3	5	С-1	0,047	0,371
				С-2	0,055	0,356
				С-3	0,065	0,357
2	3	3	3	-	0,52	0,025
	1	3	5	С-1	0,395	0,036
				С-2	0,493	0,028
				С-3	0,598	0,02
5	3	3	3	-	0,206	0,159
	1	3	5	С-1	0,133	0,184
				С-2	0,171	0,173
				С-3	0,215	0,158
15	3	3	3	-	0,026	0,531
	1	3	5	С-1	0,014	0,547
				С-2	0,016	0,543
				С-3	0,018	0,542
30	3	3	3	-	0,004	0,73
	1	3	5	С-1	0,002	0,741
				С-2	0,003	0,739
				С-3	0,003	0,737

Представленные в таблице результаты демонстрируют явное преимущество алгоритма управления потоками, при котором поступающие в систему заявки направляются на свободные каналы наибольшей производительности. Так, при интенсивности входного потока $\lambda = 2$ для равновероятного распределения заявок $P_0 = 0,395$, для распределения заявок с вероятностью, пропорциональной интенсивностям каналов $P_0 = 0,493$, для распределения заявок с приоритетом канала наибольшей производительности $P_0 = 0,598$. Таким образом, при $\lambda = 2$ схема «С-3» по показателю P_0 опережает равновероятное и пропорциональное распределение на 33,95%, и 17,56% соответственно. Материалы, представленные в таблице, также демонстрируют, что по показателям P_0 и $P_{отк}$ при других величинах нагрузки на си-

стему схема управления с приоритетом канала наибольшей производительности также является более эффективной, чем другие алгоритмы.

Кроме того, по данным таблицы видно, что при некоторых значениях входного потока λ система с каналами различной производительности является более эффективной, чем система с одинаковыми каналами, обладающая той же суммарной интенсивностью обслуживания. Например, при $\lambda = 2$ по показателю P_0 система с неэквивалентными каналами в условиях управления потоком по схеме «С-3» опережает классическую систему на 0,078, а вероятность отказа $P_{\text{отк}}$ меньше на 0,005.

Аналогичный комплекс вычислительных экспериментов проведен с помощью имитационной модели 4-х канальной СМО, представленной на Рисунке 2.37. Результаты сведены в Таблицу 2.14.

Таблица 2.14 – Результаты вычислительных экспериментов с 4-х канальной СМО

λ	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	Схема	P_0	$P_{\text{отк}}$
20	5	5	5	5	-	0,028	0,318
	1	4	6	9	С-1	0,011	0,335
					С-2	0,016	0,329
				С-3	0,021	0,322	
5	5	5	5	5	-	0,369	0,016
	1	4	6	9	С-1	0,207	0,027
					С-2	0,33	0,018
				С-3	0,475	0,01	
8	5	5	5	5	-	0,207	0,057
	1	4	6	9	С-1	0,097	0,079
					С-2	0,161	0,066
				С-3	0,251	0,051	
15	5	5	5	5	-	0,061	0,21
	1	4	6	9	С-1	0,023	0,239
					С-2	0,037	0,224
				С-3	0,054	0,21	
25	5	5	5	5	-	0,017	0,392
	1	4	6	9	С-1	0,006	0,424
					С-2	0,007	0,419
				С-3	0,011	0,411	
50	5	5	5	5	-	0,001	0,65
	1	4	6	9	С-1	6,397E-4	0,659
					С-2	5,997E-4	0,655
				С-3	8,196E-4	0,651	

Материалы представленной таблицы также демонстрируют, что по стационарным вероятностям состояний P_0 и $P_{\text{отк}}$ алгоритм управления потоком с приорите-

том канала наибольшей производительности является более эффективным на всем диапазоне нагрузки. Кроме того, по аналогии с ранее рассмотренными 3-х канальными системами, видно, что при некоторых значениях интенсивности потока λ системы с каналами различной производительности могут быть эффективнее классических СМО.

Также в рамках серии вычислительных экспериментов для различных схем управления потоками рассмотрены эксплуатационные особенности 4-х канальной системы с функцией накопления очереди. В Таблице 2.15 представлены результаты экспериментов с системой, обладающей каналами одинаковой производительности ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 5$) и СМО с каналами различной производительности ($\mu_1 = 1, \mu_2 = 4, \mu_3 = 6, \mu_4 = 9$).

Таблица 2.15 – Результаты вычислительных экспериментов с 4-х канальной СМО с очередью

		$L_{оч.}$	P_0	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	
max.оч. – 1	$\mu_1 = \mu_2$	0,236	0,022	0,236							
	$\mu_1 \neq \mu_2$	C-1	0,252	0,009							0,252
		C-2	0,245	0,011							0,245
		C-3	0,239	0,017							0,239
max.оч. – 2	$\mu_1 = \mu_2$	0,576	0,018	0,192	0,192						
	$\mu_1 \neq \mu_2$	C-1	0,612	0,006	0,202						0,205
		C-2	0,595	0,009	0,201						0,197
		C-3	0,591	0,013	0,195						0,198
max.оч. – 3	$\mu_1 = \mu_2$	0,948	0,016	0,161	0,158	0,157					
	$\mu_1 \neq \mu_2$	C-1	1,019	0,006	0,167	0,168					0,172
		C-2	0,982	0,008	0,164	0,163					0,164
		C-3	0,972	0,011	0,162	0,162					0,162
max.оч. – 4	$\mu_1 = \mu_2$	1,405	0,012	0,14	0,139	0,141	0,141				
	$\mu_1 \neq \mu_2$	C-1	1,477	0,004	0,144	0,146	0,147				0,15
		C-2	1,432	0,006	0,142	0,143	0,14				0,146
		C-3	1,367	0,009	0,143	0,139	0,134				0,136
max.оч. – 5	$\mu_1 = \mu_2$	1,858	0,012	0,12	0,122	0,126	0,124	0,124			
	$\mu_1 \neq \mu_2$	C-1	1,914	0,004	0,126	0,124	0,128	0,129			0,128
		C-2	1,852	0,006	0,126	0,123	0,123	0,124			0,123
		C-3	1,786	0,007	0,125	0,124	0,123	0,116			0,116
max.оч. – 6	$\mu_1 = \mu_2$	2,282	0,01	0,109	0,109	0,11	0,108	0,109	0,108		
	$\mu_1 \neq \mu_2$	C-1	2,342	0,003	0,112	0,11	0,111	0,114	0,111		0,111
		C-2	2,363	0,005	0,11	0,11	0,11	0,115	0,113		0,113
		C-3	2,28	0,008	0,109	0,113	0,11	0,108	0,107		0,108
max.оч. – 7	$\mu_1 = \mu_2$	2,74	0,009	0,099	0,096	0,097	0,098	0,097	0,098	0,099	
	$\mu_1 \neq \mu_2$	C-1	2,821	0,003	0,101	0,106	0,105	0,101	0,099	0,099	0,1
		C-2	2,807	0,005	0,1	0,098	0,101	0,099	0,101	0,1	0,101
		C-3	2,897	0,005	0,094	0,099	0,104	0,103	0,103	0,104	0,106

В ходе эксперимента варьировалась максимальная длина очереди, а интенсивность входного потока оставалась равной $\lambda = 20$.

Материалы представленной таблицы также демонстрируют, что система с каналами различной производительности, функционирующая в условиях распределения заявок с приоритетом прибора наибольшей производительности, показывает более высокие эксплуатационные характеристики, чем другие представленные алгоритмы управления потоком (при этом стоит отметить, что для систем с очередью также существуют более эффективные схемы управления потоком).

Выводы по второй главе

В данной главе построены математические модели систем массового обслуживания с каналами различной производительности, функционирующих в условиях различных схем управления потоками, представлены графы состояний систем такого типа. С помощью численных методов проведена оценка времени перехода процесса функционирования таких систем в стационарный режим, при котором вероятности состояний перестают зависеть от временных характеристик.

Разработан комплекс программ в виде имитационных моделей СМО с каналами различной производительности на базе среды AnyLogic. Для оценки адекватности моделей проведен сравнительный анализ вероятностей состояний систем в стационарном режиме, полученных при использовании имитационных моделей и при аналитических расчетах с помощью систем уравнений Колмогорова. Показано, что для расчета характеристик систем обслуживания с неэквивалентными каналами представляется возможным и целесообразным использование методов имитационного моделирования, особенно – для СМО крупных размерностей.

Проведено исследование эксплуатационных характеристик систем массового обслуживания с каналами различной производительности при различных схемах управления потоками. С помощью вычислительных экспериментов по критериям общей напряженности работы и доле обслуженных заявок для СМО без

функции накопления очереди доказана эффективность использования схемы управления потоками, при которой поступающие в систему заявки направляются на свободные каналы наибольшей производительности. Показано, что при некоторых параметрах системы с неэквивалентными приборами могут быть эффективнее классических систем с каналами одинаковой производительности.

Полученные результаты опубликованы в работах [39; 102].

ГЛАВА 3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С КАНАЛАМИ РАЗЛИЧНОЙ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ

В настоящей главе представлен ряд результатов вычислительных экспериментов, в ходе которых проведен анализ эксплуатационных характеристик систем массового обслуживания с каналами различной производительности, функционирующих в условиях пуассоновских и неординарных потоков, а также при разделении системы такого типа на независимые приборы.

3.1. Области эффективности в условиях пуассоновских потоков

Рассмотрим 2 независимые системы массового обслуживания вида $M/M/n$ без функции накопления очереди, на вход каждой из которых поступает пуассоновский поток заявок интенсивности λ , $\lambda > 0$. Каждая система состоит из n , $n > 0$ каналов. В первой системе обслуживающие приборы обладают одинаковой производительностью $\mu_{11} = \mu_{12} \dots = \mu_{1n}$, во второй системе – различной производительностью, причем $0 < \mu_{21} < \mu_{22} \dots < \mu_{2n}$. Будем полагать, что суммарная интенсивность каналов первой системы $M_1 = \sum_{i=1}^n \mu_{1i}$ равна суммарной производительности каналов второй системы $M_2 = \sum_{i=1}^n \mu_{2i}$.

Исследуем, при каких значениях параметров (интенсивность входного потока λ и интенсивности обслуживающих устройств $\mu_{21} \dots \mu_{2n}$) система массового обслуживания с каналами различной производительности в условиях управления потоком может быть эффективнее классической системы с приборами одинаковой производительности.

В качестве основных показателей эффективности будем рассматривать P_0 – степень загрузки системы и $P_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании.

Для администрирования потоков в системах с приборами различной производительности используется схема с приоритетом наиболее «быстрого» канала,

как наиболее эффективная для систем без функции накопления очереди (См. Главу 2).

В рамках исследования проведена серия вычислительных экспериментов с трех- и четырехканальными системами массового обслуживания на базе программного комплекса AnyLogic.

Параметры исследуемых моделей представлены в Таблице 3.1. В рамках серии вычислительных экспериментов проведен сравнительный анализ показателей эффективности классической системы, обладающей каналами одинаковой производительности $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 3$ (строка «СМО-0»), и систем с неэквивалентными каналами при различных соотношениях интенсивностей приборов от $\mu_1 = 2,5$, $\mu_2 = 3, \mu_3 = 3,5$ (строка «СМО-1») до $\mu_1 = 0,5$, $\mu_2 = 1, \mu_3 = 7,5$ (строка «СМО-8»). Суммарная производительность каналов во всех рассматриваемых системах равна $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 9$. В ходе эксперимента также варьируются значения интенсивности входного потока λ от 1 до 25.

Таблица 3.1 – Параметры исследуемых моделей

		μ_1	μ_2	μ_3
Каналы одинаковой производительности	СМО-0	3	3	3
	СМО-1	2,5	3	3,5
Каналы различной производительности	СМО-2	2	3	4
	СМО-3	1,5	3	4,5
	СМО-4	1	3	5
	СМО-5	0,5	3	5,5
	СМО-6	0,5	2,5	6
	СМО-7	0,5	2	6,5
	СМО-8	0,5	1,5	7
	СМО-9	0,5	1	7,5

В Таблице 3.2 представлены результаты комплекса вычислительных экспериментов, в ходе которых получены значения стационарных вероятностей состояний P_0 и $P_{отк}$ для СМО с каналами одинаковой производительности $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 3$ и СМО с каналами различной производительности $\mu_1 = 2,5; \mu_2 = 3; \mu_3 = 3,5$.

Таблица 3.2 – Результаты вычислительных экспериментов

λ	Каналы одинаковой производительности $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 3$		Каналы различной производительности $\mu_1 = 2,5; \mu_2 = 3; \mu_3 = 3,5$		$P_{02} - P_{01}$	$P_{отк1} - P_{отк2}$
	P_{01}	$P_{отк1}$	P_{02}	$P_{отк2}$		
1	0,715	0,005	0,747	0,003	0,032	0,002
2	0,52	0,025	0,546	0,023	0,026	0,002
3	0,378	0,061	0,401	0,059	0,023	0,002
4	0,275	0,109	0,301	0,106	0,026	0,003
5	0,206	0,159	0,224	0,156	0,018	0,003
6	0,161	0,213	0,172	0,204	0,011	0,009
7	0,126	0,254	0,136	0,25	0,010	0,004
8	0,096	0,306	0,102	0,3	0,006	0,006
9	0,078	0,341	0,081	0,342	0,003	-0,001
10	0,065	0,38	0,066	0,378	0,001	0,002
11	0,053	0,415	0,056	0,415	0,003	0
12	0,042	0,449	0,046	0,446	0,004	0,003
13	0,037	0,476	0,036	0,477	-0,001	-0,001
14	0,031	0,507	0,033	0,506	0,002	0,001
15	0,026	0,531	0,026	0,529	0	0,002
16	0,021	0,553	0,024	0,543	0,003	0,01
17	0,019	0,569	0,02	0,569	0,001	0
18	0,017	0,589	0,017	0,588	0	0,001
19	0,014	0,611	0,015	0,606	0,001	0,005
20	0,013	0,622	0,013	0,622	0	0
21	0,01	0,634	0,011	0,636	0,001	-0,002
22	0,01	0,648	0,01	0,653	0	-0,005
23	0,009	0,664	0,009	0,662	0	0,002
24	0,008	0,675	0,008	0,679	0	-0,004
25	0,007	0,683	0,007	0,69	0	-0,007

В столбце $P_{02} - P_{01}$ представлена разность между значениями P_0 в системах с каналами различной и одинаковой производительности. Таким образом, положительные значения в данном столбце указывают на то, что при данных параметрах системы массового обслуживания с неэквивалентными каналами в условиях управления потоками могут быть эффективнее, чем системы с каналами одинаковой производительности.

К примеру, при интенсивности входного потока $\lambda = 1$ вероятность состояния P_{01} системы с каналами одинаковой производительности равна 0,715, в то же время вероятность состояния P_{02} системы с каналами различной производительности равна 0,747. Таким образом, по данному показателю СМО с каналами различной производительности эффективнее классической системы на 4,48%. Стоит

отметить, что несмотря на кажущуюся незначительность такой разницы в показателях, она может способствовать ощутимому преимуществу для систем, функционирующих, например, в режиме обработки больших данных.

При интенсивности входного потока $\lambda = 4$, вероятности стационарных состояний равны $P_{01} = 0,275$, $P_{02} = 0,301$, разница составляет уже 9,45%.

При увеличении нагрузки на систему данный эффект заметно снижается. Так, при $\lambda = 10$ стационарные вероятности состояний равны $P_{01} = 0,065$, $P_{02} = 0,066$, разница составляет 1,54%, что может быть сопоставимо с погрешностью методов имитационного моделирования.

Кроме того, по результатам анализа представленной таблицы видно, что наибольшая разница в показателях P_0 наблюдается при незначительной нагрузке на систему (См. результаты при λ от 1 до 5). С увеличением интенсивности входного потока разница между показателями P_0 уменьшается.

В столбце $P_{отк1} - P_{отк2}$ представлена разность между значениями $P_{отк}$ в системах с каналами различной производительности и системами с каналами одинаковой производительности. Положительные значения в данном столбце также указывают на то, что при указанных параметрах СМО с неэквивалентными каналами в условиях администрирования входного потока заявок эффективнее, чем СМО с приборами одинаковой производительности.

Таким образом, материалы таблицы демонстрируют, что существуют области параметров (интенсивность входного потока и интенсивности обслуживающих устройств), при которых системы массового обслуживания с каналами различной производительности могут быть эффективнее классических систем с приборами одинаковой производительности.

Аналогичные расчеты проведены и для других моделей 3-х канальных систем, ранее представленных в Таблице 3.1, в результате чего проанализирована разница в абсолютных значениях между показателями P_0 и $P_{отк}$ в системах с каналами одинаковой и различной производительности. Рассматривать каждую из них по отдельности мы не будем, ограничившись лишь анализом сводной таблицы с областями эффективности СМО.

Результаты комплекса вычислительных экспериментов сведены в общую Таблицу 3.3. Таким образом, в данной таблице представлена разница в величинах стационарных вероятностей состояний $P_{02} - P_{01}$, или области параметров, при которых система с неэквивалентными каналами может быть эффективнее классической системы с приборами одинаковой производительности по показателю P_0 .

Таблица 3.3 – Области эффективности 3-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю P_0

λ	$P_{02} - P_{01}$								
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8	СМО-9
1	0,032	0,054	0,068	0,081	0,086	0,092	0,094	0,09	0,076
2	0,026	0,054	0,071	0,078	0,05	0,056	0,048	0,031	-0,008
3	0,023	0,041	0,05	0,042	-0,009	-0,01	-0,018	-0,023	-0,066
4	0,026	0,037	0,045	0,029	-0,037	-0,031	-0,034	-0,055	-0,087
5	0,018	0,027	0,026	0,009	-0,047	-0,046	-0,05	-0,068	-0,088
6	0,011	0,015	0,01	-0,006	-0,044	-0,053	-0,052	-0,066	-0,083
7	0,01	0,009	0,003	-0,012	-0,048	-0,048	-0,05	-0,058	-0,072
8	0,006	0,009	0,006	-0,012	-0,039	-0,04	-0,042	-0,046	-0,058
9	0,003	0,005	0,001	-0,013	-0,037	-0,036	-0,039	-0,045	-0,051
10	0,001	0,001	-0,003	-0,01	-0,032	-0,033	-0,038	-0,04	-0,044
11	0,003	0,002	-0,002	-0,012	-0,026	-0,027	-0,03	-0,034	-0,038
12	0,004	0,004	-0,001	-0,009	-0,022	-0,022	-0,024	-0,026	-0,03
13	-0,001	-0,001	-0,004	-0,01	-0,021	-0,022	-0,022	-0,023	-0,028
14	0,002	0	-0,003	-0,008	-0,017	-0,017	-0,02	-0,022	-0,023
15	0	0,002	-0,003	-0,008	-0,014	-0,016	-0,015	-0,018	-0,02
16	0,003	0,001	-0,001	-0,006	-0,011	-0,013	-0,013	-0,014	-0,015
17	0,001	0,001	-0,002	-0,005	-0,011	-0,012	-0,012	-0,013	-0,015
18	0	-0,001	-0,002	-0,005	-0,01	-0,01	-0,011	-0,012	-0,013
19	0,001	0	-0,001	-0,004	-0,008	-0,008	-0,008	-0,009	-0,011
20	0	-0,001	-0,002	-0,004	-0,008	-0,008	-0,008	-0,01	-0,011

По результатам анализа материалов таблицы видно, что система массового обслуживания с неэквивалентными каналами может быть эффективнее своего классического аналога с приборами одинаковой производительности преимущественно в тех случаях, когда диспропорция интенсивностей каналов невелика (См. результаты в столбцах «СМО-1» – «СМО-3»). При увеличении разницы в интенсивностях каналов (См. результаты в столбцах «СМО-4» – «СМО-9») области параметров, при которых СМО с каналами различной производительности эффективнее классических СМО, значительно сужаются до меньших значений входного

потока λ . При этом также стоит отметить, что наибольшая разница в эффективности СМО с неэквивалентными каналами и СМО с каналами одинаковой производительности обнаруживается при малых значениях интенсивностей входного потока λ по сравнению с общей интенсивностью каналов (См. результаты при интенсивности входного потока $\lambda < 5$).

На Рисунке 3.1 представлена зависимость разницы в показателях $P_{02} - P_{01}$ от интенсивности входного потока λ . Видно, что при увеличении интенсивности входного потока λ разница практически пропадает.

