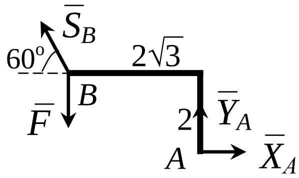
ОЛИМПИАДА КНИТУ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ
(раздел «Теоретическая механика»)
Вариант 1

Решения



1. Введем три реакции связи (см. рис.). Записывать уравнения для проекций нет смысла, так как каждое из них содержит одну из неизвестных реакций шарнирно-неподвижной опоры A. Поэтому достаточно записать одно уравнение равновесия для моментов:

$$\sum_k M_A(\overline{F}_k) = F \cdot 2\sqrt{3} + S_B \cos 60^o \cdot 2 - S_B \sin 60^o \cdot 3 = 0 .$$

$$300 \cdot 2\sqrt{3} + S_B\left(0{,}5 \cdot 2 - (\sqrt{3}/2) \cdot 2\sqrt{3}\right) = 0 .$$

$$S_B = 100\sqrt{3} \quad (\text{Н}).$$

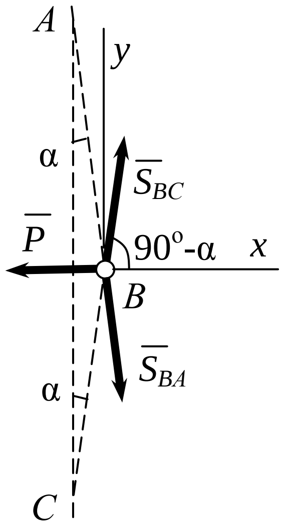
2. В любой момент при $0 \le t \le 0{,}5$ с: $x_A = OA$, $y_B = OB$. По теореме Пифагора:

$$y_B = \sqrt{AB^2 - x_A^2} = \sqrt{l^2 - (l \sin \pi t)^2} = l \cos \pi t .$$

$$v_{By} = \frac{dy_B}{dt} = -\pi l \sin \pi t .$$

Величина v_B принимает наибольшее значение при $t = 0{,}5$ с:

$$v_B = \pi l \ (\text{м/с}).$$



3. Рассмотрим сначала равновесие узла B. Приложенные к нему сила $\overline{P}$ и силы реакций шарнирных стержней $\overline{S}_{BA}$, $\overline{S}_{BC}$ образуют систему сходящихся сил. Уравнения равновесия:

$$\sum_k F_{kx} = -P + S_{BC} \cos(90° - \alpha) + S_{BA} \cos(90° - \alpha) = 0 ,$$

$$\sum_k F_{ky} = S_{BC} \sin(90° - \alpha) - S_{BA} \sin(90° - \alpha) = 0 .$$

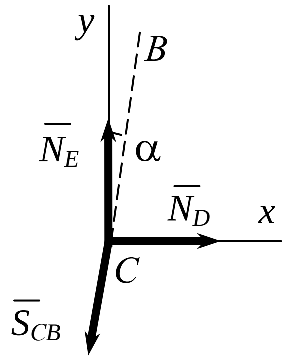
С учетом $\sin(90^o - \alpha) = \cos\alpha$, запишем иначе:

$$\sum_k F_{kx} = -P + S_{BC} \sin\alpha + S_{BA} \sin\alpha = 0 ,$$

$$\sum_k F_{ky} = S_{BC} \cdot \cos\alpha - S_{BA} \cdot \cos\alpha = 0 .$$

Из 2-го уравнения следует: $S_{BC} = S_{BA}$. Тогда из 1-го уравнения:

$$S_{BC} = \frac{P}{2\sin\alpha} . \qquad (1)$$



Далее рассмотрим равновесие узла *C*. Отбрасывая связь *BC*, заменяем её на силу реакции связи $\overline{S}_{CB}$. По 3-му закону Ньютона: $\overline{S}_{BC} = -\overline{S}_{CB}$. Со стороны гладкой боковой поверхности *D* действует нормальная реакция $\overline{N}_D$, а со стороны тела *E* будет реакция $\overline{N}_E$, направленная вверх. Опять получаем систему сходящихся сил. Достаточно записать одно уравнение равновесия для неё:

$$\sum_k F_{ky} = N_E - S_{CB}\cos\alpha = 0. \qquad (2)$$

С учетом (1) получим из (2):

$$N_E = S_{BC}\cos\alpha = \frac{P\,\mathrm{ctg}\,\alpha}{2}. \qquad (3)$$

Все значения сил реакций получились положительными. Значит, их направления на чертеже были выбраны верно.

