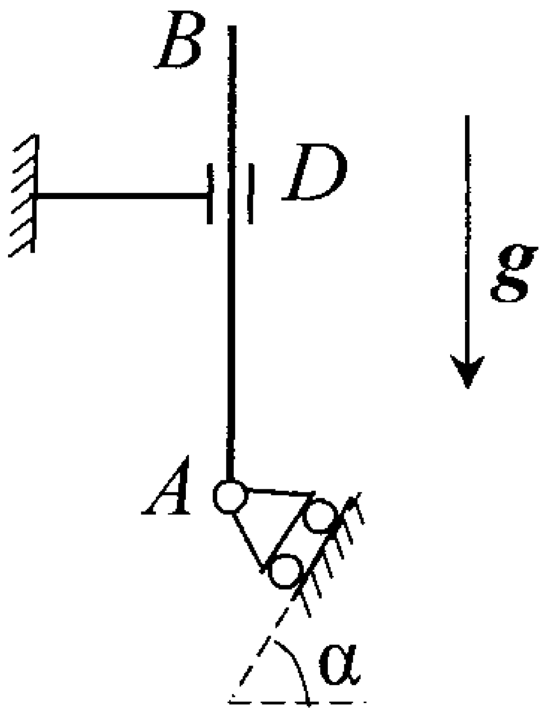
Зональная (II тур Всероссийской) студенческая олимпиада
по теоретической механике

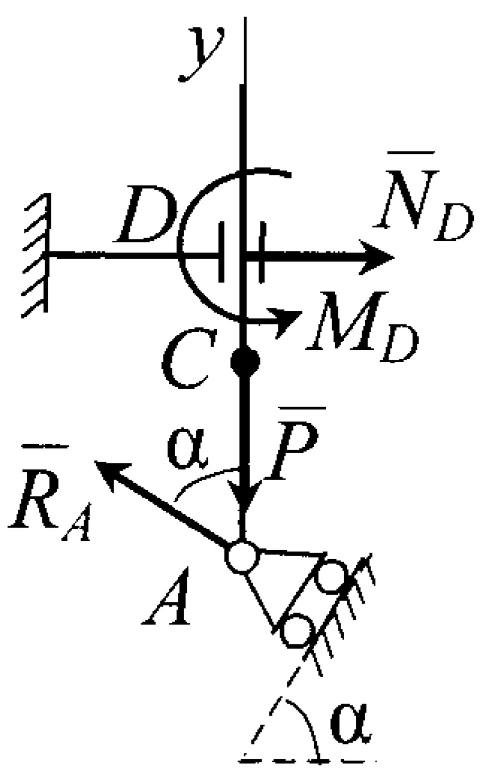
Казанский национальный исследовательский технологический университет
5-7 декабря 2012 г.

Решения задач теоретического конкурса

Автор задач: Муштари Айрат Ильдарович, доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ



Задача С1 (3 балла). Прямолинейный стержень AB веса P закреплен в вертикальном положении с помощью скользящей заделки D (которая препятствует горизонтальному перемещению и повороту стержня), а также катковой опоры A. Известны угол наклона опорной плоскости α и расстояние $AD = a$. Определите момент скользящей заделки M_D.



Решение. В скользящей заделке D возникают сила реакции $\overline{N}_D$ в направлении, в котором невозможно перемещение тела, а также момент заделки M_D. На стержень AB также действуют сила тяжести $\overline{P}$ и реакция катковой опоры $\overline{R}_A$. Для решения задачи достаточно двух уравнений равновесия тела AB:

$$\sum F_{ky} = R_A \cos\alpha - P = 0, \qquad (1)$$

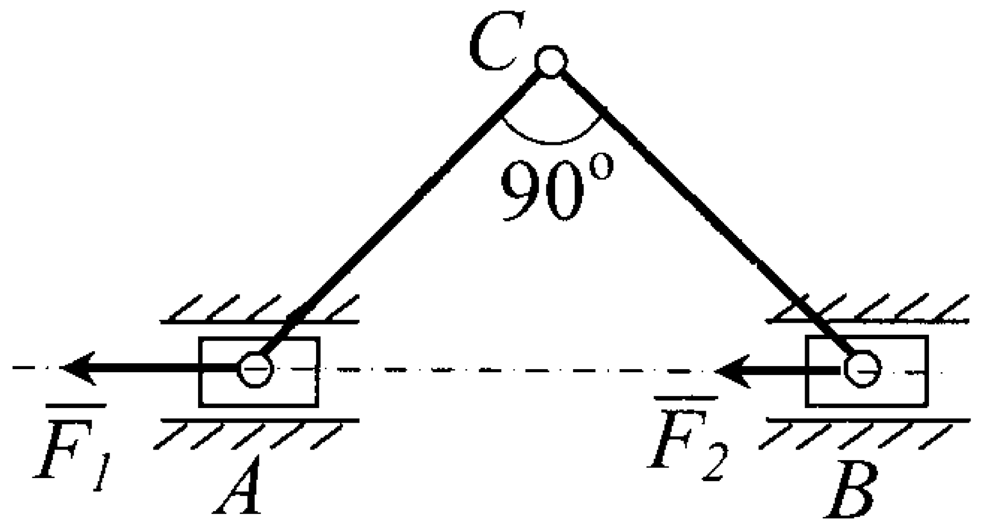
$$\sum M_D(\overline{F}_k) = -R_A \sin\alpha \cdot a + M_D = 0. \qquad (2)$$

Из (2): $M_D = R_A a \sin\alpha$. Из (1): $R_A = P/\cos\alpha$. Отсюда

$$M_D = Pa \operatorname{tg}\alpha.$$

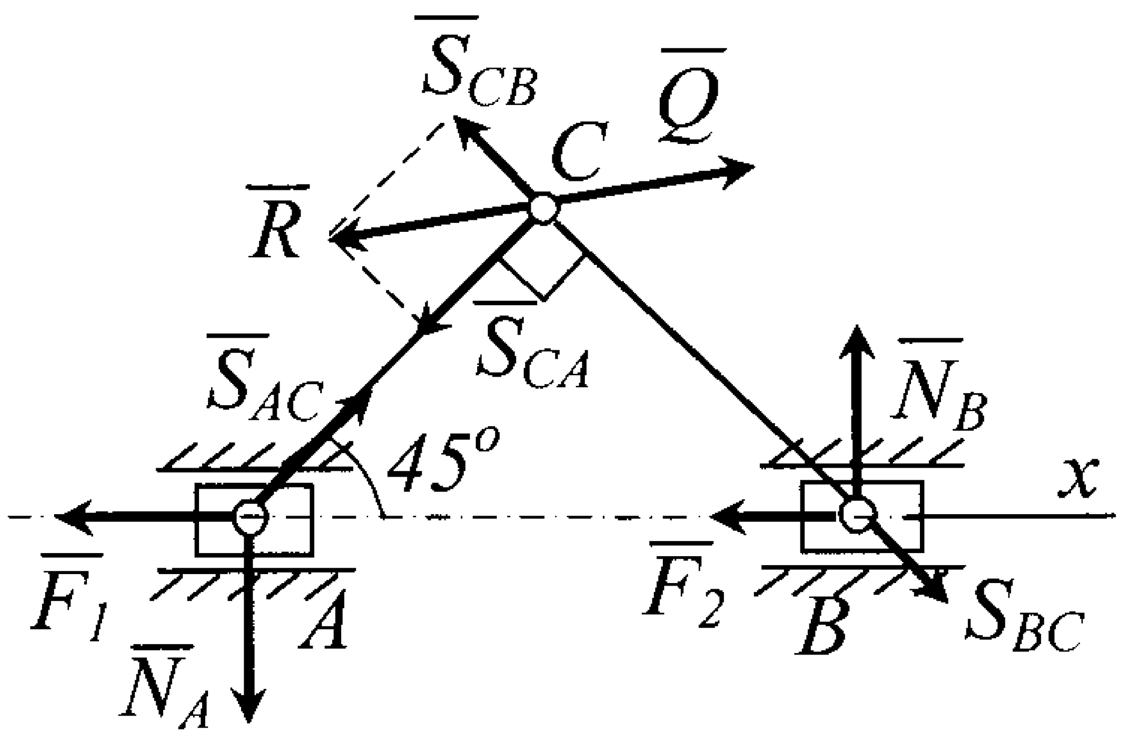
Замечание. Для решения неважно, однороден стержень или неоднороден. Его центр тяжести C может находиться в любой точке отрезка AB.