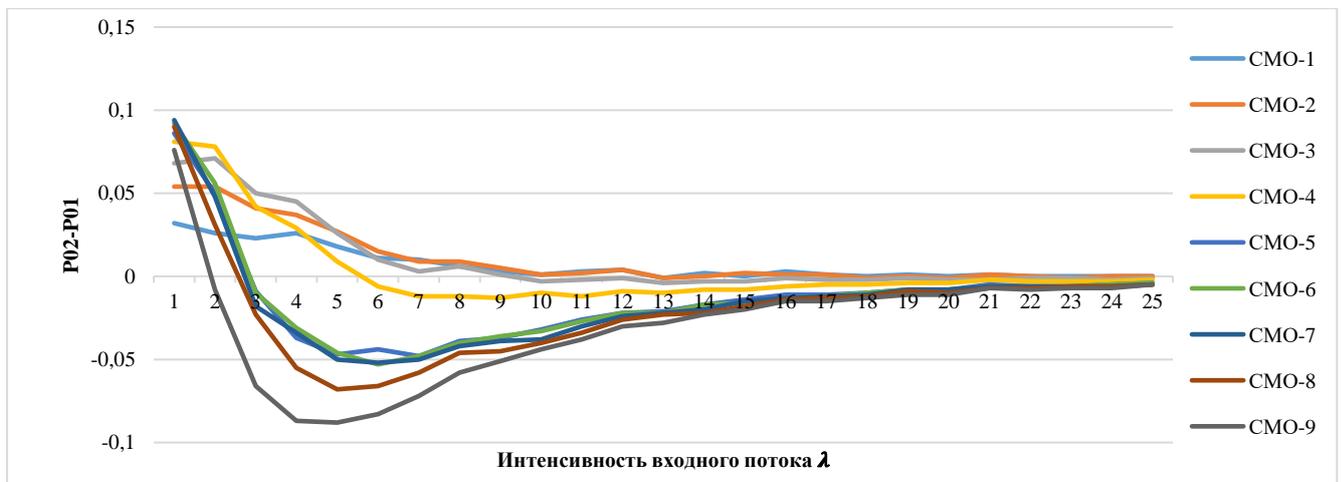


Рисунок 3.1 – Области эффективности 3-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю P_0 (рассчитано и построено автором)

Результаты по параметру $P_{отк}$ сведены в общую Таблицу 3.4. Таким образом, в данной таблице представлена разница в величинах стационарных вероятностей состояний $P_{отк1} - P_{отк2}$, или области параметров, при которых система с неэквивалентными каналами может быть эффективнее классической системы с каналами одинаковой производительности по вероятности отказа $P_{отк}$.

По материалам таблицы видно, что для $P_{отк}$ прослеживается та же тенденция: при небольшой диспропорции в интенсивностях приборов (См. результаты в столбцах «СМО-1» – «СМО-4») системы такого типа могут быть более эффективными, чем СМО с каналами одинаковой производительности. Однако при увеличении разницы между соотношениями неэквивалентных каналов (См. результаты

в столбцах «СМО-5» – «СМО-9») данный эффект значительно сужается до меньших значений входного потока λ .

Таблица 3.4 – Области эффективности 3-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю $P_{отк}$

λ	$P_{отк1} - P_{отк2}$								
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8	СМО-9
1	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,003	0,002	0,002
2	0,002	0,004	0,006	0,005	0,003	0,004	0,003	0	-0,005
3	0,002	0,005	0,006	0,003	-0,002	-0,003	-0,007	-0,01	-0,02
4	0,003	0,006	0,008	0,006	-0,009	-0,009	-0,009	-0,02	-0,034
5	0,003	0,008	0,006	0,001	-0,016	-0,017	-0,022	-0,035	-0,05
6	0,009	0,007	0,004	0,003	-0,017	-0,019	-0,022	-0,036	-0,054
7	0,004	0,005	-0,002	-0,011	-0,031	-0,03	-0,034	-0,046	-0,065
8	0,006	0,006	0,007	-0,007	-0,022	-0,025	-0,029	-0,046	-0,057
9	-0,001	-0,003	-0,001	-0,016	-0,033	-0,032	-0,04	-0,054	-0,067
10	0,002	-0,004	-0,004	-0,008	-0,032	-0,028	-0,038	-0,053	-0,066
11	0	0	-0,007	-0,01	-0,028	-0,031	-0,033	-0,047	-0,064
12	0,003	0	-0,007	-0,009	-0,019	-0,026	-0,034	-0,039	-0,054
13	-0,001	-0,005	-0,001	-0,012	-0,026	-0,031	-0,033	-0,043	-0,054
14	0,001	0,003	0,003	-0,009	-0,017	-0,024	-0,03	-0,035	-0,046
15	0,002	0,006	-0,006	-0,011	-0,018	-0,019	-0,026	-0,033	-0,045
16	0,01	0,005	0,001	-0,008	-0,013	-0,024	-0,023	-0,036	-0,038
17	0	-0,001	-0,01	-0,009	-0,022	-0,024	-0,03	-0,031	-0,042
18	0,001	0,001	-0,001	-0,008	-0,016	-0,023	-0,031	-0,029	-0,04
19	0,005	0,007	0,001	-0,007	-0,011	-0,01	-0,016	-0,025	-0,033
20	0	-0,002	-0,003	-0,009	-0,017	-0,018	-0,02	-0,033	-0,036

При этом стоит отметить, что разница в значениях $P_{отк}$ в системах с каналами различной и одинаковой производительности не столь большая, как в ранее рассмотренных значениях P_0 .

На Рисунке 3.2 представлена зависимость разницы в показателях $P_{отк1} - P_{отк2}$ от интенсивности входного потока λ .

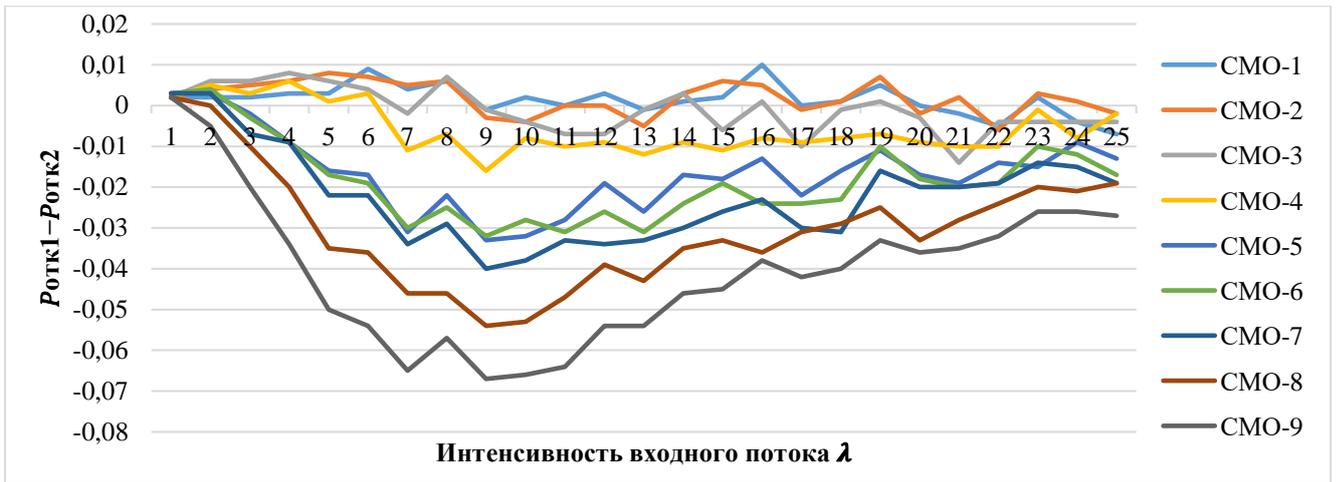


Рисунок 3.2 – Области эффективности 3-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю $P_{отк}$ (рассчитано и построено автором)

Рассмотрим результаты еще одной серии вычислительных экспериментов с моделями 3-х канальных систем массового обслуживания.

Параметры исследуемых моделей представлены в Таблице 3.5. В рамках серии вычислительных экспериментов проведен сравнительный анализ показателей эффективности классической системы, обладающей каналами одинаковой производительности $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 5$ (строка «СМО-0»), и систем с неэквивалентными каналами при различных соотношениях интенсивностей приборов от $\mu_1 = 4, \mu_2 = 5, \mu_3 = 6$ (строка «СМО-1») до $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \mu_3 = 12$ (строка «СМО-7»). Суммарная производительность каналов во всех рассматриваемых системах равна $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 15$. В ходе эксперимента также варьируются значения интенсивности входного потока λ от 1 до 20.

Таблица 3.5 – Параметры исследуемых моделей

		μ_1	μ_2	μ_3
Каналы одинаковой производительности	СМО-0	5	5	5
Каналы различной производительности	СМО-1	4	5	6
	СМО-2	3	5	7
	СМО-3	2	5	8
	СМО-4	1	5	9
	СМО-5	1	4	10
	СМО-6	1	3	11
	СМО-7	1	2	12

В Таблице 3.6 представлены результаты комплекса вычислительных экспериментов, в ходе которых получены значения стационарных вероятностей состояний P_0 и $P_{отк}$ для СМО с каналами одинаковой производительности $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 5$ и СМО с неэквивалентными каналами $\mu_1 = 4; \mu_2 = 5; \mu_3 = 6$.

Таблица 3.6 – Результаты вычислительных экспериментов

λ	Каналы одинаковой производительности $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 5$		Каналы различной производительности $\mu_1 = 4; \mu_2 = 5; \mu_3 = 6$		$P_{02} - P_{01}$	$P_{отк1} - P_{отк2}$
	P_{01}	$P_{отк1}$	P_{02}	$P_{отк2}$		
1	0,819	0,001	0,844	0	0,025	0,001
2	0,676	0,007	0,708	0,006	0,032	0,001
3	0,55	0,02	0,587	0,017	0,037	0,003
4	0,458	0,038	0,488	0,035	0,03	0,003
5	0,378	0,061	0,407	0,058	0,029	0,003
6	0,311	0,089	0,338	0,084	0,027	0,005
7	0,259	0,12	0,286	0,113	0,027	0,007
8	0,218	0,151	0,24	0,144	0,022	0,007
9	0,188	0,179	0,202	0,177	0,014	0,002
10	0,161	0,213	0,171	0,207	0,01	0,006
11	0,139	0,242	0,147	0,234	0,008	0,008
12	0,12	0,268	0,129	0,26	0,009	0,008
13	0,103	0,296	0,112	0,288	0,009	0,008
14	0,088	0,32	0,096	0,32	0,008	0
15	0,078	0,341	0,083	0,344	0,005	-0,003
16	0,067	0,37	0,073	0,363	0,006	0,007
17	0,061	0,387	0,065	0,382	0,004	0,005
18	0,056	0,407	0,06	0,402	0,004	0,005
19	0,047	0,429	0,051	0,428	0,004	0,001
20	0,042	0,449	0,046	0,443	0,004	0,006

Материалы таблицы также демонстрируют, что при незначительной нагрузке со стороны входного потока СМО с каналами различной производительности по эксплуатационным характеристикам могут опережать классические системы.

Аналогичные расчеты проведены и для других моделей 3-х канальных систем массового обслуживания, представленных в Таблице 3.5, в результате чего проанализирована разница в абсолютных значениях между показателями P_0 и $P_{отк}$ в системах с каналами одинаковой и различной производительности. Рассматривать каждую из них по отдельности мы не будем, ограничившись лишь приведением сводной таблицы с областями эффективности СМО.

Результаты сведены в общую Таблицу 3.7. Таким образом, в данной таблице представлена разница в величинах стационарных вероятностей состояний $P_{02} - P_{01}$, или области параметров, при которых система с неэквивалентными каналами может быть эффективнее классической системы с каналами одинаковой производительности по показателю абсолютной пропускной способности P_0 .

Таблица 3.7 – Области эффективности 3-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю P_0

λ	$P_{02} - P_{01}$						
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7
1	0,025	0,044	0,057	0,067	0,075	0,077	0,073
2	0,032	0,059	0,076	0,085	0,092	0,091	0,078
3	0,037	0,071	0,085	0,077	0,081	0,072	0,042
4	0,03	0,051	0,062	0,035	0,039	0,031	-0,003
5	0,029	0,046	0,051	0,004	0,006	-0,003	-0,03
6	0,027	0,043	0,04	-0,001	-0,004	-0,018	-0,048
7	0,027	0,036	0,031	-0,012	-0,023	-0,033	-0,063
8	0,022	0,028	0,018	-0,027	-0,028	-0,038	-0,065
9	0,014	0,019	0,006	-0,036	-0,036	-0,043	-0,069
10	0,01	0,014	0,003	-0,033	-0,039	-0,047	-0,064
11	0,008	0,008	-0,001	-0,042	-0,04	-0,047	-0,063
12	0,009	0,008	-0,005	-0,036	-0,037	-0,049	-0,061
13	0,009	0,007	-0,004	-0,035	-0,036	-0,042	-0,052
14	0,008	0,007	-0,002	-0,029	-0,028	-0,039	-0,046
15	0,005	0,006	-0,004	-0,027	-0,031	-0,034	-0,044
16	0,006	0,004	-0,003	-0,027	-0,025	-0,03	-0,039
17	0,004	0,004	-0,005	-0,025	-0,026	-0,029	-0,036
18	0,004	0	-0,006	-0,024	-0,028	-0,027	-0,034
19	0,004	0,002	-0,004	-0,018	-0,021	-0,025	-0,029
20	0,004	0,002	-0,004	-0,018	-0,019	-0,022	-0,026

По результатам анализа таблицы видно, что по аналогии с предыдущим примером, области эффективности систем с каналами различной производительности связаны с незначительной разницей в интенсивностях обслуживаемых устройств либо с незначительной нагрузкой на систему.

На Рисунке 3.3 данные области представлены на графике. Видно, что при увеличении интенсивности входного потока λ разница практически пропадает.

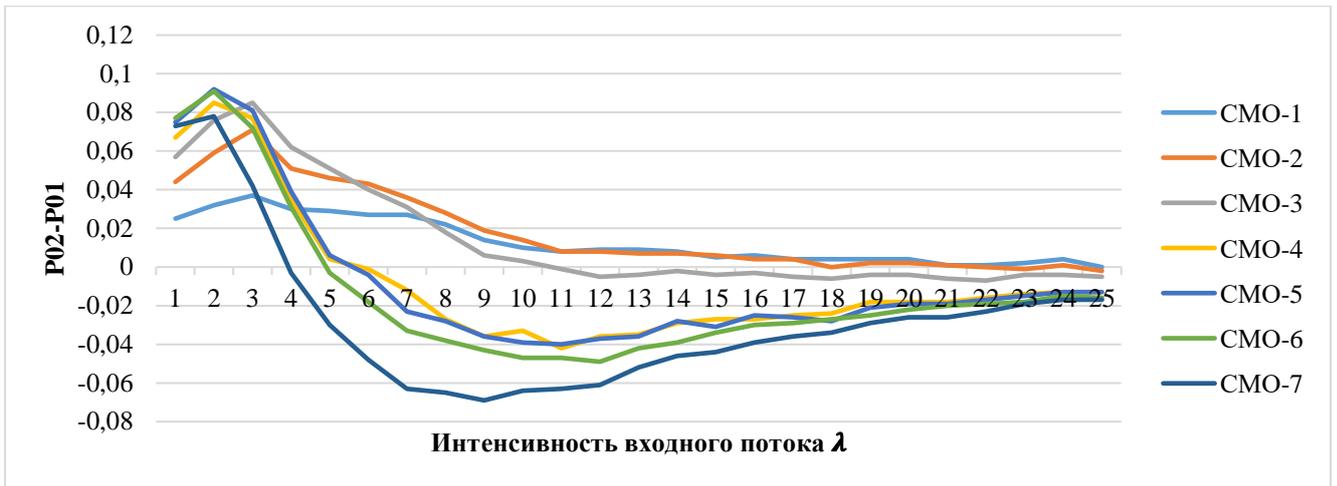


Рисунок 3.3 – Области эффективности 3-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю P_0 (рассчитано и построено автором)

В Таблице 3.8 представлена разница в величинах стационарных вероятностей состояний $P_{отк1} - P_{отк2}$, или области параметров, при которых система с неэквивалентными каналами может быть эффективнее классической системы с каналами одинаковой производительности по показателю $P_{отк}$.

Таблица 3.8 – Области эффективности 3-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю $P_{отк}$

λ	$P_{отк1} - P_{отк2}$						
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7
1	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
2	0,001	0,002	0,002	0,002	0,003	0,003	0,002
3	0,003	0,006	0,006	0,005	0,005	0,004	0
4	0,003	0,005	0,005	0,003	0,003	0	-0,004
5	0,003	0,004	0,004	-0,001	-0,001	-0,007	-0,012
6	0,005	0,006	0,007	0,001	-0,002	-0,008	-0,021
7	0,007	0,009	0,006	-0,002	-0,008	-0,011	-0,025
8	0,007	0,008	0,006	-0,009	-0,013	-0,016	-0,032
9	0,002	0,006	0	-0,013	-0,015	-0,022	-0,042
10	0,006	0,006	0,001	-0,012	-0,015	-0,023	-0,04
11	0,008	0,01	0,004	-0,016	-0,019	-0,029	-0,041
12	0,008	0,008	-0,001	-0,016	-0,02	-0,031	-0,052
13	0,008	0,004	-0,001	-0,025	-0,023	-0,036	-0,05
14	0	0,002	-0,007	-0,02	-0,021	-0,037	-0,051
15	-0,003	0,002	-0,005	-0,022	-0,03	-0,038	-0,059
16	0,007	0,006	-0,004	-0,024	-0,025	-0,03	-0,05
17	0,005	-0,002	-0,011	-0,028	-0,029	-0,038	-0,053
18	0,005	-0,003	-0,009	-0,024	-0,033	-0,039	-0,051
19	0,001	-0,003	-0,005	-0,018	-0,028	-0,034	-0,056
20	0,006	0,002	-0,006	-0,018	-0,02	-0,032	-0,041

На Рисунке 3.4 данные области представлены на графике.

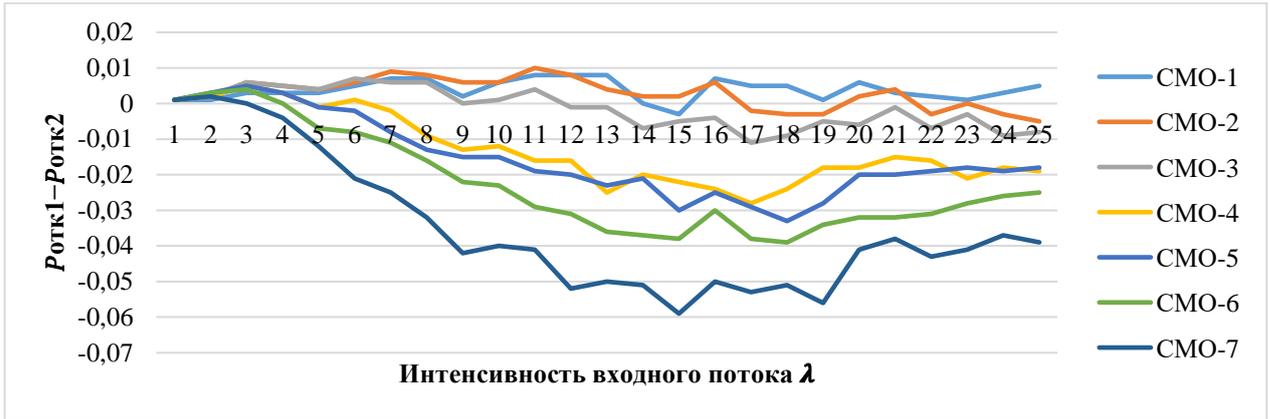


Рисунок 3.4 – Области эффективности 3-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю $P_{отк}$ (рассчитано и построено автором)

Аналогичный комплекс имитационных экспериментов был проведен для четырехканальных систем массового обслуживания.

Параметры исследуемых моделей представлены в Таблице 3.9. В рамках серии вычислительных экспериментов проведен сравнительный анализ показателей эффективности классической системы, обладающей каналами одинаковой производительности $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 5$ (строка «СМО-0»), и систем с неэквивалентными каналами при различных соотношениях интенсивностей приборов от $\mu_1 = 3, \mu_2 = 4, \mu_3 = 6, \mu_4 = 7$ (строка «СМО-1») до $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \mu_3 = 3, \mu_4 = 14$ (строка «СМО-8»). Суммарная производительность каналов во всех рассматриваемых системах равна $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 = 20$.

Таблица 3.9 – Параметры исследуемых моделей

		μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
Каналы одинаковой производительности	СМО-0	5	5	5	5
	СМО-1	3	4	6	7
Каналы различной производительности	СМО-2	2	4	6	8
	СМО-3	1	4	6	9
	СМО-4	1	3	6	10
	СМО-5	1	2	6	11
	СМО-6	1	2	5	12
	СМО-7	1	2	4	13
	СМО-8	1	2	3	14

В Таблице 3.10 представлены результаты комплекса вычислительных экспериментов, в ходе которых получены значения стационарных вероятностей состояний P_0 и $P_{отк}$ для СМО с каналами одинаковой производительности $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 5$ и СМО с каналами различной производительности $\mu_1 = 3; \mu_2 = 4; \mu_3 = 6; \mu_4 = 7$. Интенсивность входного потока λ варьируется от 5 до 25.