По 3-му закону Ньютона, силы, с которыми штамп *C* и тело *E* действуют друг на друга: $\overline{Q} = -\overline{N}_E$. Тогда искомая сила давления *Q* определяется из (3).

4. *1 способ.* Для кратчайшего решения достаточно записать одно уравнение равновесия *AB*:

$$\sum_k M_C(\overline{F}_k) = -R_A \sin\alpha \cdot x + R_B(a - x) = 0.$$

Отсюда, из условия $R_A = R_B$:

$$x = \frac{a}{1 + \sin\alpha}.$$

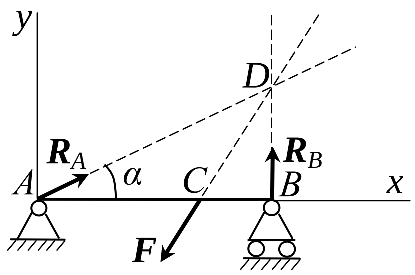


Рис.1а

Направление силы $\overline{F}$ подбирается так, чтобы $\{\overline{R}_A, \overline{R}_B, \overline{F}\}$ образовала либо систему сходящихся сил при $\alpha \neq \pi/2$ (по теореме о трех непараллельных силах, рис. 1а), либо систему параллельных сил при $\alpha = \pi/2$ (рис. 1б).

Учитывая в соотношении для x условия $\sin\alpha \leq 1$ и $x \leq a$, получим ответ: $a/2 \leq x \leq a$.

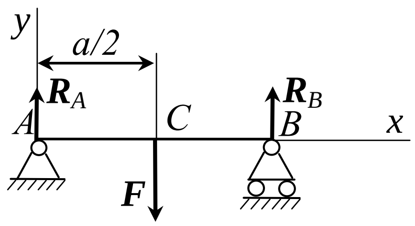


Рис.1б

2 способ. Если в качестве моментной точки выбрать точку *A*, то для решения понадобится записать все три уравнения равновесия *AB* (рис. 2):

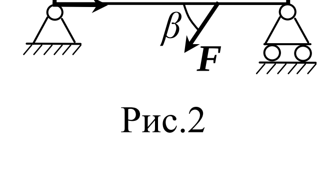


Рис.2

$$\sum_k F_{kx} = X_A - F\cos\beta = 0, \qquad (1)$$

$$\sum_k F_{ky} = Y_A + R_B - F\sin\beta = 0, \qquad (2)$$

$$\sum_k M_A(\overline{F}_k) = R_B\, a - F\sin\beta \cdot x = 0. \qquad (3)$$

Из (1) и (2):

$$X_A^2 = F^2 \cos^2 \beta . \qquad (4)$$

$$Y_A^2 = R_B^2 - 2R_B F \sin\beta + F^2 \sin^2 \beta . \qquad (5)$$

Складываем (4) и (5) и учитываем $R_A^2 = X_A^2 + Y_A^2 = R_B^2$:

$$-2R_B F \sin\beta + F^2 = 0 .$$

Отсюда, так как $F \neq 0$:

$$F = 2R_B \sin\beta . \qquad (6)$$

Из (3):

$$R_B = F \sin\beta \cdot \frac{x}{a} . \qquad (7)$$

Подставляем (7) в (6) и сокращаем F:

$$x = \frac{a}{2\sin^2 \beta} . \qquad (8)$$

Из условий $\sin^2 \beta \le 1$ и $x \le a$ из (8) получим ответ: $a/2 \le x \le a$.