Ответ. $M_D = Pa \operatorname{tg}\alpha$.



Задача С2 (5 баллов). В шатунном механизме $AC = BC$. К ползунам A и B приложены вдоль прямой AB заданные силы $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$. Весом механизма и трением пренебрегаем. В рассматриваемом положении механизма угол ACB прямой. Какую по величине силу Q надо приложить к шарниру C для равновесия механизма?

Решение.



1-й способ. Уравнение равновесия системы сходящихся сил, приложенных к точке A, в проекции на горизонтальную ось x:

$$\sum F_{kx} = S_{AC}\cos 45^o - F_1 = 0,$$

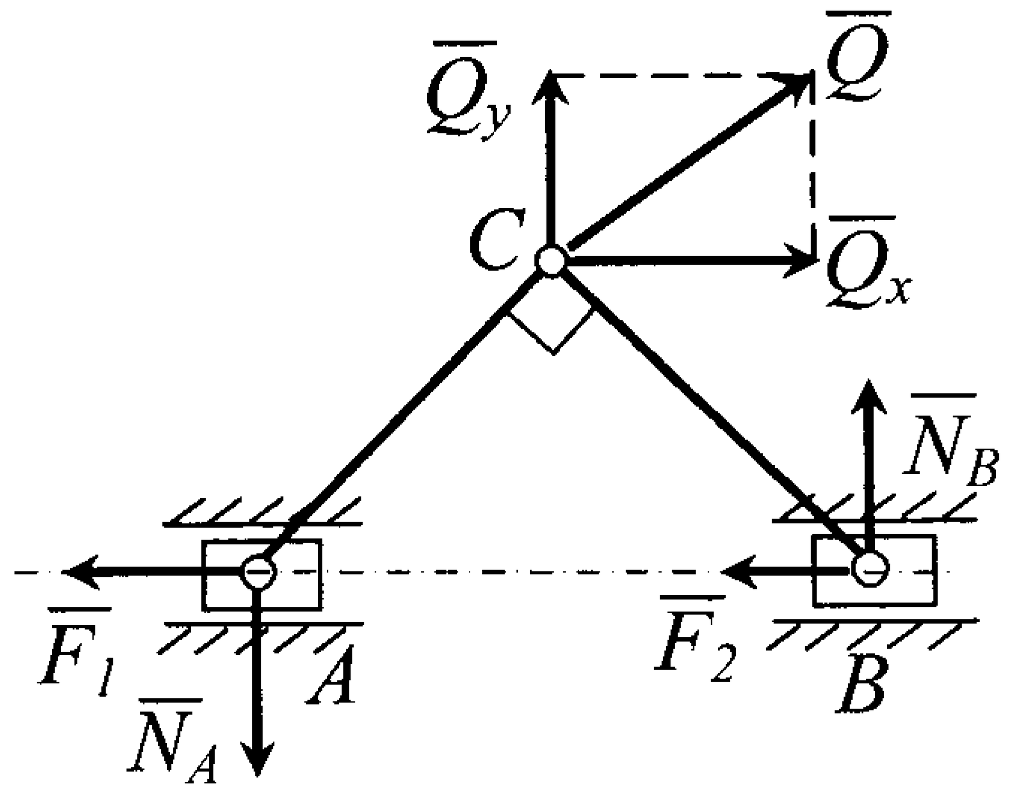
откуда $S_{AC} = \sqrt{2}\,F_1$. Из аналогичного уравнения для точки B получаем: $S_{BC} = \sqrt{2}\,F_2$. Условие равновесия системы сходящихся сил, приложенных к точке C: $\overline{R} + \overline{Q} = 0$, где $\overline{R} = \overline{S}_{CA} + \overline{S}_{CB}$. Из условия задачи следует, что $\overline{S}_{CA} \perp \overline{S}_{CB}$. Тогда

$$R = \sqrt{S_{CA}^2 + S_{CB}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\,F_1\right)^2 + \left(\sqrt{2}\,F_2\right)^2} = \sqrt{2(F_1^2 + F_2^2)}\,.$$

Так как $Q = R$, то

$$Q = \sqrt{2(F_1^2 + F_2^2)}\,.$$

Замечание. Направления сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ (влево или вправо) на ответ не влияют.



2-й способ. Искомую силу представим в виде: $\overline{Q} = \overline{Q}_x + \overline{Q}_y$. Обозначим $AB = a$. Уравнения равновесия всей конструкции ABC:

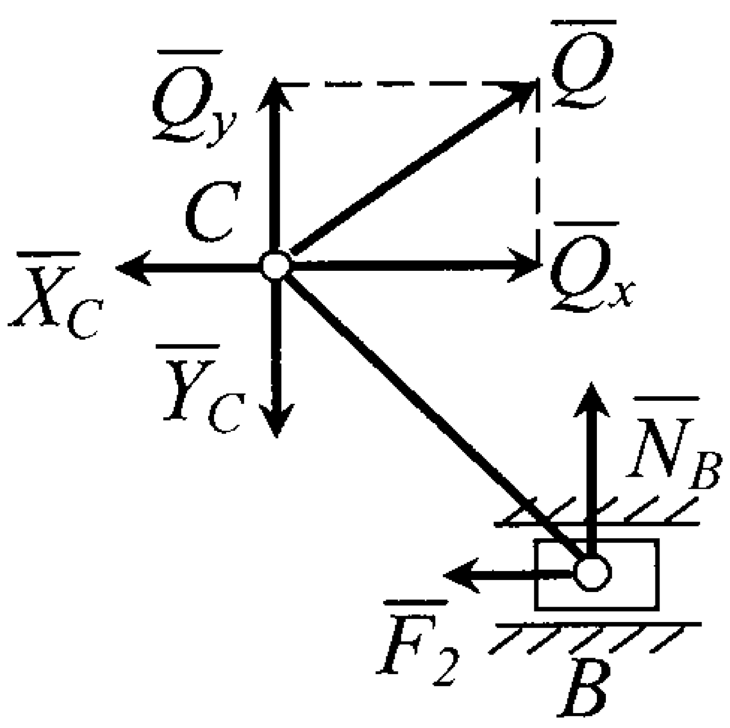
$$\sum F_{kx} = -F_1 - F_2 + Q_x = 0,$$

$$\sum M_A(\overline{F}_k) = N_B a - Q_x(a/2) + Q_y(a/2) = 0,$$

откуда

$$Q_x = F_1 + F_2, \qquad (1)$$

$$Q_y = Q_x - 2N_B. \qquad (2)$$



Для равновесия BC:

$$\sum M_C(\overline{F}_k) = N_B(a/2) - F_2(a/2) + X_C\cdot 0 + Y_C\cdot 0 = 0,$$