Таблица 3.10 – Результаты вычислительных экспериментов

λ	Каналы одинаковой производительности $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 5$		Каналы различной производительности $\mu_1 = 3; \mu_2 = 4; \mu_3 = 6; \mu_4 = 7$		$P_{02} - P_{01}$	$P_{отк1} - P_{отк2}$
	P0	P7	P0	P7		
5	0,369	0,016	0,450	0,012	0,081	0,004
6	0,304	0,027	0,379	0,020	0,075	0,007
7	0,251	0,040	0,311	0,034	0,06	0,006
8	0,207	0,057	0,261	0,048	0,054	0,009
9	0,170	0,074	0,215	0,066	0,045	0,008
10	0,141	0,093	0,177	0,087	0,036	0,006
11	0,122	0,112	0,146	0,109	0,024	0,003
12	0,100	0,136	0,124	0,128	0,024	0,008
13	0,084	0,158	0,103	0,149	0,019	0,009
14	0,072	0,183	0,090	0,170	0,018	0,013
15	0,061	0,210	0,074	0,193	0,013	0,017
16	0,050	0,231	0,062	0,219	0,012	0,012
17	0,045	0,251	0,052	0,240	0,007	0,011
18	0,037	0,272	0,046	0,261	0,009	0,011
19	0,034	0,290	0,041	0,280	0,007	0,01
20	0,028	0,318	0,035	0,300	0,007	0,018
21	0,026	0,330	0,029	0,330	0,003	0
22	0,023	0,351	0,025	0,344	0,002	0,007
23	0,019	0,369	0,021	0,368	0,002	0,001
24	0,018	0,383	0,020	0,373	0,002	0,01
25	0,017	0,392	0,017	0,396	0	-0,004

Аналогичные расчеты проведены и для других параметров 4-х канальных систем, представленных в Таблице 3.9, в результате чего проанализирована разница в показателях эффективности в системах с каналами одинаковой и различной производительности. Результаты сведены в общую Таблицу 3.11. Таким образом, в данной таблице представлена разница в величинах стационарных вероятностей состояний $P_{02} - P_{01}$, или области параметров, при которых система с неэквивалентными каналами может быть эффективнее классической системы с каналами

одинаковой производительности по показателю абсолютной пропускной способности P_0 .

Таблица 3.11 – Области эффективности 4-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю P_0

λ	$P_{02} - P_{01}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
5	0,081	0,1	0,106	0,121	0,127	0,124	0,121	0,093
6	0,075	0,095	0,088	0,095	0,094	0,091	0,087	0,062
7	0,06	0,081	0,062	0,068	0,062	0,065	0,056	0,03
8	0,054	0,065	0,044	0,052	0,037	0,038	0,029	0,014
9	0,045	0,055	0,028	0,033	0,026	0,019	0,015	0
10	0,036	0,041	0,018	0,02	0,01	0,006	0	-0,012
11	0,024	0,033	0,003	0,007	-0,005	-0,008	-0,014	-0,021
12	0,024	0,02	0,003	0,004	-0,011	-0,013	-0,012	-0,025
13	0,019	0,018	-0,005	-0,003	-0,012	-0,009	-0,017	-0,023
14	0,018	0,012	-0,006	-0,011	-0,013	-0,016	-0,02	-0,024
15	0,013	0,008	-0,007	-0,01	-0,012	-0,015	-0,017	-0,024
16	0,012	0,008	-0,007	-0,009	-0,009	-0,014	-0,016	-0,018
17	0,007	0,004	-0,007	-0,011	-0,015	-0,015	-0,017	-0,022
18	0,009	0,004	-0,007	-0,007	-0,011	-0,013	-0,014	-0,017
19	0,007	0	-0,009	-0,012	-0,013	-0,014	-0,015	-0,018
20	0,007	0,002	-0,007	-0,007	-0,012	-0,01	-0,012	-0,013
21	0,003	-0,001	-0,007	-0,008	-0,012	-0,012	-0,011	-0,013
22	0,002	-0,001	-0,007	-0,009	-0,01	-0,01	-0,012	-0,014
23	0,002	0,001	-0,006	-0,006	-0,009	-0,008	-0,009	-0,012
24	0,002	0	-0,007	-0,007	-0,008	-0,01	-0,01	-0,012
25	0	-0,002	-0,006	-0,008	-0,008	-0,011	-0,011	-0,012

На Рисунке 3.5 данные области представлены на графике. По аналогии с ранее рассмотренными примерами видно, что при увеличении интенсивности входного потока λ разница практически пропадает.

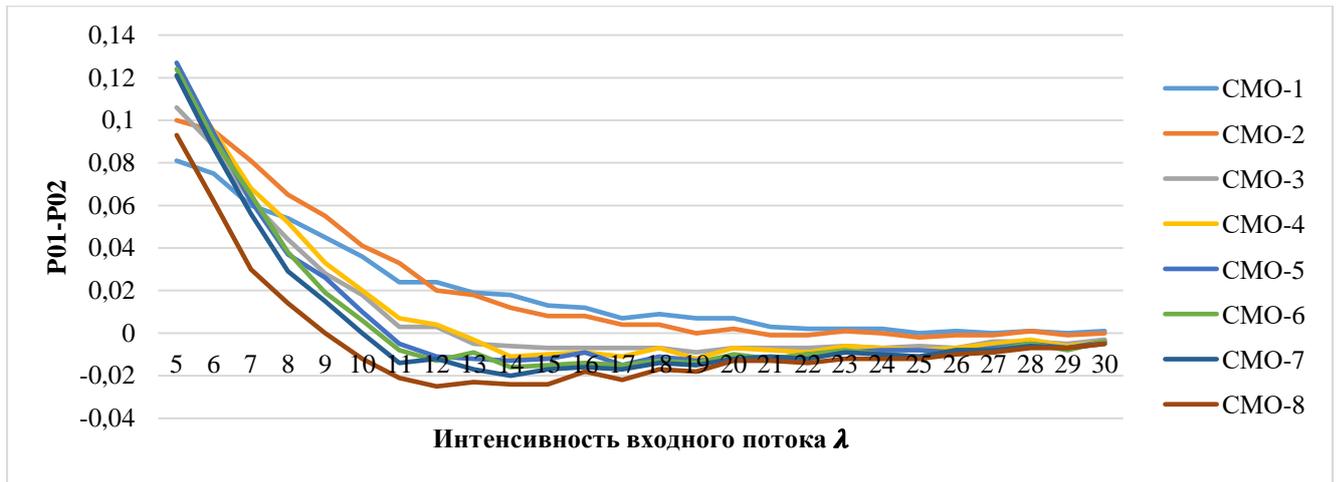


Рисунок 3.5 – Области эффективности 4-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю P_0 (рассчитано и построено автором)

В таблице 3.12 представлены результаты для $P_{отк}$, при этом очевидно, что области эффективности в большинстве случаев сохраняются, хоть и не являются столь большими, как для показателя P_0 .

Таблица 3.12 – Области эффективности 4-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю $P_{отк}$

λ	$P_{отк1} - P_{отк2}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
5	0,004	0,006	0,006	0,006	0,006	0,005	0,005	0,004
6	0,007	0,007	0,008	0,007	0,007	0,005	0,005	0,001
7	0,006	0,009	0,007	0,006	0,006	0,005	0,002	-0,003
8	0,009	0,011	0,006	0,008	0,004	0,003	0	-0,004
9	0,008	0,009	0,004	0,004	0,002	-0,002	-0,003	-0,011
10	0,006	0,006	0	0,002	-0,003	-0,007	-0,011	-0,017
11	0,003	0,009	-0,004	-0,003	-0,009	-0,011	-0,018	-0,021
12	0,008	0,006	-0,002	-0,004	-0,018	-0,017	-0,018	-0,028
13	0,009	0,005	-0,008	-0,008	-0,018	-0,022	-0,021	-0,036
14	0,013	0,005	-0,003	-0,013	-0,019	-0,022	-0,027	-0,037
15	0,017	0,011	0	-0,002	-0,013	-0,013	-0,021	-0,034
16	0,012	0,009	-0,003	-0,006	-0,015	-0,02	-0,026	-0,032
17	0,011	0,004	-0,003	-0,011	-0,026	-0,025	-0,028	-0,041
18	0,011	0,003	-0,008	-0,009	-0,017	-0,023	-0,029	-0,044
19	0,01	0,003	-0,007	-0,021	-0,022	-0,026	-0,034	-0,045
20	0,018	0,007	-0,004	-0,006	-0,021	-0,016	-0,026	-0,038
21	0	0,001	-0,006	-0,012	-0,022	-0,028	-0,032	-0,04
22	0,007	0,003	-0,007	-0,013	-0,019	-0,027	-0,029	-0,039
23	0,001	-0,003	-0,006	-0,011	-0,023	-0,021	-0,027	-0,039
24	0,01	0,006	-0,008	-0,012	-0,019	-0,022	-0,035	-0,045
25	-0,004	-0,004	-0,019	-0,02	-0,022	-0,032	-0,039	-0,047

На Рисунке 3.6 данные области представлены на графике.

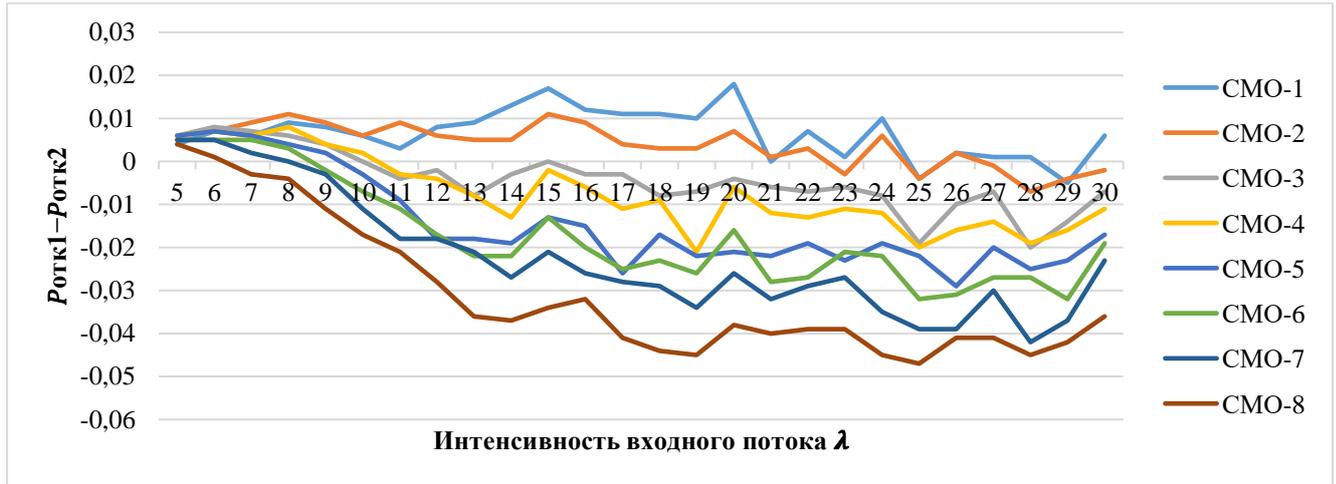


Рисунок 3.6 – Области эффективности 4-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю $P_{отк}$ (рассчитано и построено автором)

Кроме стационарных вероятностей состояний P_0 и $P_{отк}$, для 4-х канальной СМО также были исследованы показатели эффективности Q – относительная пропускная способность, A – абсолютная пропускная способность, \bar{k} – среднее количество занятых каналов.

В Таблице 3.13 представлена разница в относительной пропускной способности $Q_2 - Q_1$, или области параметров, при которых система с неэквивалентными каналами может быть эффективнее классической системы с каналами одинаковой производительности по показателю относительной пропускной способности Q . Очевидно, что данные результаты равны разнице в вероятностях отказа $P_{отк}$, ранее представленных в Таблице 3.12.

Таблица 3.13 – Области эффективности 4-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю Q

λ	$Q_2 - Q_1$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
5	0,004	0,006	0,006	0,006	0,006	0,005	0,005	0,004
6	0,007	0,007	0,008	0,007	0,007	0,005	0,005	0,001
7	0,006	0,009	0,007	0,006	0,006	0,005	0,002	-0,003
8	0,009	0,011	0,006	0,008	0,004	0,003	0	-0,004
9	0,008	0,009	0,004	0,004	0,002	-0,002	-0,003	-0,011
10	0,006	0,006	0	0,002	-0,003	-0,007	-0,011	-0,017

11	0,003	0,009	-0,004	-0,003	-0,009	-0,011	-0,018	-0,021
12	0,008	0,006	-0,002	-0,004	-0,018	-0,017	-0,018	-0,028
13	0,009	0,005	-0,008	-0,008	-0,018	-0,022	-0,021	-0,036
14	0,013	0,005	-0,003	-0,013	-0,019	-0,022	-0,027	-0,037
15	0,017	0,011	0	-0,002	-0,013	-0,013	-0,021	-0,034
16	0,012	0,009	-0,003	-0,006	-0,015	-0,02	-0,026	-0,032
17	0,011	0,004	-0,003	-0,011	-0,026	-0,025	-0,028	-0,041
18	0,011	0,003	-0,008	-0,009	-0,017	-0,023	-0,029	-0,044
19	0,01	0,003	-0,007	-0,021	-0,022	-0,026	-0,034	-0,045
20	0,018	0,007	-0,004	-0,006	-0,021	-0,016	-0,026	-0,038
21	0	0,001	-0,006	-0,012	-0,022	-0,028	-0,032	-0,04
22	0,007	0,003	-0,007	-0,013	-0,019	-0,027	-0,029	-0,039
23	0,001	-0,003	-0,006	-0,011	-0,023	-0,021	-0,027	-0,039
24	0,01	0,006	-0,008	-0,012	-0,019	-0,022	-0,035	-0,045
25	-0,004	-0,004	-0,019	-0,02	-0,022	-0,032	-0,039	-0,047

На Рисунке 3.7 представлена зависимость разницы в показателях $Q_2 - Q_1$ от интенсивности входного потока λ .

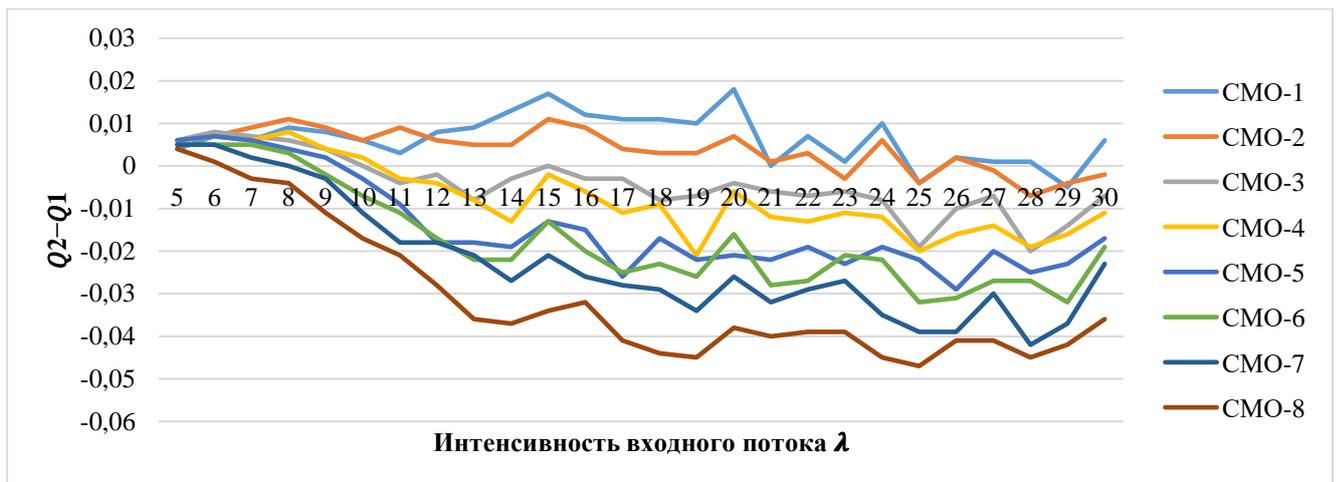


Рисунок 3.7 – Области эффективности 4-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю Q (рассчитано и построено автором)

В Таблице 3.14 представлена разница в абсолютной пропускной способности $A_2 - A_1$, или области параметров, при которых система с неэквивалентными каналами может быть эффективнее классической системы с каналами одинаковой производительности по показателю абсолютной пропускной способности A .

Таблица 3.14 – Области эффективности 4-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю A

λ	$A_2 - A_1$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
5	0,02	0,03	0,03	0,03	0,03	0,025	0,025	0,02
6	0,042	0,042	0,048	0,042	0,042	0,03	0,03	0,006
7	0,042	0,063	0,049	0,042	0,042	0,035	0,014	-0,021
8	0,072	0,088	0,048	0,064	0,032	0,024	0	-0,032
9	0,072	0,081	0,036	0,036	0,018	-0,018	-0,027	-0,099
10	0,06	0,06	0	0,02	-0,03	-0,07	-0,11	-0,17
11	0,033	0,099	-0,044	-0,033	-0,099	-0,121	-0,198	-0,231
12	0,096	0,072	-0,024	-0,048	-0,216	-0,204	-0,216	-0,336
13	0,117	0,065	-0,104	-0,104	-0,234	-0,286	-0,273	-0,468
14	0,182	0,07	-0,042	-0,182	-0,266	-0,308	-0,378	-0,518
15	0,255	0,165	0	-0,03	-0,195	-0,195	-0,315	-0,51
16	0,192	0,144	-0,048	-0,096	-0,24	-0,32	-0,416	-0,512
17	0,187	0,068	-0,051	-0,187	-0,442	-0,425	-0,476	-0,697
18	0,198	0,054	-0,144	-0,162	-0,306	-0,414	-0,522	-0,792
19	0,19	0,057	-0,133	-0,399	-0,418	-0,494	-0,646	-0,855
20	0,36	0,14	-0,08	-0,12	-0,42	-0,32	-0,52	-0,76
21	0	0,021	-0,126	-0,252	-0,462	-0,588	-0,672	-0,84
22	0,154	0,066	-0,154	-0,286	-0,418	-0,594	-0,638	-0,858
23	0,023	-0,069	-0,138	-0,253	-0,529	-0,483	-0,621	-0,897
24	0,24	0,144	-0,192	-0,288	-0,456	-0,528	-0,84	-1,08
25	-0,1	-0,1	-0,475	-0,5	-0,55	-0,8	-0,975	-1,175

На Рисунке 3.8 данные области представлены на графике.

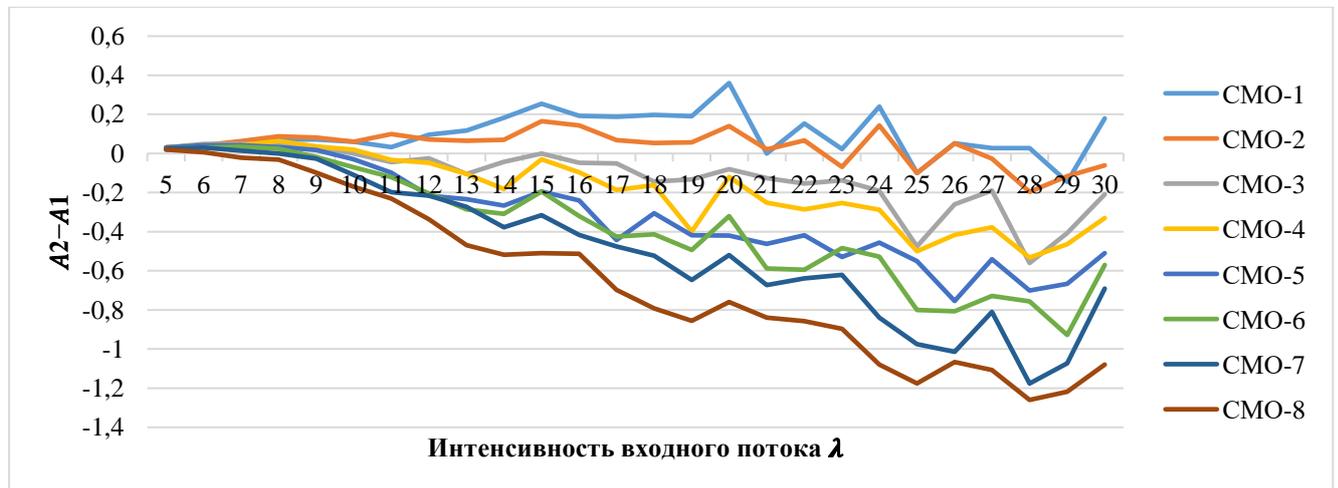


Рисунок 3.8 – Области эффективности 4-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю A (рассчитано и построено автором)

В Таблице 3.15 представлена разница в среднем количестве занятых каналов $\bar{k}_1 - \bar{k}_2$, или области параметров, при которых система с неэквивалентными

каналами может быть эффективнее классической системы с каналами одинаковой производительности по показателю среднего числа занятых каналов обслужива-
ния \bar{k} .