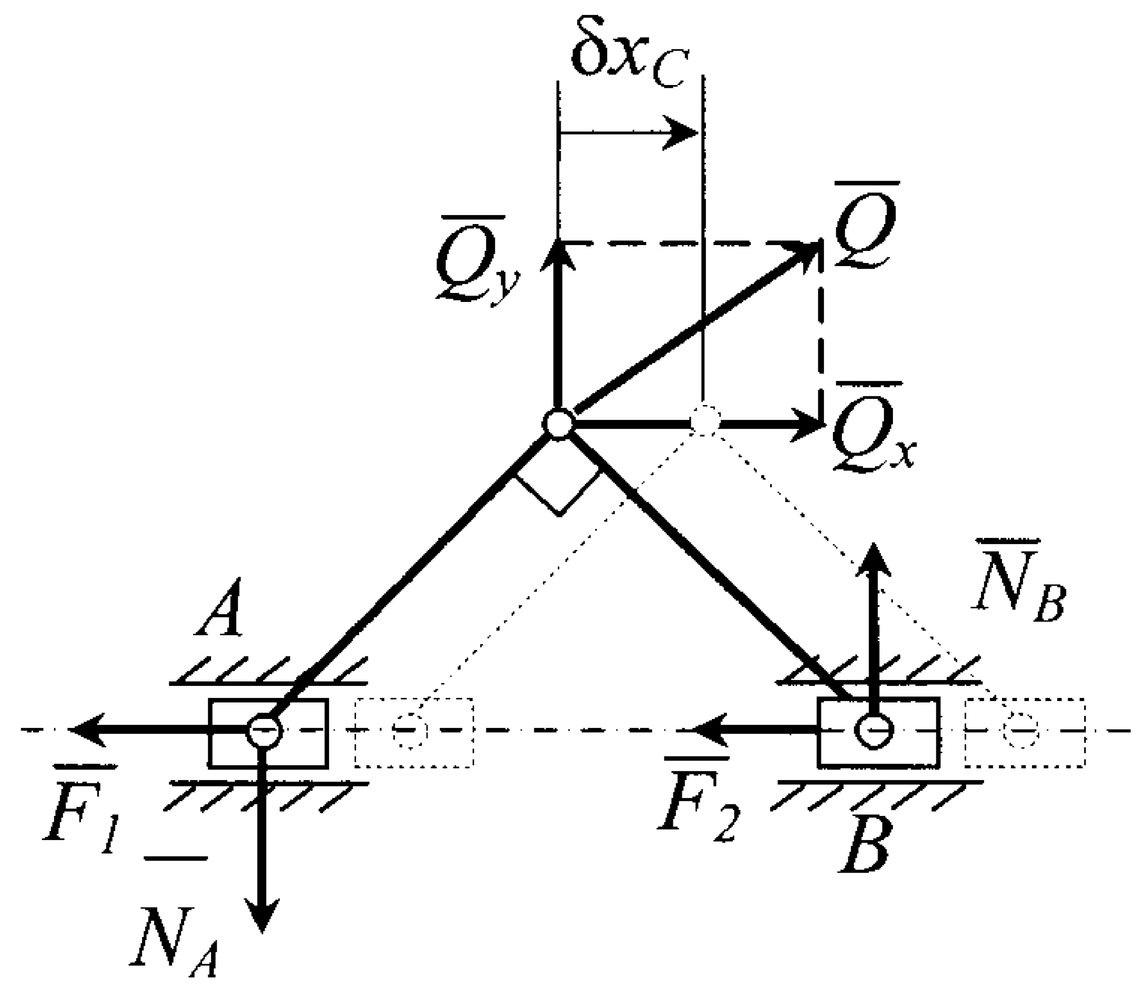
$$N_B = F_2. \qquad (3)$$

Учитывая (1) и (3) в (2):

$$Q_y = F_1 - F_2. \qquad (4)$$

Из (1) и (4):

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \sqrt{2(F_1^2 + F_2^2)}\,.$$



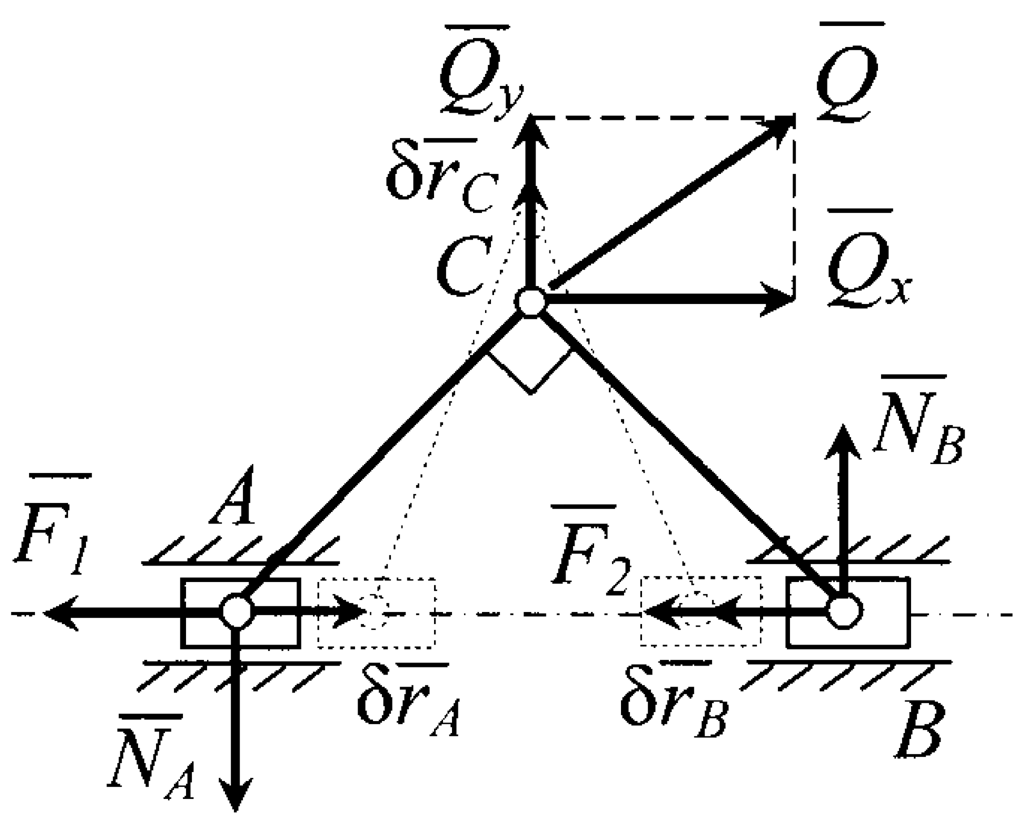
3-й способ. Можно применить принцип возможных перемещений для системы с двумя степенями свободы. Искомую силу так же представляем в виде: $\overline{Q} = \overline{Q}_x + \overline{Q}_y$.

Придадим точке C возможное перемещение только по горизонтали δx_C. При этом вся конструкция переместится как единое тело, и возможные перемещения всех её точек будут одинаковыми, равными δx_C. Уравнение принципа возможных перемещений будет иметь вид:

$$\sum \delta A_k = -F_1\,\delta x_C - F_2\,\delta x_C + Q_x\,\delta x_C = 0,$$

откуда $Q_x = F_1 + F_2$.

Придадим точке C возможное перемещение только по вертикали δy_C. По аналогу теоремы о проекциях скоростей, записанному для возможных перемещений, для стержня AC:



$$\delta y_C \cos 45^o = \delta s_A \cos 45^o,$$

откуда $\delta s_A = \delta y_C$. Аналогично получаем: $\delta s_B = \delta y_C$. Уравнение принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A_k = -F_1\,\delta s_A + F_2\,\delta s_B + Q_y\,\delta y_C =$$

$$= (-F_1 + F_2 + Q_y)\,\delta y_C = 0.$$

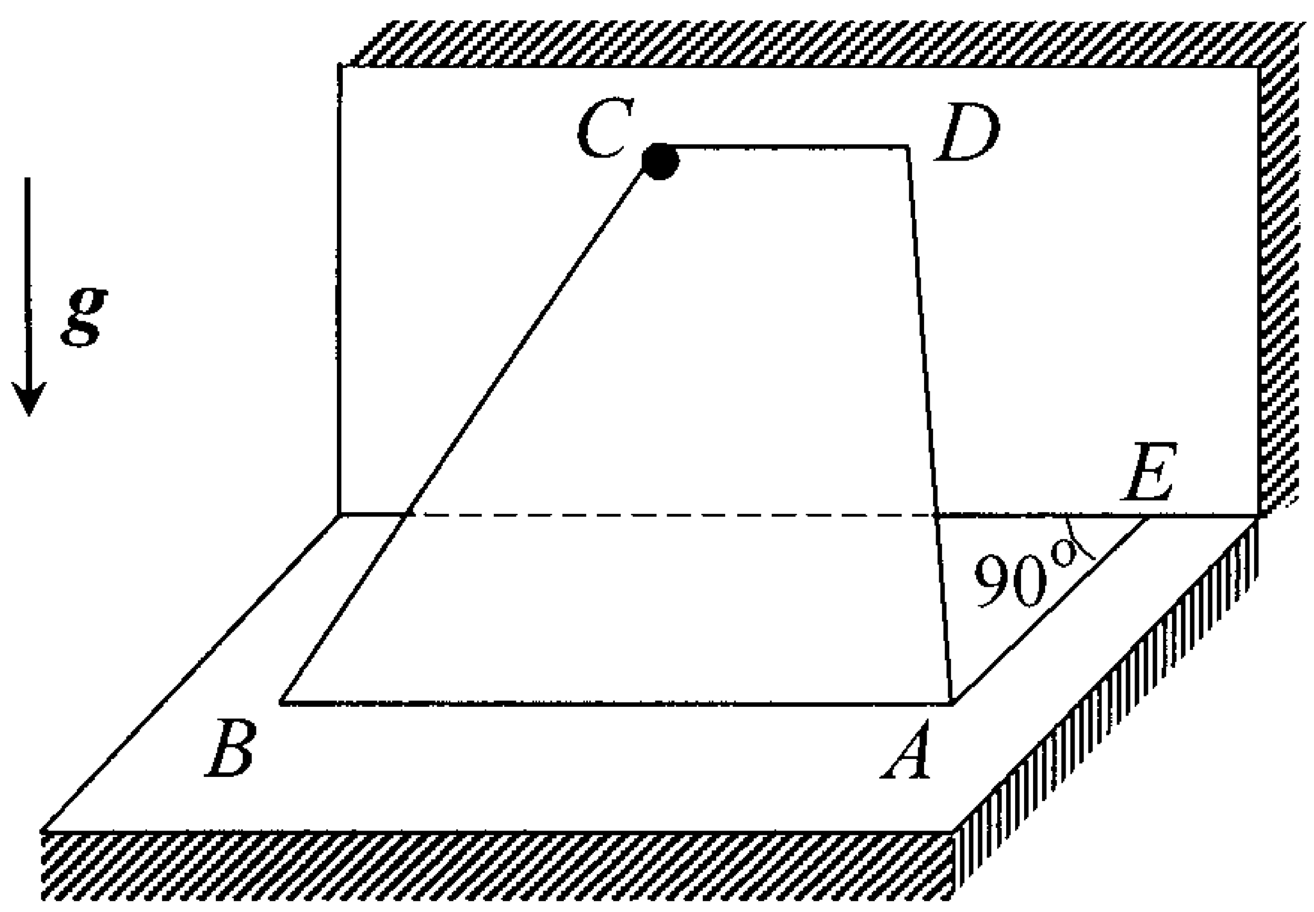
Отсюда $Q_y = F_1 - F_2$.

Далее, аналогично второму способу, получаем:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \sqrt{2(F_1^2 + F_2^2)}.$$

(Этот способ предложен Б.Р.Хакимовым.)

Ответ. $Q = \sqrt{2(F_1^2 + F_2^2)}$.



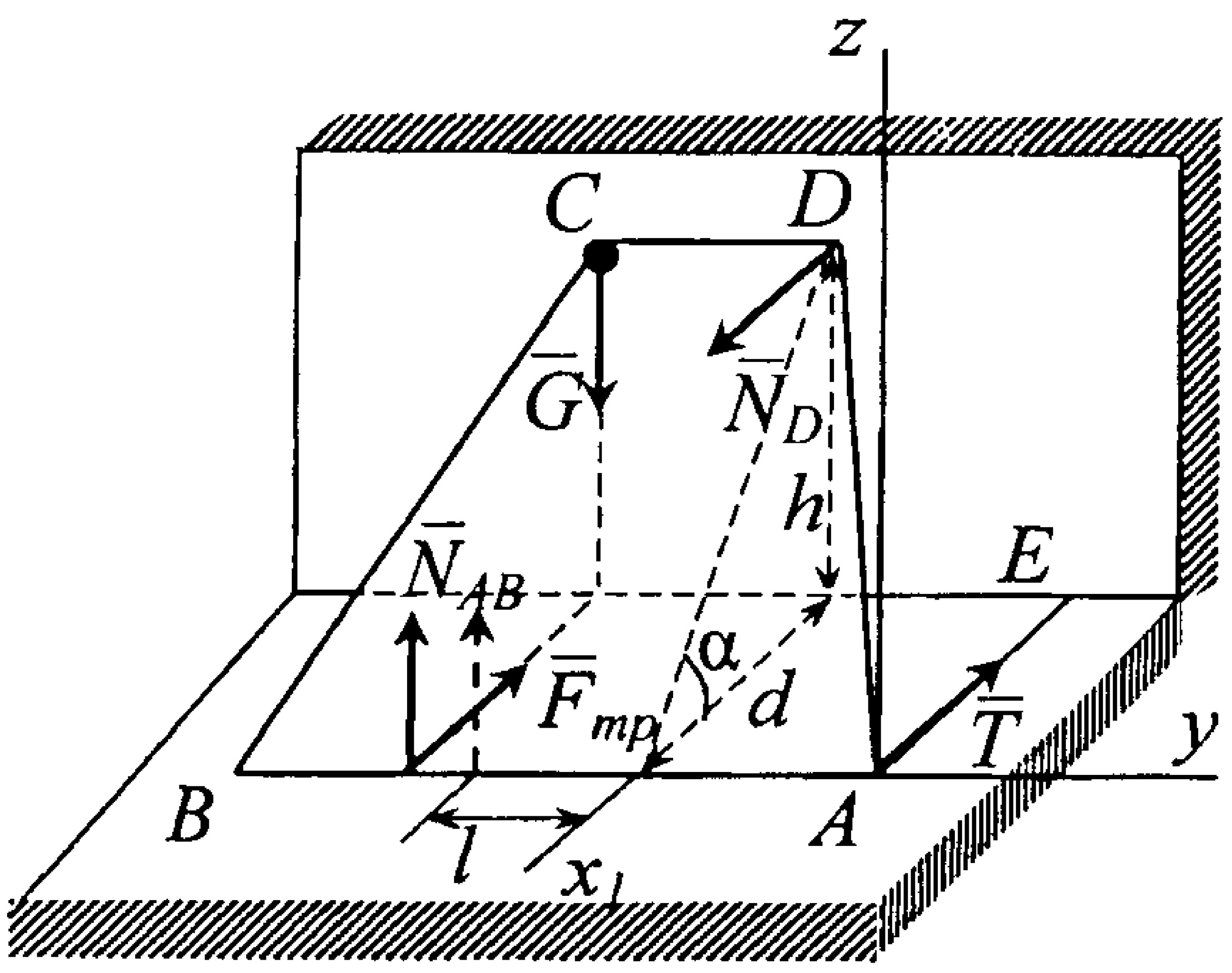
Задача С3 (6 баллов). Пластина $ABCD$ имеет форму равнобедренной трапеции, $AD = BC$, основания $AB = a$, $CD = b$, где a, b – произвольные величины. Пластина опирается стороной AB на шероховатую горизонтальную плоскость с коэффициентом трения f, а стороной CD – на гладкую вертикальную плоскость. Нерастяжимая нить AE прикреплена одним концом к точке A пластины, а другим концом закреплена в точке

E на линии пересечения опорных плоскостей. Сторона AB параллельна этой линии, а нить AE перпендикулярна ей. К вершине C пластины прикрепили материальную точку. Весом пластины пренебрегаем. Определите минимальное значение угла $\alpha > 0$ наклона пластины к горизонтальной плоскости для равновесия пластины.