Таблица 3.15 – Области эффективности 4-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю \bar{k}

λ	$\bar{k}_1 - \bar{k}_2$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
5	0,163	0,207	0,216	0,237	0,233	0,233	0,217	0,174
6	0,164	0,205	0,195	0,212	0,195	0,192	0,169	0,115
7	0,16	0,193	0,162	0,174	0,146	0,139	0,11	0,049
8	0,149	0,174	0,124	0,129	0,091	0,081	0,048	-0,018
9	0,139	0,154	0,09	0,089	0,043	0,031	-0,005	-0,073
10	0,127	0,134	0,059	0,053	0,002	-0,012	-0,049	-0,117
11	0,118	0,118	0,036	0,026	-0,028	-0,044	-0,081	-0,147
12	0,101	0,095	0,009	-0,004	-0,059	-0,076	-0,113	-0,177
13	0,089	0,078	-0,008	-0,024	-0,079	-0,096	-0,132	-0,193
14	0,072	0,057	-0,027	-0,045	-0,1	-0,117	-0,152	-0,21
15	0,048	0,03	-0,052	-0,071	-0,124	-0,141	-0,175	-0,23
16	0,041	0,022	-0,056	-0,076	-0,128	-0,145	-0,177	-0,229
17	0,039	0,017	-0,057	-0,077	-0,126	-0,143	-0,174	-0,223
18	0,031	0,009	-0,061	-0,081	-0,128	-0,144	-0,174	-0,22
19	0,034	0,012	-0,054	-0,074	-0,12	-0,135	-0,163	-0,207
20	-0,004	-0,026	-0,088	-0,108	-0,151	-0,166	-0,193	-0,235
21	0,019	-0,003	-0,061	-0,08	-0,121	-0,136	-0,162	-0,201
22	0,004	-0,018	-0,072	-0,091	-0,13	-0,144	-0,169	-0,206
23	-0,002	-0,023	-0,074	-0,093	-0,129	-0,143	-0,167	-0,202
24	0,008	-0,012	-0,06	-0,078	-0,113	-0,126	-0,149	-0,182
25	0,041	0,021	-0,024	-0,041	-0,074	-0,087	-0,108	-0,14

На Рисунке 3.9 данные области представлены на графике.

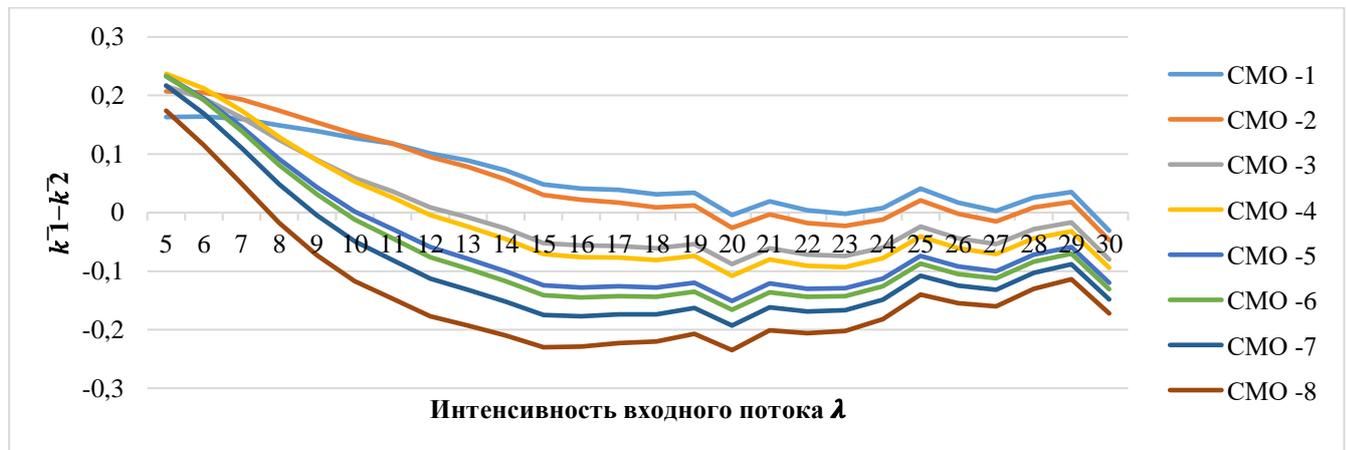


Рисунок 3.9 – Области эффективности 4-х канальной СМО с приборами различной производительности по показателю \bar{k} (рассчитано и построено автором)

Таким образом, по совокупности представленных материалов, представляется возможным заключить, что существуют области параметров, при которых системы массового обслуживания с каналами различной производительности в условиях управления потоком заявок могут быть существенно эффективнее классических систем, обладающих приборами одинаковой производительности. Данные области, как правило, в целом совпадают для всех показателей эффективности.

По показателям относительной и абсолютной пропускной способности, а также стационарной вероятности отказа $P_{\text{отк}}$ системы различаются незначительно, однако по показателю P_0 и среднему числу занятых каналов система с неэквивалентными приборами может значительно опережать классические системы. Данные области связаны либо со слабой загруженностью системы, либо с небольшой разницей в интенсивностях обслуживающих каналов.

Зависимость показателей эффективности систем с каналами различной производительности от интенсивностей приборов и нагрузки на систему заключается в следующем: в условиях управления потоком система с неэквивалентными каналами может быть эффективней классической системы при небольших значениях λ по сравнению с общей интенсивностью каналов либо при незначительной разнице между интенсивностями каналов. При слишком большой диспропорции в интенсивностях приборов системы с неэквивалентными каналами в большинстве случаев неэффективны.

3.2. Области эффективности в условиях неординарных потоков

Зачастую во многих реальных системах потоки носят неординарный характер (т. е. поступающие в систему заявки могут содержать 2 и более требований на обслуживание). В качестве элементарного примера СМО такого типа можно привести парикмахерскую, в которой мастера, в зависимости от компетенций, могут обладать различной производительностью, в то же время клиенты (то есть заявки) могут приходить как по одному, так и группами. Очевидно, что в данном случае с

прикладной точки зрения упрощения допустимы, а моделирование сложной системы со смешанными потоками нецелесообразно. Однако, к примеру, для компьютерных или телекоммуникационных систем, связанных с обработкой больших данных, требуется более высокая расчетная точность и понимание закономерностей работы СМО такого типа.

Несмотря на явный прикладной интерес, исследований, посвященных системам с неэквивалентными каналами, функционирующим в условиях смешанных потоков, по всей видимости, в научной литературе на текущий момент не представлено. В настоящем разделе представлены результаты вычислительных экспериментов, связанных с изучением некоторых функциональных особенностей и закономерностей поведения СМО такого типа.

Рассмотрим 2-х канальную СМО без функции накопления очереди, на вход которой поступает поток заявок интенсивности λ , $\lambda > 0$. Интенсивности обслуживания первого и второго приборов равны соответственно μ_1 и μ_2 , $\mu_1, \mu_2 > 0$ (если производительности устройств различны, будем полагать что $0 < \mu_1 < \mu_2$).

В условиях смешанного потока в систему могут поступать как одинарные, так и групповые заявки (в случае 2-х канальной системы – парные, состоящие из 2 требований). Введем параметр, характеризующий «смешанность» потока. Пусть P – вероятность того, что поступившая заявка – одинарная, соответственно $1 - P$ – вероятность того, что поступившая заявка – групповая. Таким образом, при $P = 0$ поток является групповым (парным), при $P = 1$ поток является ординарным.

При поступлении одинарной заявки в систему с каналами равной производительности она занимает любой из свободных каналов, если интенсивности приборов различны – она обслуживается наиболее «быстрым» свободным устройством. При поступлении в СМО парной заявки ее требования одновременно занимают 2 прибора (при этом, если производительности каналов различны, одно из требований по завершении обслуживания может покинуть систему раньше другой), если один или два канала системы заняты – парная заявка получает отказ в обслуживании и покидает систему.

Имитационная модель 2-х канальной системы, функционирующей в условиях неординарных потоков, представлена на Рисунке 3.10. Она состоит из ряда стандартных блоков для создания (source), задержки (delay, delay1), уничтожения (sink – sink4) и управления потоками заявок, функции и нескольких переменных.

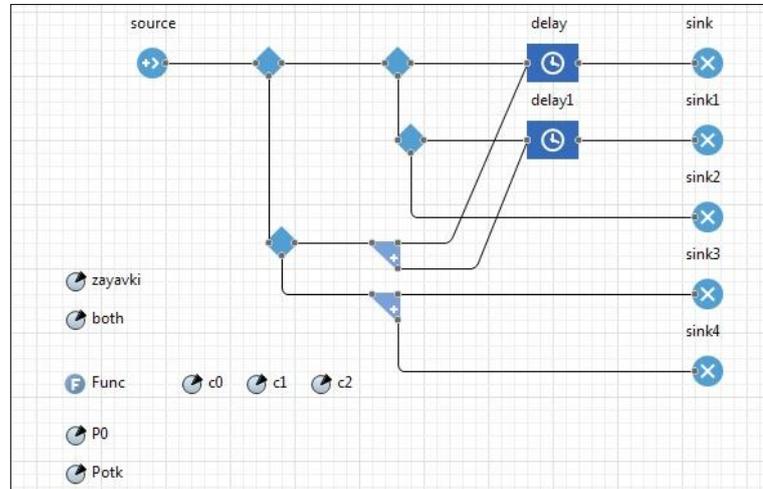


Рисунок 3.10 – Имитационная модель СМО

В качестве показателей эффективности рассматриваются P_0 – вероятность того, что система свободна, и $P_{\text{отк}}$ – вероятность отказа в обслуживании.

Параметры исследуемых моделей представлены в Таблице 3.16.

Таблица 3.16 – Параметры исследуемых моделей

		μ_1	μ_2
Каналы одинаковой производительности	СМО-0	5	5
Каналы различной производительности	СМО-1	4,5	5,5
	СМО-2	4	6
	СМО-3	3,5	6,5
	СМО-4	3	7
	СМО-5	2,5	7,5
	СМО-6	2	8
	СМО-7	1,5	8,5
	СМО-8	1	9

В рамках серии имитационных экспериментов проведен сравнительный анализ показателей эффективности классической системы, обладающей каналами одинаковой производительности $\mu_1 = \mu_2 = 5$ (строка «СМО-0»), и систем с неэквивалентными каналами при различных соотношениях интенсивностей приборов от $\mu_1 = 4,5$, $\mu_2 = 5,5$ (строка «СМО-1») до $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 9$ (строка «СМО-8»).

Суммарная производительность каналов во всех рассматриваемых системах равна $\mu_1 + \mu_2 = 10$.

3.2.1. Групповой поток

Рассмотрим результаты сравнительного анализа функциональных характеристик системы массового обслуживания при $P = 0$ (поток парных заявок). В Таблице 3.17 представлена разница в показателях эффективности $p_{02} - p_{01}$, где p_{02} – вероятность того, что система с неэквивалентными каналами свободна, p_{01} – вероятность того, что система с каналами одинаковой производительности свободна. Таким образом, отрицательные значения ячеек в данной таблице указывают на то, что система с неэквивалентными каналами в данных условиях менее эффективна, чем классическая СМО. Очевидно, что при групповом потоке разница в показателях $p_{отк}$ будет та же.

Таблица 3.17 – Разница в показателях p_0 при групповом потоке ($P = 0$)

λ	$p_{02} - p_{01}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	-0,001	-0,008	-0,021	-0,041	-0,074	-0,118	-0,176	-0,273
3	-0,003	-0,015	-0,032	-0,059	-0,092	-0,139	-0,195	-0,274
5	-0,003	-0,01	-0,025	-0,048	-0,08	-0,126	-0,171	-0,23
7	0	-0,008	-0,019	-0,045	-0,07	-0,105	-0,147	-0,198
9	0,002	-0,008	-0,022	-0,035	-0,063	-0,094	-0,127	-0,171
11	0	-0,01	-0,022	-0,036	-0,057	-0,079	-0,115	-0,147
13	0	-0,009	-0,02	-0,033	-0,054	-0,076	-0,105	-0,133
15	0,001	-0,008	-0,016	-0,029	-0,045	-0,071	-0,092	-0,119

По результатам анализа таблицы представляется возможным сформулировать вывод о том, что в условиях группового потока СМО с неэквивалентными каналами являются менее эффективными, чем классические системы с приборами одинаковой производительности.

Увеличение диспропорции в интенсивностях обслуживающих устройств приводит к значительному ухудшению показателей эффективности. К примеру, рассмотрим результаты при $\lambda = 5$. При незначительной диспропорции в интен-

сивностях каналов разница в показателях равна $p_{02} - p_{01} = -0,003$ (См. столбец «СМО-1»), что сравнимо с погрешностью методов имитационного моделирования. В то же время при увеличении диспропорции в интенсивностях обслуживающих устройств до $\mu_1 = 1, \mu_2 = 9$ разница в показателях составляет уже $p_{02} - p_{01} = -0,23$ (См. столбец «СМО-8»). Такое поведение системы наблюдается на всем диапазоне нагрузки от $\lambda = 1$ до $\lambda = 15$. Как видно по материалам таблицы, наихудшие результаты системы с неэквивалентными каналами демонстрируют при существенной диспропорции в интенсивностях каналов и небольшой нагрузке на систему. Значительное ухудшение показателей эффективности при увеличении диспропорции каналов связано с тем, что время обслуживания групповой заявки становится равным времени обслуживания требования наиболее «медленным» прибором.

Таким образом, в условиях групповых потоков использование систем с каналами различной производительности представляется нецелесообразным, однако при проектировании СМО, где неэквивалентность каналов имеет место, это обстоятельство должно быть учтено.

3.2.2. Смешанный поток

Рассмотрим СМО, функционирующие в условиях смешанных потоков. Параметры исследуемых моделей представлены в Таблице 3.16. В Таблицах 3.18 – 3.21 представлена разница в показателях эффективности $p_{02} - p_{01}$ при смешанном потоке от $P = 0,1$ до $P = 0,4$.

Таблица 3.18 – Разница в показателях p_0 при смешанном потоке ($P = 0,1$)

λ	$p_{02} - p_{01}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	0,001	-0,003	-0,012	-0,03	-0,058	-0,099	-0,157	-0,252
3	-0,001	-0,01	-0,024	-0,049	-0,083	-0,133	-0,185	-0,271
5	-0,003	-0,012	-0,025	-0,045	-0,075	-0,114	-0,16	-0,222
7	0,001	-0,008	-0,023	-0,04	-0,066	-0,095	-0,139	-0,189
9	-0,001	-0,006	-0,019	-0,034	-0,057	-0,086	-0,12	-0,163
11	-0,004	-0,006	-0,018	-0,028	-0,048	-0,077	-0,106	-0,145
13	0,001	-0,004	-0,014	-0,027	-0,047	-0,065	-0,096	-0,124
15	0,003	-0,001	-0,007	-0,02	-0,039	-0,056	-0,085	-0,104

В Таблице 3.19 представлена разница в показателях эффективности $p_{02} - p_{01}$ при смешанном потоке $P = 0,2$.

Таблица 3.19 – Разница в показателях p_0 при смешанном потоке ($P = 0,2$)

λ	$p_{02} - p_{01}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	-0,001	-0,004	-0,014	-0,029	-0,051	-0,087	-0,146	-0,235
3	0	-0,008	-0,019	-0,038	-0,072	-0,114	-0,17	-0,252
5	0,001	-0,007	-0,021	-0,038	-0,065	-0,099	-0,149	-0,215
7	0,004	-0,002	-0,016	-0,031	-0,055	-0,083	-0,129	-0,176
9	-0,003	-0,008	-0,016	-0,027	-0,049	-0,076	-0,109	-0,154
11	0	-0,002	-0,012	-0,024	-0,039	-0,067	-0,093	-0,131
13	0	-0,004	-0,009	-0,022	-0,037	-0,056	-0,083	-0,113
15	0,005	0,001	-0,007	-0,018	-0,031	-0,048	-0,07	-0,097

В Таблице 3.20 представлена разница в показателях эффективности $p_{02} - p_{01}$ при смешанном потоке $P = 0,3$.

Таблица 3.20 – Разница в показателях p_0 при смешанном потоке ($P = 0,3$)

λ	$p_{02} - p_{01}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	-0,001	-0,003	-0,012	-0,023	-0,044	-0,078	-0,135	-0,219
3	0	-0,007	-0,012	-0,031	-0,056	-0,098	-0,153	-0,238
5	0,005	-0,001	-0,011	-0,029	-0,052	-0,089	-0,139	-0,204
7	0,004	0,003	-0,01	-0,028	-0,044	-0,079	-0,12	-0,17
9	-0,004	-0,006	-0,012	-0,023	-0,044	-0,071	-0,102	-0,14
11	0,003	-0,004	-0,009	-0,02	-0,039	-0,059	-0,088	-0,12
13	0,001	-0,003	-0,007	-0,015	-0,035	-0,05	-0,07	-0,1
15	0,001	-0,002	-0,01	-0,02	-0,028	-0,044	-0,067	-0,093

В Таблице 3.21 представлена разница в показателях эффективности $p_{02} - p_{01}$ при смешанном потоке $P = 0,4$.

Таблица 3.21 – Разница в показателях p_0 при смешанном потоке ($P = 0,4$)

λ	$p_{02} - p_{01}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	0,007	0,004	-0,002	-0,015	-0,034	-0,062	-0,112	-0,19
3	0,003	-0,004	-0,011	-0,027	-0,052	-0,092	-0,147	-0,229
5	0,01	0,008	-0,001	-0,019	-0,04	-0,075	-0,124	-0,189
7	0	0	-0,008	-0,026	-0,044	-0,07	-0,11	-0,159
9	-0,003	-0,006	-0,012	-0,024	-0,043	-0,066	-0,099	-0,138
11	0,002	-0,001	-0,009	-0,019	-0,033	-0,057	-0,084	-0,115
13	0,001	0	-0,004	-0,013	-0,028	-0,044	-0,069	-0,096
15	0,002	0,002	-0,006	-0,015	-0,026	-0,04	-0,06	-0,084

По результатам вычислительных экспериментов с моделями 2-х канальных систем установлено, что положительные значения $p_{02} - p_{01}$ (области параметров, при которых СМО с неэквивалентными каналами может быть эффективнее классической системы с приборами одинаковой производительности по показателю p_0), наиболее характерно появляются при $P \geq 0,5$, то есть когда вероятность поступления в систему одинарной заявки равна или превышает вероятность поступления парной заявки.

В Таблице 3.22 представлены результаты вычислительных экспериментов при смешанном потоке, характеризующемся равной вероятностью поступления одинарных и парных заявок $P = 0,5$.

Таблица 3.22 – Разница в показателях p_0 при смешанном потоке ($P = 0,5$)

λ	$p_{02} - p_{01}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	0,005	0,004	-0,002	-0,011	-0,026	-0,05	-0,095	-0,169
3	0,005	0,002	-0,002	-0,015	-0,038	-0,071	-0,125	-0,205
5	0,006	0,008	-0,002	-0,016	-0,037	-0,071	-0,116	-0,179
7	0,007	0,007	0	-0,016	-0,035	-0,062	-0,1	-0,148
9	0,003	0,001	-0,004	-0,018	-0,034	-0,059	-0,087	-0,126
11	0,009	0,003	-0,004	-0,015	-0,027	-0,047	-0,073	-0,11
13	0	0,001	-0,002	-0,013	-0,026	-0,04	-0,063	-0,087
15	0	0,003	-0,002	-0,011	-0,019	-0,035	-0,054	-0,077

Материалы таблицы демонстрируют, что при $P = 0,5$ система с каналами различной производительности в целом проявляет себя хуже классической СМО, однако при небольшой диспропорции в интенсивностях обслуживающих устройств (См. столбцы «СМО-1» и «СМО-2») имеются некоторые положительные области, в которых система с неэквивалентными каналами может быть эффективнее системы с одинаковыми приборами.

К примеру, при интенсивности входного потока $\lambda = 7$ системы с каналами $\mu_1 = 4,5, \mu_2 = 5,5$ и $\mu_1 = 4, \mu_2 = 6$ по показателю p_0 на 0,07 превышают аналогичный показатель СМО с приборами одинаковой интенсивности. Увеличение диспропорции в интенсивностях обслуживающих устройствах приводит к ухудшению показателей системы с неэквивалентными каналами.