Решение. Рассмотрим вначале случай $a > b$.

Пластина находится в равновесии под действием пяти сил: силы тяжести $\overline{G}$, приложенной в точке C; равнодействующих сил нормальных реакций $\overline{N}_{AB}$, $\overline{N}_{CD}$, перпендикулярных опорным плоскостям; силы натяжения нити $\overline{T}$ вдоль AE; равнодействующей сил трения $\overline{F}_{тр}$ на горизонтальной плоскости. По рисунку видно, что первые четыре их этих сил находятся в плоскости, перпендикулярной оси y, то есть их проекции на y равны нулю.

Покажем, что в момент выхода пластины из равновесия нить AE останется в покое. Предположим противное: A начнет поворачиваться вокруг E, например, против часовой стрелки (в сторону положительного направления оси y). Тогда из теоремы о проекциях скоростей для AB следует, что проекции малых перемещений всех точек AB на ось y положительны. Значит, все элементарные силы трения $d\overline{F}_{тр}$ на малых участках отрезка AB имеют отрицательные проекции на ось y. Тогда проекция их равнодействующей силы $F_{тр,y} < 0$. Однако это вступает в противоречие с одним из условий равновесия пластины $\sum F_{ky} = 0$. Вывод: $\overline{F}_{тр}$ перпендикулярна оси y.



Таким образом, выход пластины из равновесия возможен лишь за счет поворота пластины вокруг вертикальной оси z, проходящей через точку A. Поэтому при предельном равновесии пластины сторона CD опирается на вертикальную плоскость в точке D. Далее реакцию $\overline{N}_{CD}$ можно обозначить $\overline{N}_D$.

Из уравнения равновесия

$$\sum F_{kz} = -G + N_{AB} = 0 \tag{1}$$

получаем

$$N_{AB} = G. \tag{2}$$

Обозначим через x_1 ось, перпендикулярную y и находящуюся на горизонтальной плоскости ровно под точкой D. Предположим, что точка приложения реакции $\overline{N}_{AB}$ удалена от x_1 на некоторое, пока неизвестное, расстояние l. (Вектор $\overline{N}_{AB}$ с подлежащей определению точкой приложения указан на рисунке пунктиром). Тогда

$$\sum M_{x_1}(\overline{F}_k) = G \cdot b - N_{AB} \cdot l = 0,$$

Отсюда, с учетом (2), получим $l = b$. (Вектор $\overline{N}_{AB}$ с истинной точкой приложения указан на рисунке как обычный вектор без пунктира). В силу $dF_{тр} = fdN$ при предельном равновесии, равнодействующая сила $\overline{F}_{тр}$ приложена в той же точке, что и $\overline{N}_{AB}$. (Для обоснования этого можно от элементарных сил перейти к интегралам от них, которые являются равнодействующими).

Обозначим через d расстояние (по горизонтали) от AB до линии пересечения опорных плоскостей, а через h – высоту расположения CD над этой линией. Запишем еще два уравнения равновесия пластины:

$$\sum M_y(\overline{F}_k) = -G \cdot d + N_D \cdot h = 0, \tag{3}$$

$$\sum M_z(\overline{F}_k) = -F_{тр} \cdot \left(b + \frac{a-b}{2}\right) + N_D \cdot \frac{a-b}{2} = 0. \tag{4}$$

Из (3):

$$N_D = G \cdot \frac{d}{h} = G \operatorname{ctg} \alpha, \tag{5}$$

где α – искомое значение угла наклона пластины. С учетом (2), (5) и $F_{тр} = f N_{AB}$ при предельном равновесии, из (4) получим:

$$-fG \cdot \frac{a+b}{2} + G \operatorname{ctg} \alpha \cdot \frac{a-b}{2} = 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a-b}{f(a+b)},$$

что является ответом при $a > b$.

Рассмотрим случай $a \le b$. Точно так же, как и в предыдущем случае, можно показать, что выход пластины из равновесия, связанный с поворотом нити AE, невозможен.

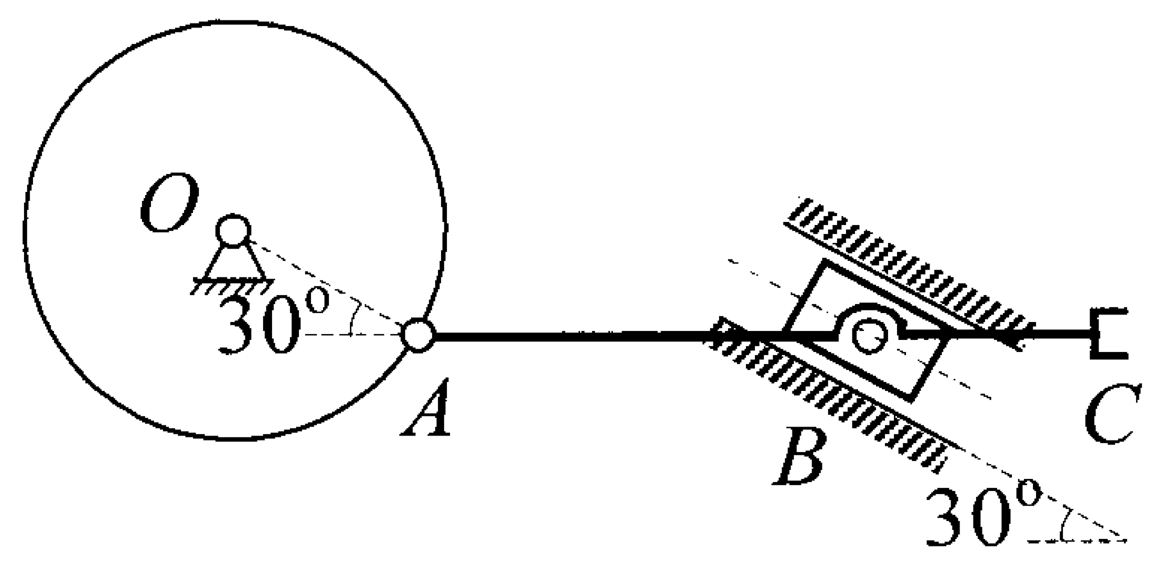
Предположим теперь, что выход из равновесия пластины происходит за счет поворота вокруг оси z, проходящей через точку A. Однако тогда при $a < b$ линия действия силы $\overline{N}_D$ оказалась бы правее оси z, а при $a = b$ эта линия пересекает ось z. Следовательно, $M_z(\overline{N}_D) \le 0$. Однако и $M_z(\overline{F}_{тр}) < 0$. Получаем $\sum M_z(\overline{F}_k) < 0$, что невозможно при равновесии. Значит наше предположение ошибочно и выход из равновесия за счет поворота вокруг оси z невозможен. (Это означает, что равнодействующая сила $\overline{N}_{CD}$ на самом деле приложена к некоторой внутренней точке CD.)

Других возможностей для выхода пластины из равновесия не существует. Следовательно, при $a \le b$ равновесие будет при любом, в том числе бесконечно малом, $\alpha > 0$, то есть $\alpha_{\min} = \varepsilon \to 0$. (Разумеется, равновесие будет и при $\alpha = 0$, когда пластина лежит на горизонтальной плоскости. Но в условие задачи указано, что $\alpha > 0$.)

Замечание. Для полностью строгого решения можно было бы дополнительно привести доказательство невозможности некоторых «экзотических» вариантов выхода из равновесии. В том числе, невозможности выхода пластины из равновесия за счет поворота вокруг z по часовой стрелке, а также невозможности выхода из равновесия с провисанием нити, то есть со смещением точки A в направлении точки E и началом плоскопараллельного движения AB.

Ответ. При $a > b$ $\alpha_{\min} = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{a-b}{f(a+b)}\right)$.

При $a \le b$ $\alpha_{\min} = \varepsilon \to 0$.



Задача К1 (3 балла). В механизме манипулятора к вращающемуся диску в точке A шарнирно присоединен единый стержень AC со схватом C на конце. Стержень шарнирно опирается на ползун B. Размерами схвата пренебрегаем. В указанном на рисунке положении отношение скоростей схвата и ползуна равно $\dfrac{v_C}{v_B} = \sqrt{3}$. Найдите отношение $\dfrac{AB}{BC}$.

Решение. Без потери общности можно считать, что угловая скорость диска направлена, например, по часовой стрелке. Шатун AC совершает плоскопараллельное движение. По направлениям скоростей $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$ строим мгновенный центр скоростей – точку P. Тогда $\bar{v}_C \perp PC$. По теореме о проекциях скоростей для двух точек B и C твердого тела:

$$v_B \cos 30^o = v_C \cos\gamma\,, \tag{1}$$

где γ – угол между $\bar{v}_C$ и BC. Тогда, с учетом условия задачи $v_C = v_B\sqrt{3}$, получим: $\cos\gamma = 1/2$, откуда $\gamma = 60^o$. Значит, угол $B\hat{C}P = 90^o - 60^o = 30^o$. Но угол $P\hat{B}C = 120^o$.

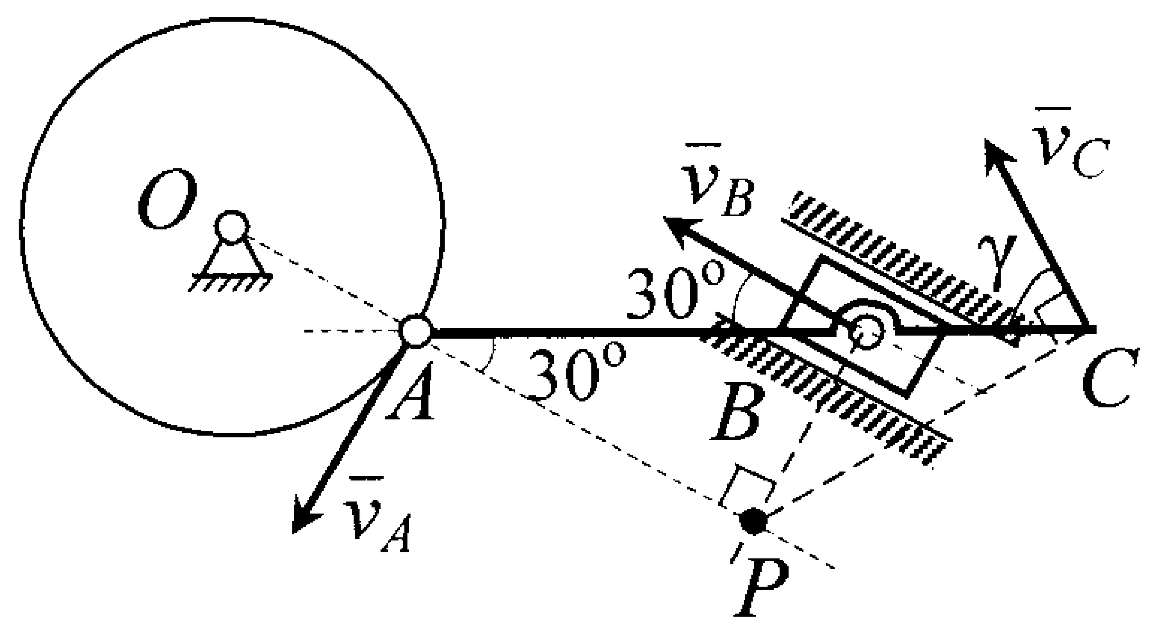


Рис. 1

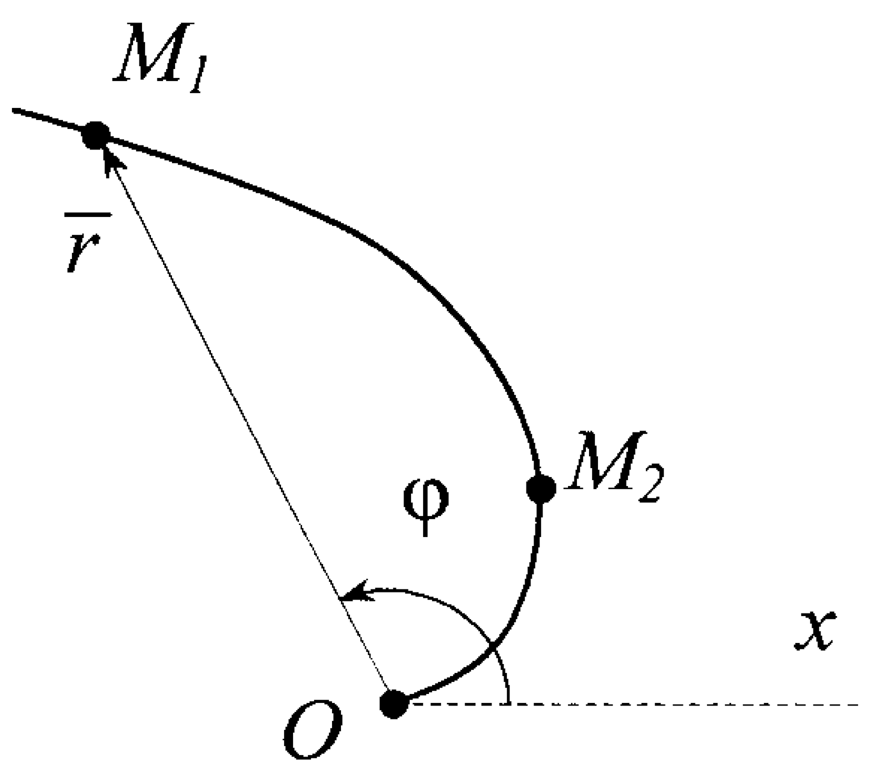
Тогда $B\hat{C}P = 180^o - 120^o - 30^o = 30^o$. Отсюда следует, что треугольник PBC равнобедренный, $PB = BC$. С другой стороны, для прямоугольного треугольника PAB будет $PB = AB/2$. Получаем, что $BC = AB/2$, то есть:

$$\frac{AB}{BC} = 2\,.$$

Замечание. Вместо теоремы о проекциях

скоростей (1) возможно другое рассуждение. Из условия: $\frac{v_C}{v_B} = \frac{CP}{BP} = \sqrt{3}$, то есть $CP = BP\sqrt{3}$. По теореме синусов для треугольника PBC: $\frac{\sin 120^o}{CP} = \frac{\sin B\hat{C}P}{BP}$, откуда $\sin B\hat{C}P = 1/2$, то есть угол $B\hat{C}P = 30^o$. Далее рассуждаем как в основном решении.