В Таблице 3.23 представлена разница в показателях эффективности $p_{02} - p_{01}$ при смешанном потоке $P = 0,6$.

Таблица 3.23 – Разница в показателях p_0 при смешанном потоке ($P = 0,6$)

λ	$p_{02} - p_{01}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	0,008	0,009	0,006	-0,001	-0,014	-0,033	-0,072	-0,139
3	0,002	0,002	-0,001	-0,011	-0,031	-0,064	-0,116	-0,193
5	0,002	0,003	-0,003	-0,016	-0,035	-0,064	-0,107	-0,175
7	0,004	0,003	0	-0,01	-0,034	-0,061	-0,094	-0,143
9	0,005	0,003	-0,001	-0,013	-0,026	-0,048	-0,076	-0,12
11	0,008	0,006	0,003	-0,01	-0,021	-0,042	-0,069	-0,1
13	0,003	0,001	-0,001	-0,009	-0,023	-0,037	-0,063	-0,085
15	0,002	0,002	-0,005	-0,009	-0,015	-0,034	-0,048	-0,074

В Таблице 3.24 представлена разница в показателях эффективности $p_{02} - p_{01}$ при смешанном потоке $P = 0,7$.

Таблица 3.24 – Разница в показателях p_0 при смешанном потоке ($P = 0,7$)

λ	$p_{02} - p_{01}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	0,009	0,012	0,013	0,007	-0,001	-0,018	-0,047	-0,103
3	0,01	0,016	0,013	0,004	-0,012	-0,045	-0,091	-0,165
5	0,012	0,01	0,006	-0,002	-0,019	-0,051	-0,087	-0,149
7	0,007	0,007	0,001	-0,01	-0,025	-0,048	-0,084	-0,139
9	0,007	0,005	0,001	-0,012	-0,023	-0,045	-0,074	-0,116
11	-0,002	-0,002	-0,006	-0,011	-0,027	-0,045	-0,068	-0,098
13	0	0,001	-0,002	-0,012	-0,019	-0,034	-0,058	-0,082
15	0,003	0,001	-0,001	-0,012	-0,016	-0,032	-0,05	-0,071

По результатам анализа материалов Таблицы 3.24 видно, что при $P = 0,7$ области эффективности системы с неэквивалентными каналами выражены более характерно.

К примеру, при $\lambda = 3$, $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 6$ (См. столбец «СМО-2») система с каналами различной производительности по показателю p_0 на 0,016 превышает аналогичный показатель классической СМО. Несмотря на кажущуюся незначительность такой разницы, для систем, к примеру, обрабатывающих большие данные, она может дать ощутимое преимущество.

В Таблице 3.25 представлена разница в показателях эффективности $p_{02} - p_{01}$ при смешанном потоке $P = 0,8$.

Таблица 3.25 – Разница в показателях p_0 при смешанном потоке ($P = 0,8$)

λ	$p_{02} - p_{01}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	0,007	0,013	0,016	0,012	0,008	-0,003	-0,026	-0,072
3	0,011	0,019	0,017	0,008	-0,002	-0,027	-0,07	-0,14
5	0,012	0,011	0,012	0,003	-0,012	-0,04	-0,075	-0,139
7	0,004	0,007	0,006	-0,004	-0,018	-0,043	-0,074	-0,128
9	0,001	-0,001	0	-0,009	-0,025	-0,044	-0,069	-0,113
11	-0,001	0	-0,001	-0,015	-0,028	-0,044	-0,064	-0,089
13	0,004	0,002	-0,008	-0,012	-0,021	-0,034	-0,053	-0,082
15	0,005	0	0	-0,008	-0,016	-0,029	-0,044	-0,068

В Таблице 3.26 представлена разница в показателях эффективности $p_{02} - p_{01}$ при смешанном потоке $P = 0,9$.

Таблица 3.26 – Разница в показателях p_0 при смешанном потоке ($P = 0,9$)

λ	$p_{02} - p_{01}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	0,007	0,015	0,02	0,02	0,019	0,012	-0,004	-0,04
3	0,003	0,01	0,013	0,01	-0,002	-0,019	-0,054	-0,115
5	0,008	0,011	0,013	0,009	-0,006	-0,032	-0,074	-0,135
7	0,005	0,009	0,012	-0,002	-0,017	-0,039	-0,069	-0,116
9	0,007	0,004	-0,002	-0,003	-0,018	-0,033	-0,063	-0,105
11	-0,002	-0,004	-0,004	-0,009	-0,021	-0,034	-0,056	-0,088
13	0,004	0,004	0,002	-0,004	-0,013	-0,027	-0,046	-0,07
15	0,001	0,002	-0,002	-0,006	-0,012	-0,027	-0,043	-0,065

Значительную часть входного потока в данном случае составляют одинарные заявки. Видно, что при $P = 0,9$ области эффективности систем с каналами различной производительности являются значительно более выраженными, чем в ранее рассмотренных примерах. Так, при $\lambda = 1$ разница в показателях $p_{02} - p_{01}$ достигает 0,02 (См. столбец «СМО-4»)

Рассмотрим результаты имитационных экспериментов при $P = 1$, представленные в Таблице 3.27. В данном случае поток является ординарным.

Таблица 3.27 – Разница в показателях p_0 при смешанном потоке ($P = 1$)

λ	$p_{02} - p_{01}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	0,01	0,02	0,026	0,03	0,033	0,034	0,031	0,013
3	0,011	0,018	0,022	0,02	0,016	0,001	-0,031	-0,087
5	0,011	0,016	0,016	0,016	0,002	-0,02	-0,056	-0,12
7	0,01	0,013	0,013	0	-0,007	-0,027	-0,059	-0,112
9	0,008	0,005	0,007	-0,004	-0,015	-0,031	-0,062	-0,1
11	0,004	-0,001	-0,001	-0,008	-0,02	-0,033	-0,059	-0,089
13	-0,001	0,002	-0,001	-0,01	-0,018	-0,03	-0,05	-0,072
15	0,005	0,003	0,001	-0,006	-0,014	-0,024	-0,038	-0,06

По материалам таблицы видно, что при ординарном потоке области эффективности СМО с каналами различной производительности значительно расширились. Также заметим, что представленные области в целом совпадают с результатами, ранее рассмотренными на примере 3-х и 4-х канальных СМО, функционирующих при пуассоновских потоках.

Стоит отметить, что в условиях смешанного потока системы с неэквивалентными каналами могут быть эффективнее классических СМО также по показателю $p_{отк}$. Для параметров систем, представленных в Таблице 3.16, разница в значениях $p_{отк1} - p_{отк2}$ была не столь существенна, как в ранее рассмотренных примерах по показателю p_0 , и в некоторых моделях достигала 0,012. С учетом этого, в рамках настоящей работы ограничимся рассмотрением результатов при $P > 0,5$.

В Таблице 3.28 представлена разница в показателях эффективности $p_{отк1} - p_{отк2}$ при смешанном потоке $P = 0,5$.

Таблица 3.28 – Разница в показателях $p_{отк}$ при смешанном потоке ($P = 0,5$)

λ	$p_{отк1} - p_{отк2}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	0,001	-0,001	-0,004	-0,008	-0,014	-0,026	-0,049	-0,086
3	0,002	0,001	0,001	-0,006	-0,016	-0,03	-0,06	-0,1
5	0,006	0,006	0,002	-0,005	-0,014	-0,03	-0,052	-0,084
7	0,004	0,006	-0,001	-0,01	-0,018	-0,031	-0,053	-0,075
9	0,002	0,001	-0,004	-0,012	-0,018	-0,033	-0,046	-0,065
11	0,007	0,001	-0,003	-0,012	-0,014	-0,025	-0,036	-0,056
13	0	0,002	0	-0,006	-0,013	-0,022	-0,03	-0,042
15	-0,003	0,001	0,001	-0,005	-0,01	-0,017	-0,027	-0,04

В Таблице 3.29 представлена разница в показателях эффективности $p_{отк1} - p_{отк2}$ при смешанном потоке $P = 0,6$.

Таблица 3.29 – Разница в показателях $p_{отк}$ при смешанном потоке ($P = 0,6$)

λ	$p_{отк1} - p_{отк2}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	0,004	0,005	0,004	0	-0,004	-0,013	-0,029	-0,057
3	-0,001	-0,001	-0,003	-0,007	-0,016	-0,028	-0,052	-0,083
5	0	-0,001	-0,003	-0,008	-0,017	-0,027	-0,045	-0,075
7	0,001	0,003	-0,001	-0,005	-0,015	-0,027	-0,039	-0,064
9	0,002	0,003	-0,001	-0,009	-0,014	-0,022	-0,036	-0,054
11	0,007	0,006	0,002	-0,005	-0,011	-0,023	-0,03	-0,047
13	0,004	0,004	0,003	-0,005	-0,012	-0,016	-0,03	-0,039
15	0,005	0,003	0,002	0,002	-0,004	-0,015	-0,021	-0,035

В Таблице 3.30 представлена разница в показателях эффективности $p_{отк1} - p_{отк2}$ при смешанном потоке $P = 0,7$.

Таблица 3.30 – Разница в показателях $p_{отк}$ при смешанном потоке ($P = 0,7$)

λ	$p_{отк1} - p_{отк2}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	0,002	0,003	0,004	0,002	-0,001	-0,007	-0,016	-0,034
3	0,002	0,004	0,003	-0,002	-0,007	-0,018	-0,034	-0,062
5	0,002	0	0,001	-0,001	-0,007	-0,019	-0,033	-0,059
7	0,008	0,009	0,003	-0,004	-0,008	-0,017	-0,035	-0,058
9	0,003	0,002	-0,004	-0,009	-0,013	-0,023	-0,034	-0,052
11	-0,004	-0,007	-0,007	-0,007	-0,017	-0,026	-0,034	-0,048
13	0	0,005	-0,001	-0,009	-0,006	-0,015	-0,029	-0,041
15	0,001	0,001	0,004	-0,005	-0,006	-0,013	-0,021	-0,035

В Таблице 3.31 представлена разница в показателях эффективности $p_{отк1} - p_{отк2}$ при смешанном потоке $P = 0,8$.

Таблица 3.31 – Разница в показателях $p_{отк}$ при смешанном потоке ($P = 0,8$)

λ	$p_{отк1} - p_{отк2}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	0,002	0,004	0,005	0,004	0,002	-0,001	-0,007	-0,017
3	0,003	0,006	0,006	0,003	-0,003	-0,01	-0,022	-0,044
5	0,007	0,003	0,005	0,003	-0,004	-0,013	-0,027	-0,049
7	0,004	0,006	0,005	0	-0,007	-0,015	-0,031	-0,049
9	-0,003	-0,005	-0,003	-0,007	-0,015	-0,02	-0,032	-0,053
11	-0,006	-0,006	-0,005	-0,012	-0,019	-0,027	-0,036	-0,049
13	-0,001	0	-0,01	-0,012	-0,016	-0,022	-0,032	-0,046
15	0,004	0,001	0,006	0,001	-0,003	-0,014	-0,016	-0,029

В Таблице 3.32 представлена разница в показателях эффективности $p_{отк1} - p_{отк2}$ при смешанном потоке $P = 0,9$.

Таблица 3.32 – Разница в показателях $p_{отк}$ при смешанном потоке ($P = 0,9$)

λ	$p_{отк1} - p_{отк2}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	-0,001	0,001	0,002	0,001	0,001	0	-0,003	-0,008
3	-0,002	-0,002	0	0	-0,001	-0,006	-0,015	-0,033
5	0,002	0,003	0,005	0,002	-0,004	-0,009	-0,025	-0,048
7	0,004	0,006	0,007	-0,001	-0,007	-0,015	-0,027	-0,046
9	0,006	0,004	0,001	0,002	-0,006	-0,013	-0,029	-0,047
11	-0,006	-0,007	-0,007	-0,007	-0,012	-0,018	-0,029	-0,045
13	0,003	0,003	0,001	-0,005	-0,009	-0,013	-0,024	-0,037
15	0,003	0,004	-0,001	-0,004	-0,006	-0,016	-0,024	-0,04

В Таблице 3.33 представлена разница в показателях эффективности $p_{отк1} - p_{отк2}$ при смешанном потоке $P = 1$.

Таблица 3.33 – Разница в показателях $p_{отк}$ при смешанном потоке ($P = 1$)

λ	$p_{отк1} - p_{отк2}$							
	СМО-1	СМО-2	СМО-3	СМО-4	СМО-5	СМО-6	СМО-7	СМО-8
1	0	0,001	0,002	0,003	0,003	0,003	0,004	0,001
3	0,005	0,006	0,007	0,005	0,004	0,003	-0,005	-0,02
5	0,004	0,007	0,004	0,004	0	-0,007	-0,016	-0,04
7	0,009	0,011	0,009	0,002	-0,002	-0,009	-0,019	-0,042
9	0,006	0,006	0,006	0,001	-0,004	-0,013	-0,028	-0,046
11	0,004	0,001	0,002	-0,002	-0,006	-0,015	-0,031	-0,044
13	0	0	0,001	-0,009	-0,012	-0,016	-0,03	-0,036
15	0,008	0,005	0,006	-0,002	-0,005	-0,014	-0,023	-0,034

Таким образом, в целом анализируя результаты вычислительных экспериментов, представленные в таблицах, видится возможным сформулировать вывод о существовании областей параметров, при которых системы с неэквивалентными каналами могут быть существенно эффективнее систем с приборами одинаковой интенсивности в условиях смешанного потока.

Данные области эффективности в значительной степени зависят от характера «смешанности» потока и преимущественно проявляются в условиях более высокой вероятности поступления одинарных заявок, чем групповых.

С учетом продемонстрированных результатов также стоит отметить, что изучение систем такого типа представляется достаточно перспективным направлением исследований по теории массового обслуживания.

3.3. Разделение многоканальной системы на независимые приборы

В данном разделе представлен ряд результатов вычислительных экспериментов, связанных с вопросами влияния разделения многоканальной системы массового обслуживания на независимые одноканальные системы. В существующей в настоящее время научной литературе данная задача не рассматривалась, при этом она представляет немалый теоретический и прикладной интерес: вопросы «системного» и «раздельного» функционирования приборов встречаются в реальных

системах и процессах повсеместно, в том числе в рамках, к примеру, специализации обслуживающих устройств.

Применительно к классическим моделям систем массового обслуживания, обладающим приборами с одинаковыми функциональными характеристиками, задача схожего класса рассмотрены в [104]. В указанной работе на примере 2-х канальной СМО продемонстрировано, что в условиях одинаковой интенсивности потока обслуживания разделение каналов приводит к ухудшению показателей эффективности системы. В статье [105] представлен вывод о том, что разделение каналов при увеличении интенсивности потока обслуживания имеет смысл только для СМО в режиме работы, близком к критическому.

Стоит отметить, что наличие каналов различной производительности может значительно увеличить влияние разделения приборов обслуживания на показатели эффективности системы.

Рассмотрим систему массового обслуживания вида $M/M/n$, на вход которой поступает пуассоновский поток заявок интенсивности λ , $\lambda > 0$. Система состоит из $n, n > 0$ каналов различной производительности, причем $0 < \mu_1 < \mu_2 \dots < \mu_n$.

Обозначим суммарную интенсивность обслуживающих устройств через

$$M = \sum_{i=1}^n \mu_i, \quad (3.1)$$

а величину нагрузки на систему через

$$\gamma = \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^n \mu_i} = \lambda M^{-1} \quad (3.2)$$

Представим, что данную систему разделили на n независимых одноканальных систем, на вход каждой из которых поступает пуассоновский поток интенсивностью $\frac{\lambda}{n}$. Суммарная интенсивность обслуживающих устройств n одноканальных систем также равна M , а величины нагрузки на системы равны соответственно $\gamma_1 = \frac{\lambda}{n\mu_1}, \dots, \gamma_n = \frac{\lambda}{n\mu_n}$. Проанализируем, каким образом разделение каналов окажет влияние на показатели эффективности системы.

В качестве схемы управления потоками для многоканальной системы будем использовать алгоритм с приоритетом наиболее «быстрого» канала, как наиболее эффективный для систем без функции накопления очереди.

В качестве простейшего примера рассмотрим модель 2-х канальной СМО с отказами. На Рисунке 3.11 представлены графы состояний 2-х канальной СМО и 2 независимых одноканальных систем.

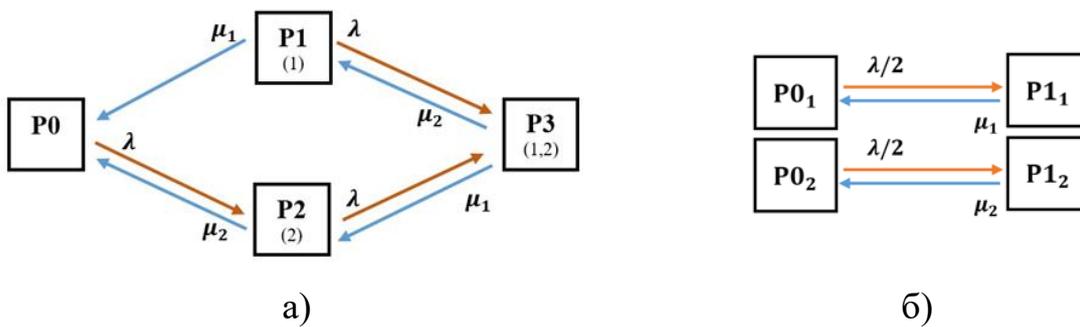


Рисунок 3.11 – Графы состояний 2-х канальной СМО (а) и 2-х независимых одноканальных СМО (б) (построено автором)

Представленная на рисунке 2-х канальная система имеет 4 возможных состояния – $P_0 \dots P_3$, где P_0 – вероятность состояния, при котором система свободна, P_3 – вероятность состояния, при котором оба канала системы заняты (очевидно,

но, что это также вероятность отказа в обслуживании). Интенсивность обслуживания первого и второго каналов равны соответственно μ_1 и μ_2 , причем $0 < \mu_1 < \mu_2$, интенсивность входного потока – λ . В одноканальных СМО производительность прибора в первой системе – μ_1 , во второй системе – μ_2 , интенсивность входного потока для обеих СМО равна $\frac{\lambda}{2}$.

Системы уравнений Колмогорова для вероятностей состояний СМО при управлении потоком с приоритетом канала наибольшей производительности были представлены ранее, поэтому в рамках настоящего раздела мы их повторно приводить не будем, ограничившись лишь известными выражениями для одноканальных систем.

Стационарные вероятности состояний для независимых одноканальных систем, представленных на Рисунке 3.11, вычисляются по формулам:

$$P0_1 = \frac{2\mu_1}{2\mu_1 + \lambda}, P1_1 = \frac{\lambda}{2\mu_1 + \lambda}; \quad P0_2 = \frac{2\mu_2}{2\mu_2 + \lambda}, P1_2 = \frac{\lambda}{2\mu_2 + \lambda} \quad (3.3)$$

Для одноканальных СМО с отказами относительная пропускная способность Q равна величине $P0_1$ и $P0_2$ соответственно для первого и второго канала, а абсолютная пропускная способность A равна соответственно $P0_1 \frac{\lambda}{2}$ и $P0_2 \frac{\lambda}{2}$.

Для проведения сравнительного анализа показателей эффективности 2-х канальной системы с приборами различной производительности и показателей эффективности при разделении данной системы на независимые одноканальные СМО проведен комплекс вычислительных экспериментов, в ходе которых варьировались соотношения интенсивностей каналов $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ и величина общей нагрузки на систему: $\gamma < 1$ (система «недогружена»), $\gamma = 1$ (система «загружена равномерно»), $\gamma > 1$ (система «перегружена»).

Результаты представлены в Таблице 3.34. В ячейках блока «Разделенные каналы» верхнее значение относится к первой одноканальной СМО с интенсивностью μ_1 , нижнее значение – ко второй одноканальной СМО с интенсивностью μ_2 .

Таблица 3.34 – Результаты вычислительных экспериментов с 2-х канальной и 2 одноканальными СМО

λ	μ_1	μ_2	Многоканальная СМО				Одноканальные СМО			
			P_0	$P_{отк}$	Q	A	P_0	$P_{отк}$	Q	A
$\gamma < 1$ (система недогружена)										
10	8	12	0,416	0,195	0,805	8,05	0,615 0,706	0,385 0,294	0,615 0,706	3,075 3,530
10	6	14	0,412	0,196	0,804	8,04	0,545 0,737	0,455 0,263	0,545 0,737	2,725 3,685
10	4	16	0,379	0,207	0,793	7,93	0,444 0,762	0,556 0,238	0,444 0,762	2,220 3,810
$\gamma = 1$ (система загружена равномерно)										
10	4	6	0,204	0,398	0,602	6,02	0,444 0,545	0,556 0,455	0,444 0,545	2,220 2,725
10	3	7	0,195	0,402	0,598	5,98	0,375 0,583	0,625 0,417	0,375 0,583	1,875 2,915
10	2	8	0,167	0,417	0,583	5,83	0,286 0,615	0,714 0,385	0,286 0,615	1,43 3,075
$\gamma > 1$ (система перегружена)										
10	2,5	3,5	0,102	0,561	0,439	4,39	0,333 0,412	0,667 0,588	0,333 0,412	1,665 2,06
10	2	4	0,098	0,564	0,436	4,36	0,286 0,444	0,714 0,556	0,286 0,444	1,43 2,22
10	1,5	4,5	0,087	0,571	0,429	4,29	0,231 0,474	0,769 0,526	0,231 0,474	1,155 2,37

На Рисунке 3.12 продемонстрирована разница в величинах абсолютной пропускной способности в 2-х канальных СМО и суммарной абсолютной пропускной способности в 2 независимых одноканальных СМО, параметры которых приведены в Таблице 3.34.

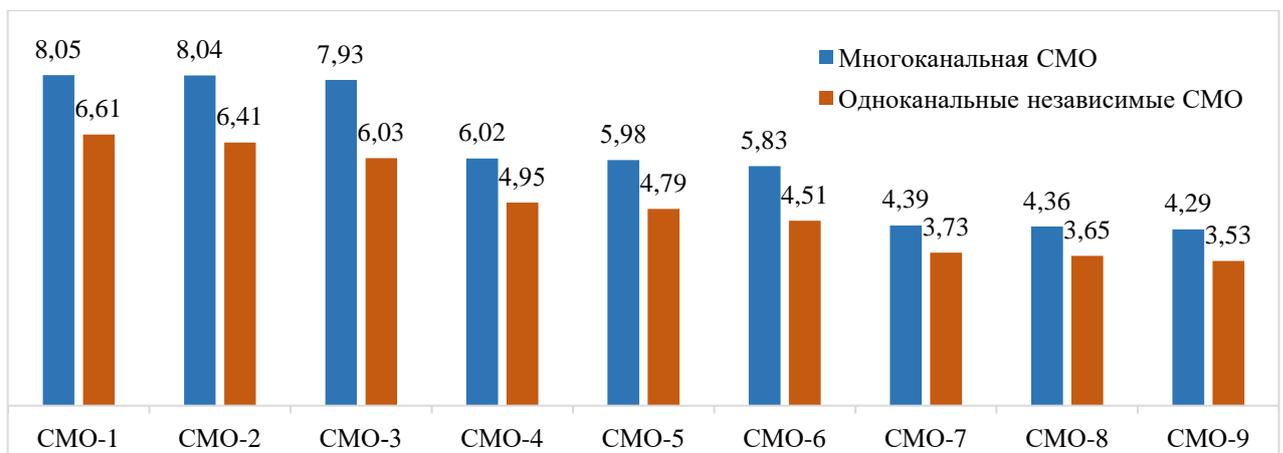


Рисунок 3.12 – Абсолютная пропускная способность 2-х канальной СМО и суммарная пропускная способность 2 независимых одноканальных СМО (рассчитано и построено автором)

По результатам анализа таблицы и диаграммы представляется возможным сформулировать следующий вывод: разделение каналов различной производительности ухудшает показатели эффективности системы. Иными словами, в условиях эффективного управления потоком заявок система с каналами различной производительности работает лучше, чем ее каналы по отдельности.

К примеру, рассмотрим показатели системы при $\lambda = 10, \mu_1 = 8, \mu_2 = 12$ (первая строка Таблицы 3.34). Величина абсолютной пропускной способности в случае системы из двух каналов ($A = 8,05$) превышает суммарную величину абсолютной пропускной способности двух одноканальных систем ($A_1 + A_2 = 6,605$). Таким образом, при разделении каналов по показателю абсолютной пропускной способности система теряет 17,95 %. Одновременно с этим, увеличение диспропорции между интенсивностями каналов приводит к усилению такого эффекта. К примеру, если при разделении каналов в системе с $\mu_1 = 8, \mu_2 = 12$ (первая строка Таблицы 3.34) по показателю абсолютной пропускной способности система теряет 17,95%, то для той же величины интенсивности входного потока при каналах $\mu_1 = 4, \mu_2 = 16$ (3 строка Таблицы 3.34) система теряет 23,96%.

Материалы представленной таблицы и диаграммы также демонстрируют, что снижение эффективности функционирования СМО при разделении каналов происходит и при других вариантах нагрузки на систему ($\gamma = 1, \gamma > 1$).

Такие результаты объясняются тем, что в многоканальной системе имеется возможность задействования свободного прибора. Иными словами, при разделении системы на две независимые одноканальные СМО значительно увеличивается вероятность отказа в обслуживании.

Рассмотрим модель 3-х канальной системы. На Рисунке 3.13 представлены графы состояний 3-х канальной системы при управлении потоком заявок с приоритетом наиболее «быстрого» свободного прибора и графы состояний 3 независимых одноканальных СМО.

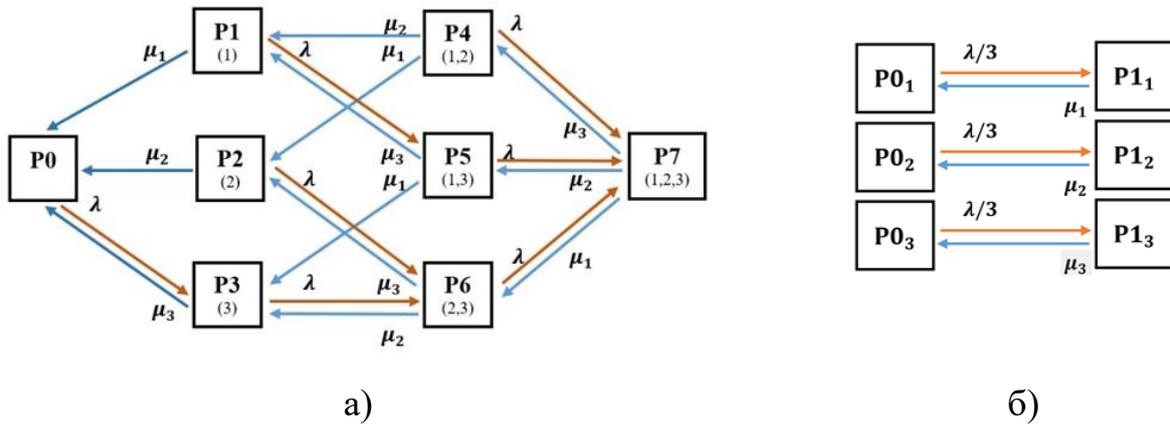


Рисунок 3.13 – Графы состояний 3-х канальной СМО (а) и 3-х независимых одноканальных СМО (б) (построено автором)

Стационарные вероятности состояний одноканальных систем вычисляются аналогично предыдущему примеру, с той лишь разницей, что теперь величина входного потока для одноканальных систем равна $\frac{\lambda}{3}$.

$$\begin{aligned}
 P_{01} &= \frac{3\mu_1}{3\mu_1+\lambda}, P_{11} = \frac{\lambda}{3\mu_1+\lambda}; & P_{02} &= \frac{3\mu_2}{3\mu_2+\lambda}, P_{12} = \frac{\lambda}{3\mu_2+\lambda}; \\
 P_{03} &= \frac{3\mu_3}{3\mu_3+\lambda}, P_{13} = \frac{\lambda}{3\mu_3+\lambda}
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов с системами такого типа, представленные в Таблице 3.35.

Таблица 3.35 – Результаты вычислительных экспериментов с 3-х канальной и 3 одноканальными СМО

λ	μ ₁	μ ₂	μ ₃	Многоканальная СМО				Одноканальные СМО			
				P ₀	P _{отк}	Q	A	P ₀	P _{отк}	Q	A
γ < 1 (система недогружена)											
10	5	6	9	0,266	0,127	0,873	8,73	0,6	0,4	0,6	2
								0,643	0,357	0,643	2,143
								0,730	0,270	0,730	2,433
10	3	6	11	0,267	0,127	0,873	8,73	0,474	0,526	0,474	1,58
								0,643	0,357	0,643	2,143
								0,767	0,233	0,767	2,556
10	1	6	13	0,187	0,149	0,851	8,51	0,230	0,769	0,230	0,767
								0,643	0,357	0,643	2,143
								0,796	0,204	0,796	2,653
γ = 1 (система загружена равномерно)											
10	2,5	3,5	4	0,081	0,343	0,657	6,57	0,429	0,571	0,429	1,43
								0,512	0,488	0,512	1,707
								0,545	0,454	0,545	1,817

10	1,5	3,5	5	0,075	0,348	0,652	6,52	0,310 0,512 0,6	0,690 0,488 0,4	0,310 0,512 0,6	1,033 1,707 2
10	0,5	3,5	6	0,040	0,372	0,628	6,28	0,130 0,512 0,643	0,870 0,488 0,357	0,130 0,512 0,643	0,433 1,707 2,143
$\gamma > 1$ (система перегружена)											
10	1	2	3	0,023	0,533	0,467	4,67	0,231 0,375 0,474	0,769 0,625 0,526	0,231 0,375 0,474	0,77 1,25 1,58
10	0,5	2	3,5	0,015	0,544	0,456	4,56	0,130 0,375 0,512	0,870 0,625 0,488	0,130 0,375 0,512	0,433 1,23 1,707
10	0,5	1	4,5	0,011	0,559	0,441	4,41	0,130 0,231 0,574	0,870 0,769 0,425	0,130 0,231 0,574	0,433 0,77 1,913

На Рисунке 3.14 продемонстрирована разница в величинах абсолютной пропускной способности в 3-х канальных СМО и суммарной абсолютной пропускной способности в 3 независимых одноканальных СМО, параметры которых приведены в Таблице 3.35.

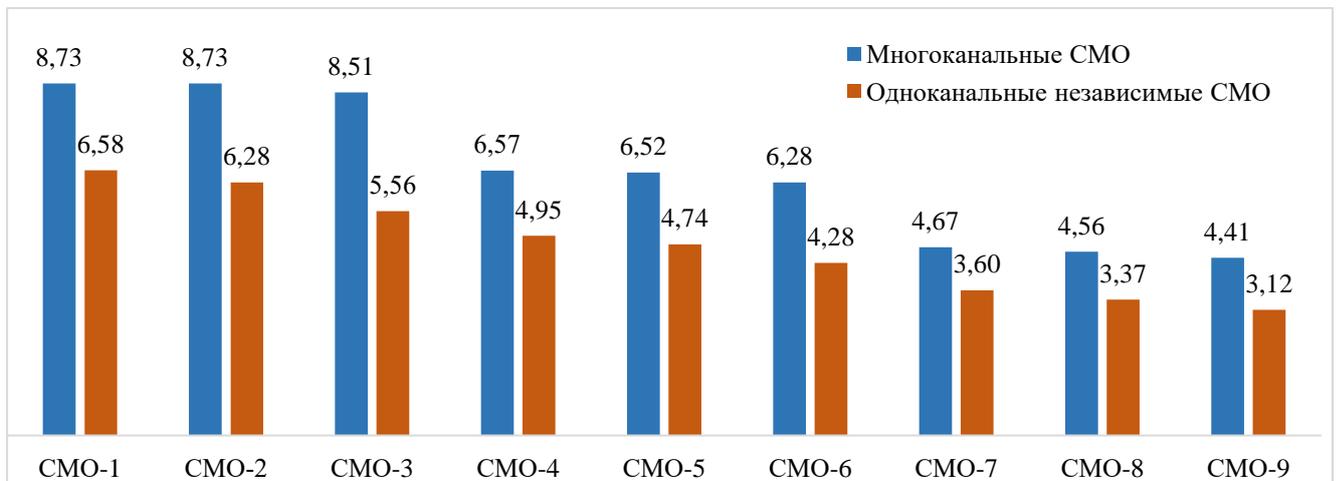


Рисунок 3.14 – Абсолютная пропускная способность 3-х канальной СМО и суммарная пропускная способность 3 независимых одноканальных СМО (рассчитано и построено автором)

Аналогично ранее рассмотренному примеру, в случае 3-х канальной системы также можно утверждать, что разделение каналов ухудшает показатели эффективности. Так, при $\mu_1 = 5, \mu_2 = 6, \mu_3 = 9$ (строка 1 Таблицы 3.35) абсолютная пропускная способность равна 8,73. При разделении каналов суммарная пропускная способность составляет 6,576. Это на 24,67% меньше, чем в многоканальной

системе. Увеличение диспропорции между интенсивностями каналов обслуживания усиливает данный эффект: так, при $\mu_1 = 1, \mu_2 = 6, \mu_3 = 13$ разница между абсолютными пропускными способностями составит уже 34,63%. Как продемонстрировано на Рисунке 3.14, снижение эффективности функционирования системы при разделении каналов наблюдается и для других вариантов нагрузки при $\gamma = 1$ и $\gamma > 1$.

Рассмотрим модель 4-х канальной системы. На Рисунке 3.15 представлены граф состояний 4-х канальной системы с приборами различной производительности при управлении потоком заявок с приоритетом наиболее «быстрого» свободного прибора и графы состояний 4 независимых одноканальных систем.

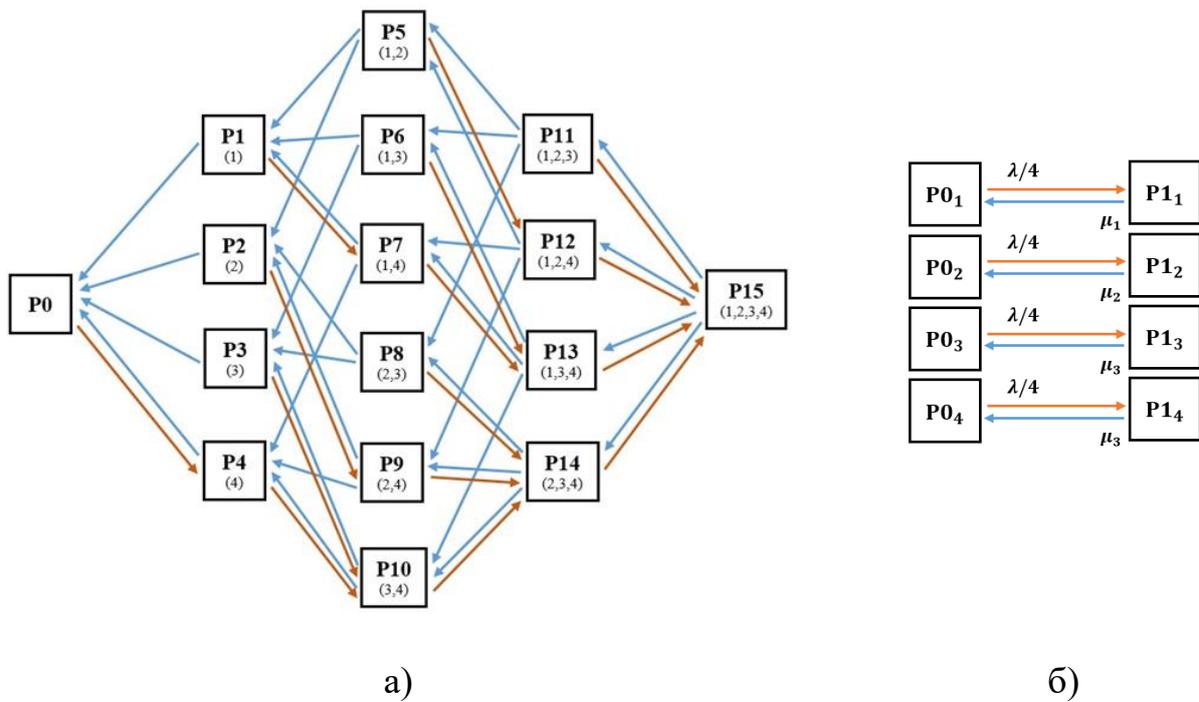


Рисунок 3.15 – Графы состояний 4-х канальной СМО (а) и 4-х независимых одноканальных СМО (б) (построено автором)

Стационарные вероятности одноканальных систем вычисляются с учетом того, что теперь величина входного потока равна $\frac{\lambda}{4}$.

$$\begin{aligned}
 P_{0_1} &= \frac{4\mu_1}{4\mu_1 + \lambda}, P_{1_1} = \frac{\lambda}{4\mu_1 + \lambda}; P_{0_2} = \frac{4\mu_2}{4\mu_2 + \lambda}, P_{1_2} = \frac{\lambda}{4\mu_2 + \lambda}; \\
 P_{0_3} &= \frac{4\mu_3}{4\mu_3 + \lambda}, P_{1_3} = \frac{\lambda}{4\mu_3 + \lambda}; P_{0_4} = \frac{4\mu_4}{4\mu_4 + \lambda}, P_{1_4} = \frac{\lambda}{4\mu_4 + \lambda};
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов с системами такого типа, представленные в Таблице 3.36.

Таблица 3.36 – Результаты вычислительных экспериментов с 4-х канальной и 4 одноканальными СМО

λ	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4	Многоканальная СМО				Одноканальные СМО			
					P_0	$P_{отк}$	Q	A	P_0	$P_{отк}$	Q	A
$\gamma < 1$ (система недогружена)												
10	4	5	6	7	0,199	0,069	0,931	9,31	0,615	0,385	0,615	1,537
									0,667	0,333	0,667	1,667
									0,706	0,294	0,706	1,765
									0,737	0,263	0,737	1,842
10	2	4	7	9	0,215	0,067	0,933	9,33	0,444	0,556	0,444	1,11
									0,615	0,385	0,615	1,537
									0,737	0,263	0,737	1,842
									0,783	0,217	0,783	1,957
10	1	3	8	10	0,185	0,074	0,926	9,26	0,286	0,714	0,286	0,715
									0,545	0,454	0,545	1,362
									0,762	0,238	0,762	1,905
									0,8	0,2	0,8	2
$\gamma = 1$ (система загружена равномерно)												
10	1	2	3	4	0,030	0,310	0,690	6,90	0,286	0,714	0,286	0,715
									0,444	0,556	0,444	1,11
									0,545	0,455	0,545	1,362
									0,615	0,385	0,615	1,537
10	0,5	1	3,5	5	0,017	0,333	0,667	6,67	0,167	0,833	0,167	0,417
									0,286	0,714	0,286	0,715
									0,583	0,417	0,583	1,457
									0,667	0,333	0,667	1,667
10	0,5	1	2	6,5	0,015	0,345	0,655	6,55	0,167	0,833	0,167	0,417
									0,286	0,714	0,286	0,715
									0,444	0,556	0,444	1,11
									0,722	0,278	0,722	1,805
$\gamma > 1$ (система перегружена)												
10	0,5	1	2	3	0,006	0,489	0,511	5,11	0,167	0,833	0,167	0,417
									0,286	0,714	0,286	0,715
									0,444	0,556	0,444	1,11
									0,545	0,455	0,545	1,362
10	0,5	1	1,5	3,5	0,005	0,493	0,507	5,07	0,167	0,833	0,167	0,417
									0,286	0,714	0,286	0,715
									0,375	0,625	0,375	0,937
									0,583	0,417	0,583	1,457
10	0,5	1	1,2	3,8	0,005	0,496	0,504	5,04	0,167	0,833	0,167	0,417
									0,286	0,714	0,286	0,715
									0,324	0,676	0,324	0,81
									0,603	0,397	0,603	1,507

На Рисунке 3.16 продемонстрирована разница в величинах абсолютной пропускной способности в 4-х канальных СМО и суммарной абсолютной пропускной способности в 4 независимых одноканальных СМО.