Ответ. $\frac{AB}{BC} = 2$.



Задача К2 (7 баллов). Точка M_1 движется по закону: $r(t) = vt$, $\varphi(t) = \frac{\pi v}{3l} t$ при $t \geq 0$, где константы $v, l > 0$. Здесь r – расстояние от неподвижной точки O до точки M_1, φ – угол между осью Ox и прямой OM_1. Обозначим $\tau = \frac{l}{v}$. Точка M_2 движется вслед за точкой M_1 по той же траектории, причем в любой момент $t \geq \tau$ точка M_2 находится в положении, в котором τ секундами ранее находилась точка M_1. Для момента $t = \tau$ (т.е. когда точка M_2 еще только начинает движение из положения O) найдите:

1) v_{12} – величину скорости изменения расстояния (по прямой) от M_1 до M_2;

2) ε_{12} – величину углового ускорения прямой, проходящей через M_1 и M_2.

Решение.

1 способ (геометрический). Движение точки M_1 рассмотрим как сложное движение. При этом переносное движение связано с поворотом луча OM_1 вокруг точки O, а относительное движение – это движение M_1 вдоль луча OM_1.

Из условия запаздывания точки M_2 по отношению к точке M_1 следует закон движения M_2: $r_2(t) = v(t-\tau)$, $\varphi_2(t) = \frac{\pi v}{3l}(t-\tau)$ при $t \geq \tau$. Сложное движение точки M_2 рассмотрим по аналогии с точкой M_1.

По теореме о сложении скоростей при сложном движении для точек M_1 и M_2:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_{1,e} + \bar{v}_{1,r}, \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_{2,e} + \bar{v}_{2,r}. \qquad (1)$$

Переносная угловая скорость и относительная скорость для точки M_1 оказываются постоянными, равными:

$$\omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\pi v}{3l}, \quad v_{r,1} = \frac{dr}{dt} = v. \qquad (2)$$

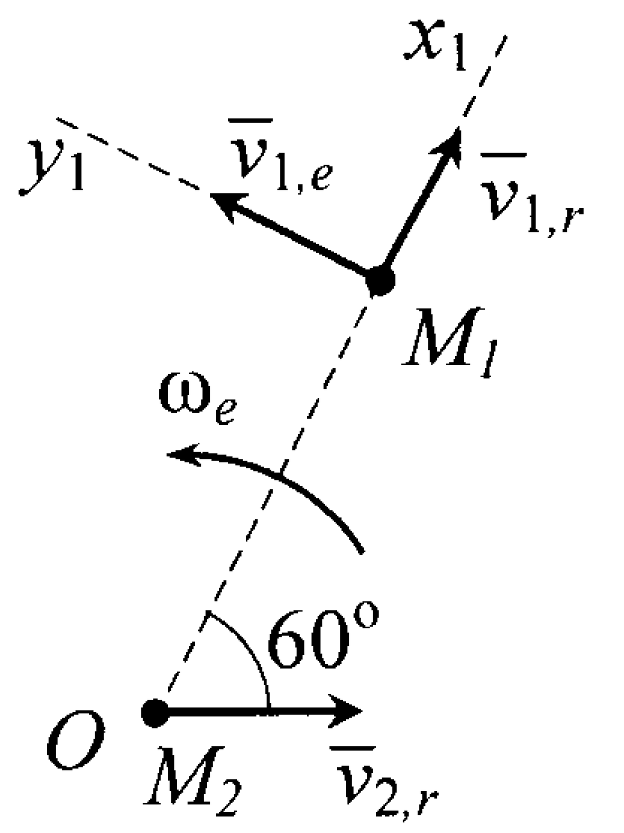


Рис. 1

Такие же соотношения получаются и для точки M_2: $v_{r,2} = v$.

В момент $t = \tau$ (рис.1):

$$r(\tau) = v\tau = l\,, \quad \varphi(\tau) = \frac{\pi v}{3l}\cdot\frac{l}{v} = \frac{\pi}{3}\ \text{рад}, \quad r_2(\tau) = 0\,. \qquad (3)$$

Последняя формула в (3) означает, что при $t = \tau$ точка M_2 находится в положении O и ещё только начинает свое движение, $M_1M_2 = OM_2 = l$. Переносная скорость точки M_1, с учетом (2), в момент $t = \tau$:

$$v_{1,e} = r\omega_e = v\tau\cdot\frac{\pi v}{3l} = \frac{\pi}{3}v\,. \qquad (4)$$

Переносная скорость точки M_2 в момент $t = \tau$, с учетом (3):

$$v_{2,e} = r_2\omega_e = 0\,. \qquad (5)$$

Теперь введем в рассмотрение еще одно сложное движение: движение M_1 относительно M_2. Переносное движение здесь связано с вращением прямой M_1M_2 с некоторой угловой скоростью ω_{12}, а относительное движение связано с изменением расстояния M_1M_2 с искомой скоростью $v_{1/2,r} = v_{12}$. При этом движении: $\overline{v}_{1/2} = \overline{v}_{1/2,e} + \overline{v}_{1/2,r}$ (рис.2). С другой стороны, абсолютная скорость при этом сложном движении $\overline{v}_{1/2} = \overline{v}_1 - \overline{v}_2$. Тогда с учетом (1): $\overline{v}_{1/2} = \overline{v}_{1,e} + \overline{v}_{1,r} - \overline{v}_{2,e} - \overline{v}_{2,r}$. Отсюда:

$$\overline{v}_{1/2,e} + \overline{v}_{1/2,r} = \overline{v}_{1,e} + \overline{v}_{1,r} - \overline{v}_{2,e} - \overline{v}_{2,r}\,. \qquad (6)$$

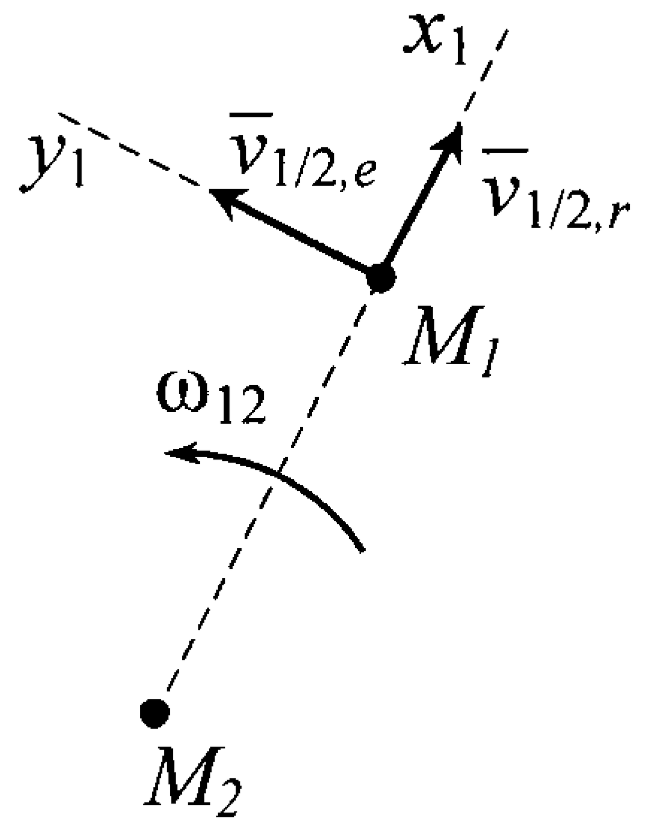


Рис. 2

Проецируем (6) на ось x_1 вдоль прямой M_1M_2. С учетом (2), (4), получаем первый ответ:

$$v_{1/2,r} = v_{1,r} - v_{2,r}\cos 60^o\,, \qquad (7)$$

$$v_{12} = v - v\cos 60^o = v/2\,.$$

Для решения второй части задачи найдем также угловую скорость поворота прямой M_1M_2 в момент $t = \tau$. Для этого проецируем (6) на ось y_1, с учетом (2)-(5) и $v_{1/2,e} = M_1M_2\cdot\omega_{12} = l\,\omega_{12}$:

$$v_{1/2,e} = v_{1,e} - (-v_{2,r}\sin 60^o) = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)v\,,$$

$$\omega_{12} = \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{v}{l}\,. \qquad (8)$$