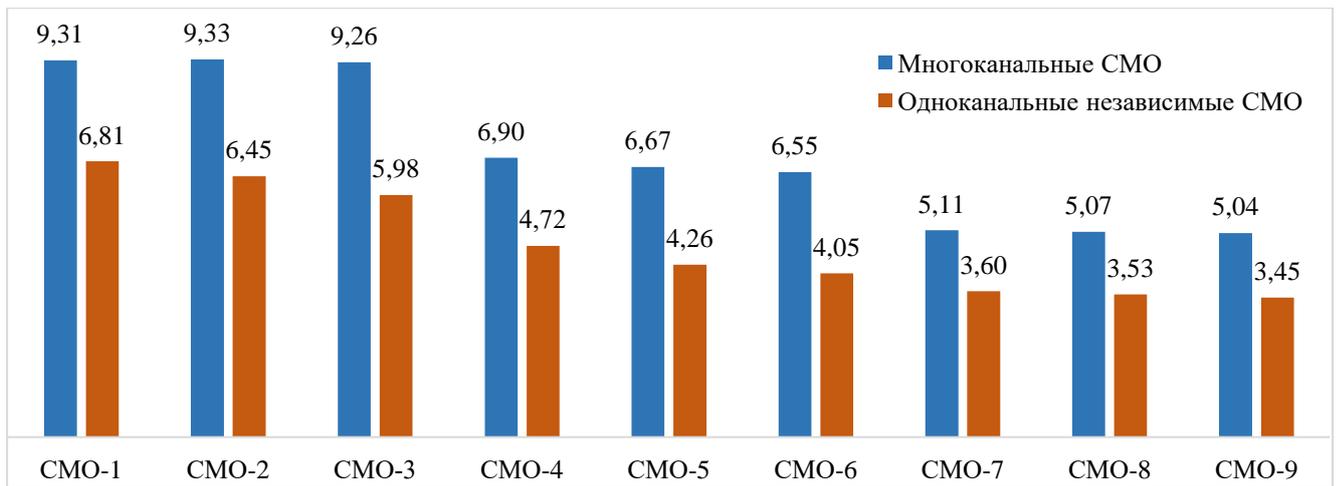


Рисунок 3.16 – Абсолютная пропускная способность 4-х канальной СМО и суммарная пропускная способность 4 независимых одноканальных СМО (рассчитано и построено автором)

Рассмотрев результаты, представленные в таблице и на рисунке, также можно отметить, что разделение каналов существенно ухудшает показатели функционирования системы. К примеру, при интенсивности входного потока $\lambda = 10$ и интенсивностях обслуживаемых устройств $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, \mu_3 = 3, \mu_4 = 4$ разделение каналов ухудшит абсолютную пропускную способность на 31,54%. Увеличение диспропорции каналов до $\mu_1 = 0,5, \mu_2 = 1, \mu_3 = 2, \mu_4 = 6,5$ при той же общей нагрузке на систему увеличивает эту разницу до 38,21%.

Как продемонстрировано на Рисунке 3.16, снижение эффективности функционирования системы при разделении каналов наблюдается и для других вариантов нагрузки при $\gamma = 1$ и $\gamma > 1$.

В рамках проведенного исследования также рассмотрен вопрос о том, как изменяются показатели эффективности при разделении каналов различной производительности в зависимости от величины нагрузки на систему. Данная задача рассмотрена на примере 3-х канальной системы с $\mu_1 = 2, \mu_2 = 3, \mu_3 = 4$, интенсивность входного потока λ менялась от 1 до 15. В Таблице 3.37 представлены результаты вычислительных экспериментов.

Таблица 3.37 – Влияние нагрузки на показатели эффективности 3-х канальной и 3-х одноканальных СМО (рассчитано автором)

λ	μ_1	μ_2	μ_3	Многоканальная СМО				Одноканальные СМО			
				P_0	$P_{отк}$	Q	A	P_0	$P_{отк}$	Q	A
1	2	3	4	0,769	0,003	0,997	0,997	0,857	0,143	0,857	0,286
								0,900	0,100	0,900	0,300
								0,923	0,077	0,923	0,308
2	2	3	4	0,574	0,021	0,979	1,958	0,750	0,250	0,750	0,500
								0,818	0,182	0,818	0,545
								0,857	0,143	0,857	0,571
3	2	3	4	0,419	0,056	0,944	2,832	0,667	0,333	0,667	0,667
								0,750	0,250	0,750	0,750
								0,800	0,200	0,800	0,800
4	2	3	4	0,312	0,103	0,897	3,588	0,600	0,400	0,600	0,800
								0,692	0,308	0,692	0,923
								0,750	0,250	0,750	1,00
5	2	3	4	0,233	0,151	0,849	4,245	0,545	0,454	0,545	0,908
								0,643	0,357	0,643	1,072
								0,706	0,294	0,706	1,177
6	2	3	4	0,176	0,206	0,794	4,764	0,500	0,500	0,500	1,00
								0,600	0,400	0,600	1,20
								0,667	0,333	0,667	1,334
7	2	3	4	0,135	0,249	0,751	5,257	0,462	0,538	0,462	1,078
								0,562	0,438	0,562	1,311
								0,632	0,368	0,632	1,475
8	2	3	4	0,105	0,3	0,7	5,6	0,429	0,571	0,429	1,144
								0,529	0,471	0,529	1,411
								0,600	0,400	0,600	1,600
9	2	3	4	0,083	0,344	0,656	5,904	0,400	0,600	0,400	1,200
								0,500	0,500	0,500	1,500
								0,571	0,429	0,571	1,713
10	2	3	4	0,066	0,384	0,616	6,16	0,375	0,625	0,375	1,250
								0,474	0,526	0,474	1,58
								0,545	0,455	0,545	1,817
11	2	3	4	0,055	0,415	0,585	6,435	0,353	0,647	0,353	1,294
								0,450	0,550	0,450	1,650
								0,522	0,478	0,522	1,914
12	2	3	4	0,046	0,449	0,551	6,612	0,333	0,667	0,333	1,332
								0,429	0,571	0,429	1,716
								0,500	0,500	0,500	2,00
13	2	3	4	0,036	0,481	0,519	6,747	0,316	0,684	0,316	1,369
								0,409	0,591	0,409	1,772
								0,480	0,520	0,480	2,08
14	2	3	4	0,031	0,504	0,496	6,944	0,300	0,700	0,300	1,4
								0,391	0,609	0,391	1,825
								0,461	0,538	0,461	2,151
15	2	3	4	0,028	0,525	0,475	7,125	0,286	0,714	0,286	1,43
								0,375	0,625	0,375	1,875
								0,444	0,556	0,444	2,22

В Таблице 3.38 представлена разница в абсолютной пропускной способности для рассмотренных СМО в абсолютных и процентных значениях.

Таблица 3.38 – Влияние нагрузки на показатели эффективности 3-х канальной и 3-х одноканальных СМО (рассчитано автором)

λ	Абсолютная пропускная способность для 3-х канальной СМО	Суммарная абсолютная пропускная способность 3-х одноканальных СМО	Абсолютная разница	% разница
1	0,997	0,894	0,103	10.33%
2	1,958	1,616	0,342	17.47%
3	2,832	2,217	0,615	21.72%
4	3,588	2,723	0,865	24.11%
5	4,245	3,157	1,088	25.63%
6	4,764	3,534	1,23	25.82%
7	5,257	3,864	1,393	26.50%
8	5,6	4,155	1,445	25.80%
9	5,904	4,413	1,491	25.25%
10	6,16	4,647	1,513	24.56%
11	6,435	4,858	1,577	24.51%
12	6,612	5,048	1,564	23.65%
13	6,747	5,221	1,526	22.62%
14	6,944	5,376	1,568	22.58%
15	7,125	5,525	1,6	22.46%

На Рисунке 3.17 представлен график изменения разницы в значениях абсолютной пропускной способности в зависимости от интенсивности входного потока λ , на Рисунке 3.18 - график изменения разницы в процентах.

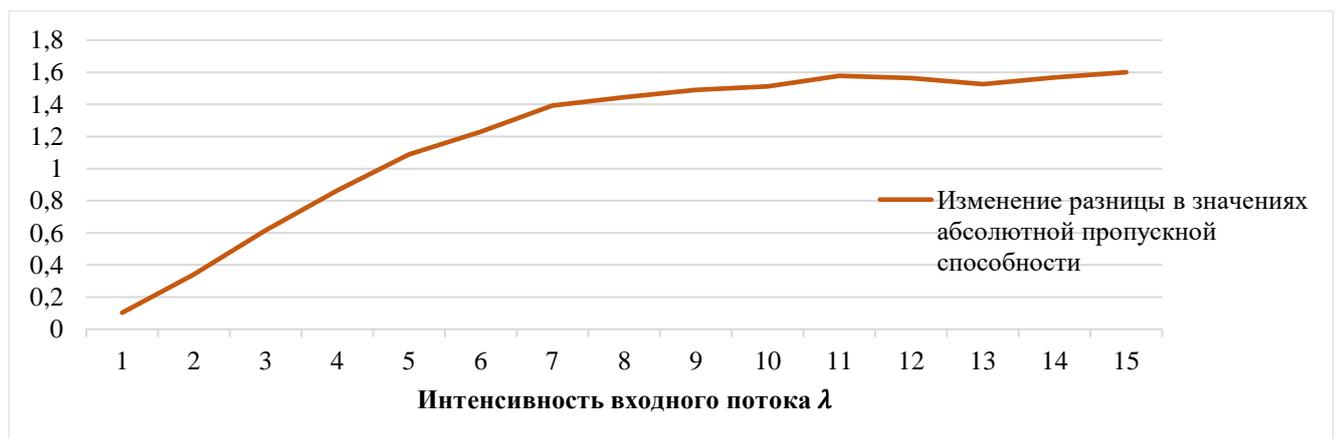


Рисунок 3.17 – Изменение разницы в значениях абсолютной пропускной способности в зависимости от интенсивности входного потока λ (рассчитано и построено автором)



Рисунок 3.18 – Изменение разницы в процентах от абсолютной пропускной способности в зависимости от интенсивности входного потока λ (рассчитано и построено автором)

Результаты, представленные в таблице и на графиках, демонстрируют, что при разделении каналов рассматриваемой системы разница в абсолютных значениях между пропускной способностью 3-х канальной СМО и суммарной пропускной способностью 3-х независимых одноканальных систем растет при увеличении нагрузки на систему. Так, при $\lambda = 1$ разница между абсолютными пропускными способностями составляет 0,103, а при $\lambda = 15$ разница составляет уже 1,6. В процентном выражении начиная с $\lambda = 1$ (10,33%) она увеличивается и достигает максимума в 26,5% при $\lambda = 7$, далее начинает уменьшаться до 22,46% при $\lambda = 15$.

Таким образом, по результатам ряда вычислительных экспериментов представляется возможным заключить, что разделение СМО с неэквивалентными приборами на независимые приборы значительно ухудшает ее показатели эффективности. Иными словами, система работает лучше, чем ее каналы по отдельности. При этом, данный эффект возрастает при увеличении диспропорции в интенсивностях приборов. Кроме того, увеличение нагрузки на систему приводит к увеличению разницы в абсолютных пропускных способностях между многоканальной системой и одноканальными, состоящими из приборов той же производительности.

Такие результаты объясняются тем, что в многоканальной системе имеется возможность задействования свободного прибора. Иными словами, при разделе-

нии системы на независимые одноканальные СМО значительно увеличивается вероятность отказа в обслуживании.

Выводы по третьей главе

В данной главе представлен ряд результатов вычислительных экспериментов, в ходе которых проведен сравнительный анализ эксплуатационных характеристик СМО с каналами одинаковой и различной производительности, функционирующих при пуассоновских и неординарных потоках (в условиях одинаковой суммарной интенсивности приборов в данных системах), а также исследовано влияние на показатели эффективности разделение многоканальной системы массового обслуживания на независимые приборы.

Установлено, что при пуассоновских потоках СМО с каналами различной производительности могут быть эффективнее классических систем с каналами одинаковой производительности (в условиях управления потоками). Получен ряд результатов вычислительных экспериментов, демонстрирующих зависимость показателей эффективности СМО с каналами различной производительности от соотношения интенсивностей приборов и величины нагрузки на систему.

Установлено, что при групповых потоках СМО с каналами различной производительности являются менее эффективными, чем классические системы с приборами одинаковой производительности. В условиях группового потока увеличение диспропорции в интенсивностях каналов приводит к значительному ухудшению показателей эффективности системы. Это связано с тем, что время обслуживания групповой заявки становится равным времени обслуживания одного из требований наиболее «медленным» прибором.

Также установлено, что при смешанных потоках СМО с неэквивалентными каналами могут быть эффективнее классических систем. Области эффективности систем с приборами различной производительности преимущественно проявляются при смешанном потоке, характеризующемся более высокой вероятностью поступления одинарных заявок, чем групповых (т. е. чем более смешанный поток

приближается к ординарному, тем данные области проявляются наиболее выражено).

По аналогии с системами, функционирующими в условиях пуассоновских потоков, области эффективности систем с каналами различной производительности при смешанных потоках связаны с незначительной нагрузкой на систему и небольшой диспропорцией в интенсивностях каналов.

Установлено, что при управлении потоками разделение многоканальной системы массового обслуживания с приборами различной производительности на несколько независимых одноканальных систем ухудшает ее показатели эффективности, т. е. система работает лучше, чем ее каналы по отдельности. Продемонстрировано, что данный эффект возрастает при увеличении нагрузки на систему.

Полученные результаты опубликованы в работах [39–42; 107–109].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе представлены результаты комплексного исследования моделей систем массового обслуживания с каналами различной производительности, а также их структурно-функциональных особенностей.

Основные результаты исследования заключаются в следующем:

1. Разработаны математические модели СМО с каналами различной производительности, представлены графы состояний систем такого типа. Разработаны имитационные модели систем с каналами различной производительности. Для оценки адекватности моделей проведен сравнительный анализ стационарных вероятностей состояний, полученных при использовании имитационных моделей и при аналитических расчетах с помощью систем уравнений Колмогорова.

2. Проведено исследование показателей эффективности СМО с каналами различной производительности при их функционировании в условиях различных схем управления потоками. По критериям общей напряженности работы и доле обслуженных заявок для систем без функции накопления очереди экспериментально доказана эффективность использования схемы управления потоками, при которой поступающие в систему заявки направляются на свободные каналы наибольшей производительности.

3. Установлено, что при пуассоновских потоках СМО с каналами различной производительности могут быть эффективнее классических систем с каналами одинаковой производительности (в условиях управления потоками). Получен ряд результатов, демонстрирующих зависимость показателей эффективности СМО с каналами различной производительности от соотношения интенсивностей приборов и величины нагрузки на систему.

4. Установлено, что при групповых потоках СМО с каналами различной производительности являются менее эффективными, чем классические системы с приборами одинаковой производительности. Также установлено, что при смешанных потоках СМО с неэквивалентными каналами могут быть эффективнее классических систем (в условиях управления потоками). Получен ряд результа-

тов, демонстрирующих, что области эффективности систем с каналами различной производительности преимущественно проявляются при смешанном потоке, характеризующемся более высокой вероятностью поступления одинарных заявок, чем групповых.

5. Установлено, что в условиях управления потоками разделение системы массового обслуживания с каналами различной производительности на несколько независимых приборов ухудшает ее показатели эффективности. Продемонстрировано, что данный эффект возрастает при увеличении нагрузки на систему.

Таким образом, была достигнута цель диссертационной работы – разработка и исследование моделей систем массового обслуживания с каналами различной производительности, изучение их структурно-функциональных особенностей.

Прикладная значимость основных положений настоящей диссертационной работы заключается в том, что они применимы для решения ряда задач в телекоммуникационных, вычислительных, производственных, логистических, транспортных и других системах, работающих по принципу СМО, в которых могут иметь место приборы с неодинаковыми функциональными характеристиками.

В связи с наступившей эрой Индустрии 4.0, характеризующейся стремительным развитием киберфизических систем, результаты исследования приобретают особую практическую значимость, так как могут способствовать значительному расширению возможностей цифровых двойников различных объектов и процессов, в особенности функционирующих в режиме реального времени и связанных с обработкой больших данных.

Использование представленных в работе выводов может позволить обеспечить более высокие эксплуатационные характеристики реальных объектов и процессов, которые могут быть представлены в виде систем массового обслуживания, оценить их эффективность в сравнении с классическими системами, оценить влияние разделения многоканальной СМО на несколько независимых обрабатывающих устройств, а также способствовать принятию решений при проектирова-

нии (в т. ч. предпроектных работах), моделировании и управлении системами такого типа.

В частности, результаты исследования, связанные с эффективным распределением заявок между каналами обслуживания, а также областями параметров, при которых системы с неэквивалентными приборами могут быть эффективнее классических систем с каналами одинаковой производительности, могут позволить реализовать более эффективные алгоритмы функционирования сервисов доставки, агрегаторов такси, транспортных компаний и других систем со схожими процессами.

Результаты исследования, связанные со анализом показателей эффективности многоканальной системы при ее разделении на несколько независимых приборов, могут быть полезны при проектировании или управлении системами, связанными со специализацией обрабатывающих устройств. Например, в многофункциональных центрах, банковских организациях специалисты зачастую обслуживают клиентов по определенному кругу вопросов, то есть обладают некоторой специализацией. Представленные в работе результаты позволяют оценить, каким образом их унификация (то есть отказ от специализации) влияет на общие показатели эффективности системы.

Материалы настоящего исследования могут быть применены также в образовательных организациях высшего образования на лекционных, семинарских и лабораторных занятиях при подготовке бакалавров и магистров по направлениям подготовки, связанным с прикладной математикой и информационными технологиями. В настоящее время основные положения диссертации внедрены в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет» и используются в рамках преподавания дисциплин «Моделирование систем», «Методы и средства проектирования информационных систем и технологий», «Модели информационных процессов и систем», «Имитационное моделирование». Изучение обучающимися данной темы может способствовать повышению их компетенций в части моделирования и системного анализа объектов и

процессов, которые могут быть описаны математическими моделями СМО. Также результаты настоящей работы могут быть применены при подготовке учебных пособий и методических рекомендаций по теории массового обслуживания, математическому и имитационному моделированию.

Кроме того, основные положения работы могут быть полезны для представителей научного сообщества, исследующих актуальные теоретические и прикладные вопросы теории массового обслуживания.

Очевидно, что данные примеры показывают лишь основные направления приложения результатов, представленных в диссертационной работе, при этом позволяют сделать однозначный вывод о целесообразности дальнейших исследований, связанных с моделями систем массового обслуживания с каналами различной производительности.

Таким образом, предложенные в работе выводы и представленные результаты могут быть полезны в достаточно широком спектре предметных областей, объекты и процессы которых работают по принципу СМО, и являются достаточно простыми для использования при решении задач прикладного характера.

Рекомендуется при проектировании (в т. ч. предпроектных работах) и моделировании систем, которые могут быть описаны математическими моделями в терминах теории массового обслуживания, учитывать выводы, представленные в настоящей работе.

Перспективы дальнейшей разработки темы состоят в построении аналитических выражений или решающих правил, описывающих области эффективности систем массового обслуживания с неэквивалентными каналами, исследовании различных модификаций систем такого типа, а также и их эксплуатационных характеристик при большом количестве приборов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erlang, A. K. Probability and telephone calls / A.K. Erlang // *Nyt Tidsskr. Mat. Ser. B.* – 1909. – Vol. 20. – P. 33-39.
2. Хинчин, А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1963. – 236 с.
3. Гнеденко, Б. В. Введение в теорию массового обслуживания / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко. – М.: Наука, 1966. – 301 с.
4. Такач, Л. Комбинированные методы в теории случайных процессов / Л. Такач. – М.: Мир, 1971. – 266 с.
5. Саати, Т. Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения / Т. Л. Саати. – М.: Издательство Советское радио, 1971. – 520 с.
6. Боровков, А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания / А.А. Боровков. – М.: Наука, 1972. – 368 с.
7. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок: пер. с англ. И. И. Грушко; ред. В. И. Нейман. – М: Машиностроение, 1979. – 432 с.
8. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С.Вентцель – М.: Наука, 1969. – 576 с.
9. Ивченко, Г.И. Теория массового обслуживания / Г.И. Ивченко, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко. – М.: Высшая школа, 1982. – 256 с.
10. Кирпичников, А. П. Методы прикладной теории массового обслуживания / А. П. Кирпичников. – Казань: Казанский ун-т, 2011. – 199 с.
11. Gumbel, H. Waiting lines with heterogeneous servers / H. Gumbel // *Operations Research.* – 1960. – Vol. 8. – Iss. 4. – P. 504-511.
12. Шахбазов, А. А. Обслуживание приборами разной производительности / А. А. Шахбазов // *Ученые записки Азербайджанского Государственного университета, сер. физ.-мат. и хим. наук.* – 1962. – № 3.
13. Singh, V. S. Two-server Markovian queues with balking: Heterogeneous vs homogeneous servers / V.S. Singh // *Operations Research.* – 1970. – Vol. 18. – Iss. 1. – P. 145-159.

14. Singh, V. S. Markovian queues with three servers / V.S. Singh // IIE Transactions. – 1971. – Vol. 3. – Iss. 1. – P. 45-48.
15. Fakinos, D. The M/G/k blocking system with heterogeneous servers / D. Fakinos // J. Oper. Res. – 1980. – Vol. 31. – P. 919–927.
16. Ионин, Г. Л. Задача об оптимальном размещении приборов различной производительности / Г. Л. Ионин, М. А. Шнепс // Латв. мат. ежегодник. – 1966. – Т.2. – С. 95-98.
17. Nath, G. Optimal service rates in the multi-server loss system with heterogeneous servers / G. Nath, E. Enns // Journal of Applied Probability. – 1981. – Vol. 18. – Iss. 3. – P. 776-781.
18. Krishnamoorthy, B. On Poisson queue with two heterogeneous servers / B. Krishnamoorthy // Oper. Res. – 1963. – Vol. 11. – P. 321-330.
19. Larsen, R. Control of heterogeneous two-server exponential queueing system / R. Larsen, A. Agravala // IEEE Transactions on Software Engineering. – 1983. – Vol. 9. – P. 522-526
20. Hajek, B. Optimal control of two interacting service stations / B. Hajek // IEEE Trans. Automat. Control. – 1984. – Vol. 29. – P. 491-499.
21. Lin, W. Optimal control of a queueing system with two heterogeneous servers / W. Lin, P.R. Kumar // IEEE Trans. Automat. Control. – 1984. – Vol. 29. – P. 696-703
22. Warland, J. A note on «Optimal control of a queueing system with two heterogeneous servers» / J. Warland // Systems & Control Letters. – 1984. – Vol. 4. – P. 131-134.
23. Rubinovitch, M. The slow server problem / M. Rubinovitch // Journal of Applied Probability. – 1985. – Vol. 22 – P. 205-213.
24. Koole, G. A simple proof of the optimality of a threshold policy in a two-server queueing system / G. Koole // Systems & Control Letters. – 1995. – Vol. 26, No. 5. – P. 301-303.

25. Viniotis, I. Extension of the optimality of the threshold policy in heterogeneous multiserver queueing systems / I. Viniotis, A. Ephremides // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1988. – Vol. 33. – Iss. 1. – P. 104–109.
26. Rosberg, Z. Optimal routing to parallel heterogeneous servers – Small arrival rates / Z. Rosberg, A.M. Makowski // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 1990. – Vol. 35. – Iss. 7. – P. 789-796.
27. Weber, R. On a conjecture about assigning jobs to processors of different speeds / R. Weber // *IEEE Trans. Automat. Control*. – 1993. – Vol. 38. – P. 166-170.
28. Бронштейн, О. П. Об оптимальных дисциплинах обслуживания в управляющих системах / О. П. Бронштейн, В. В. Рыков // *Управление производством: Тр. III Всесоюзного совещания по автоматическому управлению (техническая кибернетика)*. – 1967. – С. 215-224.
29. Рыков, В.В. Управляемые системы массового обслуживания / В.В. Рыков // *Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика»*. – 1975. – Т. 12. – С. 43-153.
30. Rykov, V. V. Monotone control of queueing systems with heterogeneous servers / V. V. Rykov // *Queueing Systems*. – 2001. – Vol. 37, No. 4. – P. 391-403.
31. Véricourt, F. De. On the incomplete results for the heterogeneous server problem / F. De. Véricourt, Y. P. Zhou // *Queueing Systems*. – 2006. – Vol. 52, No. 3. – P. 189-191.
32. Ефросинин, Д. В. Численное исследование оптимального управления системой с неоднородными приборами / Д. В. Ефросинин, В. В. Рыков // *Автоматика и телемеханика*. – 2003. – № 2. – С. 143-151.
33. Ефросинин, Д. В. К анализу характеристик производительности СМО с неоднородными приборами / Д. В. Ефросинин, В. В. Рыков // *Автоматика и телемеханика*. – 2008. – № 1. – С. 64-82.
34. Рыков, В. В. К проблеме медленного прибора / В. В. Рыков, Д. В. Ефросинин // *Автоматика и телемеханика*. – 2009. – № 12. – С. 81-91.

35. Efrosinin, D. Optimal control of a two-server heterogeneous queueing system with breakdowns and constant retrials / D. Efrosinin, J. Sztrik // *Communications in Computer and Information Science*. – 2016. – Vol. 638. – P. 57-72.
36. Efrosinin, D. Reliability analysis of two-server heterogeneous queueing system with threshold control policy / D. Efrosinin, J. Sztrik, M. Farkhadov, N. Stepanova // *Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2017. Communications in Computer and Information Science*. – 2017. – Vol. 800. – P. 13–27.
37. Печеный, Е. А. Математическое моделирование СМО с неэквивалентными каналами / Е. А. Печеный, Н. К. Нуриев, С. Д. Старыгина // *Математические методы в технике и технологиях - ММТТ*. – 2020. – Т. 9. – С. 40-43.
38. Нуриев, Н. К. Математическое моделирование системы массового обслуживания с каналами разной производительности / Н. К. Нуриев, Е. А. Печеный, С. Д. Старыгина // *Современные наукоемкие технологии*. – 2021. – № 1. – С. 31-36.
39. Печеный, Е. А. Модель управления системой массового обслуживания с неэквивалентными каналами / Е. А. Печеный, И. З. Самарханов, Н. К. Нуриев // *Современные наукоемкие технологии*. – 2022. – № 4. – С. 83-88.
40. Самарханов, И. З. Об областях эффективности систем массового обслуживания с неэквивалентными каналами / И. З. Самарханов // *Современные наукоемкие технологии*. – 2022. – № 5-1. – С. 70-76.
41. Самарханов, И. З. Об эффективности систем массового обслуживания с неэквивалентными каналами / И. З. Самарханов // *Научный альманах Центрального Черноземья*. – 2022. – № 3-11. – С. 79-84.
42. Самарханов, И. З. О некоторых показателях эффективности систем массового обслуживания с каналами различной производительности / И. З. Самарханов // *Сборник статей XIII Международной научно-практической конференции «Актуальные вопросы научных исследований»*. – Саратов: НОП «Цифровая наука». – 2023. – С.67-76.

43. Cooper, R.B. Queues with ordered servers that work at different rates / R.B. Cooper // *Opsearch*. – 1976. –Vol. 13. – P. 69-78.
44. Matsui, M. On a multichannel queueing system with ordered entry and heterogeneous servers / M. Matsui, J. Fukuta // *AIIE Trans.* – 1977. –Vol. 9. – P. 209-214.
45. Nawijn, W.M. A note on many-server queueing systems with ordered entry, with an application to conveyor theory / W.M. Nawijn // *J. Appl. Probab.* – 1983. – Vol. 20. – P. 144-152.
46. Nawijn, W.M. On a two-server finite queueing system with ordered entry and deterministic arrivals / W.M. Nawijn // *European Journal of Operational Research*. – 1984. –Vol. 18. – Iss. 3. – P. 388-395.
47. Pourbabai, B. Service utilization factors in queueing loss systems with ordered entry and heterogeneous servers / B. Pourbabai, D. Sonderman // *J. Appl. Probab.* – 1986. –Vol. 23. – P. 236-242.
48. Pourbabai, B. Markovian queueing systems with retrials and heterogeneous servers / B. Pourbabai // *Comput. Math. Appl.* – 1987. –Vol. 13. – P. 917-923.
49. Yao, D.D. Convexity properties of the overflow in an ordered-entry system with heterogeneous servers / D.D. Yao // *Oper. Res. Lett.* – 1986. –Vol. 5. – P. 145-147.
50. Yao, D.D. The Arrangement of servers in an ordered-entry system / D.D. Yao // *Oper. Res.* – 1987. –Vol. 35. – P. 759-763.
51. Saglam, V. Minimizing loss probability in queueing systems with heterogeneous servers / V. Saglam, A. Shahbazov // *Iran. J. Sci. Technol.* – 2007. –Vol. 31. – P. 199–206.
52. Isguder, H.O. Minimizing the loss probability in GI/M/3/0 queueing system with ordered entry / H.O. Isguder, C.C. Celikoglu // *Sci. Res. Essays*. – 2012. –Vol. 7. – P. 963-968.
53. Isguder, H.O. Analysis of GI/M/n/n queueing system with ordered entry and no waiting line / H.O. Isguder, U.U. Kocer // *Appl. Math. Model.* – 2014. –Vol. 38. – P. 1024-1032.

54. Lin, B.W. A general solution for multichannel queueing systems with ordered entry / B.W. Lin, E.A. Elsayed // *Comput. Oper. Res.* – 1978. – Vol. 5. – P. 219-225.
55. Elsayed, E.A. Multichannel queueing systems with ordered entry and finite source / E.A. Elsayed // *Computers & Operations Research.* – 1983. – Vol. 10. – Iss. 3. – P. 213-222.
56. Котенко, А. П. Система массового обслуживания с различными каналами как конечный автомат / А. П. Котенко, М. Б. Букаренко // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки.* – 2012. – № 3(28). – С. 114-124.
57. Котенко, А. П. Комплекс программ имитационного моделирования работы системы массового обслуживания с неоднородными приборами и разделными накопителями / А. П. Котенко, М. Б. Букаренко // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки.* – 2013. – № 2(31). – С. 50-57.
58. Melikov, A.Z. Analysis and optimization of system with heterogeneous servers and jump priorities / A.Z. Melikov, E.V Mekhbalieva // *J. Comp. Syst. Sci. Int.* – 2019. – Vol. 58. – Iss. 5. – P. 718-735.
59. Melikov, A.Z. Analysis of models of systems with heterogeneous servers / A.Z. Melikov, L.A. Ponomarenko, E.V. Mekhbalieva // *Cybernetics and Systems Analysis.* – 2020. – Vol. 56. – Iss. 1. – P. 89-99.
60. Меликов, А. З. Системы обслуживания с гетерогенными серверами и зависящими от состояния скачкообразными приоритетами / А. З. Меликов, Э. В. Мехбалыева // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* – 2022. – № 58. – С. 82-96.
61. Меликов, А. З. Численное исследование системы с гетерогенными серверами и рандомизированной N-политикой / А. З. Меликов, Э. В. Мехбалыева // *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* – 2020. – № 53. – С. 25-37.

62. Kumar, B.K. An M/M/2 queueing system with heterogeneous servers and multiple vacations / B.K. Kumar, S. P. Madhesari // *Mathematical and Computer Modelling*. – 2005. – Vol. 41. – P.1415-1429.
63. Yue, D. A Markovian Queue with Two-Heterogeneous Servers and Multiple Vacations / D. Yue, J. Yu, W. Yue // *Journal of Industrial and Management Optimization*. – 2009. – Vol. 5. – Iss. 3. – P. 453-465.
64. Yue, D. A heterogeneous two-server network system with balking and a Bernoulli vacation schedule / D. Yue, W. Yue // *Journal of Industrial and Management Optimization*. – 2010. – Vol. 6. – Iss. 3. – P. 501-516.
65. Yue, D. Analysis of two-server queues with a variant vacation policy / D. Yue, W. Yue, R. Tian // *The 9th International Symposium on Operations Research and its Applications, Jiuzhaigou, Chengdu, China*. – 2010. – P. 483-491.
66. Krishnamoorthy, A. An M/M/2 Queuing Systems with Heterogeneous Servers Including One with Working Vacation / A. Krishnamoorthy, C. Sreenivasan // *Intern. J. Stochastic Analysis*. – 2012. – Vol. 2012.
67. Sridhar, A. Analysis of a Markovian Queue with Two Heterogeneous Servers and Working Vacation / A. Sridhar, R. Pitchai // *Intern. J. Applied Operational Research*. – 2015. – Vol. 5. – Iss. 4. – P. 1-15
68. Xu, J. Transient Analysis of Two-Heterogeneous Server Queue with Impatient Behavior and Multiple Vacations / J. Xu, L. Liu, T. Zhu // *J. Systems Science and Information*. – 2018. – Vol. 6. – Iss. 1. – P. 69-84.
69. Kumar, B.K. Transient Solution of an M/M/2 Queue with Heterogeneous Servers Subject to Catastrophes / B.K. Kumar, S.P. Madheswari, K.S. Venkatakrisnan // *Intern. J. Information Management Science*. – 2007. – Vol. 18. – P. 63-80.
70. Dharmaraja, S. Transient Solution of a Markovian Queuing Models with Heterogeneous Servers and Catastrophes / S. Dharmaraja, R. Kumar // *OPSEARCH*. – 2015. – Vol. 52. – Iss. 4. – P. 810-826.
71. Ammar, S.I. Transient Behavior of a Two-Processor Heterogeneous Systems with Catastrophes, Server Failures and Repairs / S.I. Ammar // *Applied Mathematical Modelling*. – 2014. – Vol. 38. – P. 2224-2234.

72. Осипов, О. А. Система обслуживания с делением и слиянием требований, в которой требование занимает все свободные обслуживающие приборы / О. А. Осипов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 28-38.
73. Bailey, N. T. J. On Queueing Processes with Bulk Service / N. T. J. Bailey // Journal of the Royal Statistical Society. – 1954. – Vol. 16, No 1. – P. 80-87.
74. Downton, F. Waiting Times in Bulk Service Queues / F. Downton // Journal of the Royal Statistical Society. – 1955. – Vol. 17, No 2. – P. 256-261.
75. Chaudhry, M. L. A First Course in Bulk Queues / M. L. Chaudhry, J. G. Templeton. – New York: Wiley, 1983. – 372 pp.
76. Rupert, G. A Contribution to the Theory of Bulk Queues / G. Rupert, J. Miller // Journal of the Royal Statistical Society. – 1959. – Vol. 21, No 2. – P. 320-337.
77. Jaiswal, N. A Bulk-Service Queueing Problem with Variable Capacity / N. Jaiswal // Journal of the Royal Statistical Society. – 1961. – Vol. 23, No 1. – P. 143-148.
78. Bhat, U. N. Imbedded Markov Chain Analysis of Single-Server Bulk Queues / U. N. Bhat // Journal of the Australian Mathematical Society. – 1964. – Vol. 4, No 2. – P. 244-263.
79. Finch, P. D. On the Transient Behavior of a Queueing System with Bulk Service and Finite Capacity / P.D. Finch // Annals of Mathematical Statistics. – 1962. – Vol. 33, No 3. – P. 973-985.
80. Goyal, J. K. Queues with Hyper-Poisson Arrivals and Bulk Exponential Service / J. K. Goyal // Metrika. – 1967. – Vol. 11, No 1. – P. 157-167.
81. Neuts, M. F. A General Class of Bulk Queues with Poisson Input / M. F. Neuts // Annals of Mathematical Statistics. – 1967. – Vol. 38, No 3. – P. 759-770.
82. Cohen, J. The Single Server Queue / J. Cohen. – Amsterdam: North Holland, 1969. – 657 pp.
83. Goswami, V. Discrete-time bulk-service queue with two heterogeneous servers / V. Goswami, S.K. Samanta // Computers & Industrial Engineering. – 2009. – Vol. 56. – Iss. 4. – P. 1348-1356.

84. Факторы цитируемости обзоров / А. Е. Гуськов, Д. В. Косяков, А. В. Багирова, П. Ю. Блинов // Вестник Российской академии наук. – 2020. – Т. 90, № 12. – С. 1128-1140.
85. Коваленко, И.Н. Теория массового обслуживания / И.Н. Коваленко // Итоги науки. Сер.: Теория вероятностей. 1963. ВИНТИ. М. – 1965. – С. 73-125.
86. Коваленко, И.Н. Теория массового обслуживания / И.Н. Коваленко // Итоги науки. Сер.: Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. 1970. ВИНТИ. М. – 1971. – С. 5-109.
87. Файнберг, М.А. Управление в системах массового обслуживания // Зарубежная радиоэлектроника / М.А. Файнберг, Е.А. Файнберг // Зарубежная радиоэлектроника. – 1975. – № 3. – С. 3-34.
88. Legros, V. Routing in a queueing system with two heterogeneous servers in speed and in quality of resolution / V. Legros, O. Jouini // Stochastic Models. – 2017. – Vol. 33, No. 3. – P. 392-410.
89. Самарханов, И. З. Модели систем массового обслуживания с каналами различной производительности на современном этапе / И. З. Самарханов // Сборник материалов XII Международной научно-практической конференции «Современные стратегии и цифровые трансформации устойчивого развития общества, образования и науки». – Москва: Общество с ограниченной ответственностью "Издательство АЛЕФ", 2023. – С. 88-96.
90. Кирпичников, А. П. О нестационарном режиме в системах дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков / А. П. Кирпичников, А. С. Титовцев // Вестник Казанского технологического университета. – 2012. – Т. 15, № 6. – С. 201-202.
91. Гаевой, С. В. Оценка вероятности обслуживания заявки в СМО путем имитационного моделирования / С. В. Гаевой // Перспективы развития информационных технологий. – 2013. – № 11. – С. 13-18.
92. Карпов, Ю. Г. Имитационное моделирование систем. Введение в моделирование с AnyLogic 5 / Ю. Г. Карпов – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 400 с.

93. Лямин, А.В., Русак А.В. Построение и исследование имитационных моделей систем массового обслуживания. Методическое пособие / А.В. Лямин, А.В. Русак. –СПб.: СПбГУ ИТМО, 2012. – 35 с.
94. Рыжиков, Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технологии / Ю.И. Рыжиков. – СПб.: КОРОНА принт; М.: Альтекс-А, 2004. – 384 с.
95. Якимов, И. М. Моделирование сложных систем в среде имитационного моделирования GPSS W с расширенным редактором / И. М. Якимов, Ю.Г Старцева, А. П. Кирпичников, В. В. Мокшин // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т. 17, № 4. – С. 298-303.
96. Якимов, И.М. Комплексный подход к моделированию сложных систем в системе VRwin-Arena / И. М. Якимов, А. П. Кирпичников, В. В. Мокшин, Г.В. Костюхина, Т.А. Шигаева // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т. 17, № 6. – С. 287-292.
97. Якимов, И. М. Моделирование сложных систем в имитационной среде ANYLOGIC / И. М. Якимов, А. П. Кирпичников, В. В. Мокшин // Вестник Казанского технологического университета. – 2014. – Т. 17, № 13. – С. 352-357.
98. Якимов, И.М. Сравнение результатов имитационного моделирования вероятностных объектов в системах: Anylogic, Arena, Bizagi modeler, GPSS W / И. М. Якимов, А. П. Кирпичников, Ю. Г. Исаева, Г. Р. Аляутдинова // Вестник Технологического университета. – 2015. – Т. 18, № 16. – С. 260-264.
99. Якимов, И.М. Аналитическое и имитационное моделирование замкнутых систем массового обслуживания / И. М. Якимов, А. П. Кирпичников, Г. Р. Зайнуллина, З. Т. Яхина // Вестник Технологического университета. – 2015. – Т. 18, № 13. – С. 176-181.
100. Боев, Б.В. Компьютерное моделирование в среде AnyLogic: учеб. пособие для вузов / В.Д. Боев. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 198 с.
101. Боев, В.Д. Исследование адекватности GPSS World и AnyLogic при моделировании дискретно-событийных процессов: монография / В.Д. Боев. – СПб.: ВАС, 2011. – 404 с.

102. Самарханов, И. З. О применимости имитационного моделирования для расчета показателей систем массового обслуживания с неэквивалентными каналами / И. З. Самарханов // Вестник Технологического университета. – 2022. – Т. 25, № 6. – С. 101-104.

103. Якимов, И.М. Оценка достоверности результатов имитационного моделирования по результатам аналитического моделирования / И. М. Якимов, А. П. Кирпичников, Г. Р. Зайнуллина, З. Т. Яхина // Вестник Технологического университета. – 2015. – Т. 18, № 6. – С. 173-178.

104. Фадеев, С. Н. О разделении каналов в системе массового обслуживания с неограниченной очередью каналов в системе массового обслуживания с неограниченной очередью / С. Н. Фадеев // Ученые записки Санкт-Петербургского имени В.Б. Бобкова филиала Российской таможенной академии. – 2019. – № 3(71). – С. 37-40.

105. Фадеев, С. Н. Оценка эффективности разделения каналов в системе массового обслуживания с неограниченной очередью / С. Н. Фадеев, Н. А. Брейдер // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2021. – Т. 64, № 5. – С. 351-356.

106. Тарасов, В. Н. Имитационное моделирование системы массового обслуживания с гиперэрланговским и эрланговским распределениями / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева // Информационные технологии. – 2024. – Т. 30. – № 1. – С. 3–12.

107. Самарханов, И. З. Система массового обслуживания с каналами различной производительности, функционирующая в условиях смешанных потоков / И. З. Самарханов, Е. А. Печеный, Н. К. Нуриев // Современные наукоемкие технологии. – 2024. – № 3. – С. 87-92.

108. Самарханов, И. З. О разделении N-канальной СМО с каналами различной производительности на N независимых одноканальных систем / И. З. Самарханов, Е. А. Печеный, Н. К. Нуриев // Научно-технический вестник Поволжья. – 2023. – № 9. – С. 43-49.

109. Самарханов, И. З. О влиянии разделения каналов различной производительности на показатели эффективности системы массового обслуживания / И. З. Самарханов // Сборник трудов одиннадцатой всероссийской научно-практической конференции по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности «Имитационное моделирование. Теория и практика» (ИММОД-2023). – Казань: Издательство АН РТ, 2023. – С. 698-703.

Приложение А

Классификация систем массового обслуживания с каналами различной производительности