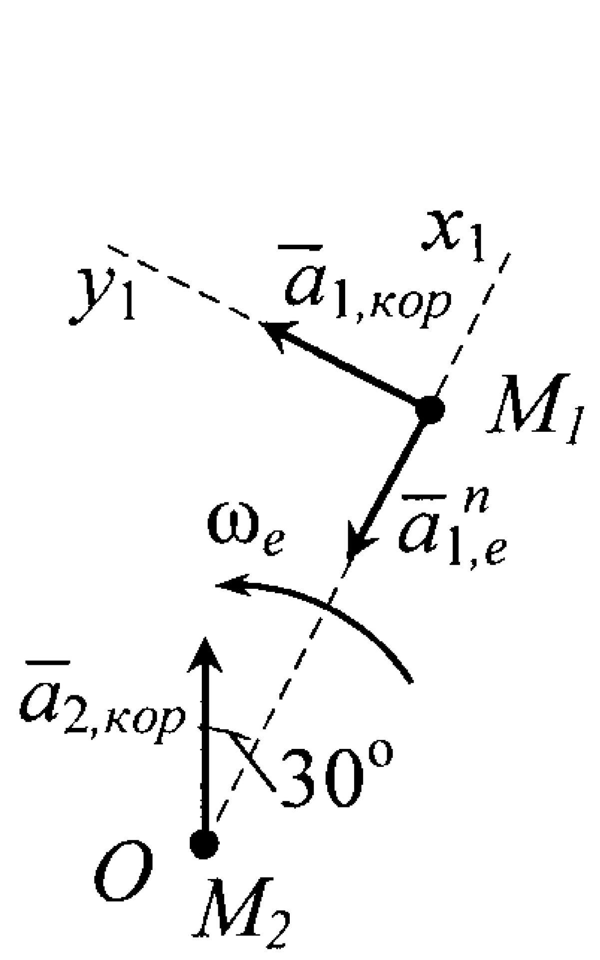


Рис. 3

Переносное вращение и относительное движение каждой из точек M_1 и M_2 являются равномерными, причем относительное движение прямолинейно. Поэтому ненулевыми компонентами их абсолютных ускорений в любой момент будут лишь нормальные компоненты переносных ускорений, а также ускорения Кориолиса. Дополнительно, при $t=\tau$, так как $r_2(\tau)=0$, то первое из этих ускорений для точки M_2 также равно нулю: $a_{2,e}^n=0$. Итак, соотношения для абсолютных ускорений (рис.3):

$$\bar{a}_1 = a_{1,e}^n + \bar{a}_{1,кор}, \qquad \bar{a}_2 = \bar{a}_{2,кор}. \tag{9}$$

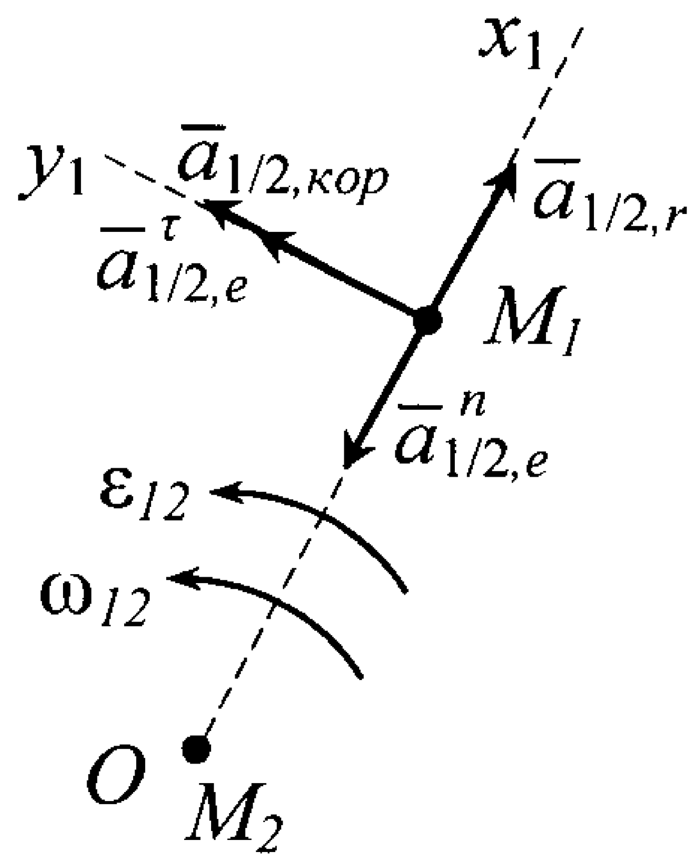


Рис. 4

Тогда вектор ускорения точки M_1 относительно M_2:

$$\bar{a}_{1/2} = \bar{a}_1 - \bar{a}_2 = a_{1,e}^n + \bar{a}_{1,кор} - \bar{a}_{2,кор}. \tag{10}$$

С другой стороны, при сложном движении M_1 относительно M_2 (рис.4):

$$\bar{a}_{1/2} = \bar{a}_{1/2,e}^{\tau} + \bar{a}_{1/2,e}^{n} + \bar{a}_{1/2,r} + \bar{a}_{1/2,кор}. \tag{11}$$

Приравниваем правые части (10), (11):

$$a_{1,e}^n + \bar{a}_{1,кор} - \bar{a}_{2,кор} = \bar{a}_{1/2,e}^{\tau} + \bar{a}_{1/2,e}^{n} + \bar{a}_{1/2,r} + \bar{a}_{1/2,кор}. \tag{12}$$

Искомое угловое ускорение ε_{12} содержится в ускорении $a_{1/2,e}^{\tau} = M_1M_2 \cdot \varepsilon_{12} = l\varepsilon_{12}$. Поэтому удобно спроецировать (12) на ось y_1:

$$a_{1,кор} - a_{2,кор}\sin 30^o = a_{1/2,e}^{\tau} + a_{1/2,кор}. \tag{13}$$

Здесь, с учетом (2):

$$a_{1,кор} = 2\omega_e v_{1,r} = \frac{2\pi}{3}\frac{v^2}{l}, \quad a_{2,кор}^n = 2\omega_e v_{2,r} = \frac{2\pi}{3}\frac{v^2}{l},$$

А с учетом (7), (8):

$$a_{1/2,кор} = 2\omega_{12} v_{1/2,r} = 2\cdot\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{v}{l}\cdot\frac{v}{2} = \left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{v^2}{l}.$$

Подставляем последние две формулы в (13). После сокращений получаем:

$$a_{1/2,e}^{\tau} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v^2}{l}, \qquad \varepsilon_{1/2} = \frac{a_{1/2,e}^{\tau}}{l} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v^2}{l^2}. \tag{14}$$

Знак «-» означает, что истинное направление $\varepsilon_{1/2}$ по часовой стрелке. Взяв (14) по модулю, получаем ответ на второй вопрос задачи:

$$\varepsilon_{1/2} = \frac{\sqrt{3}\,v^2}{2l^2}.$$

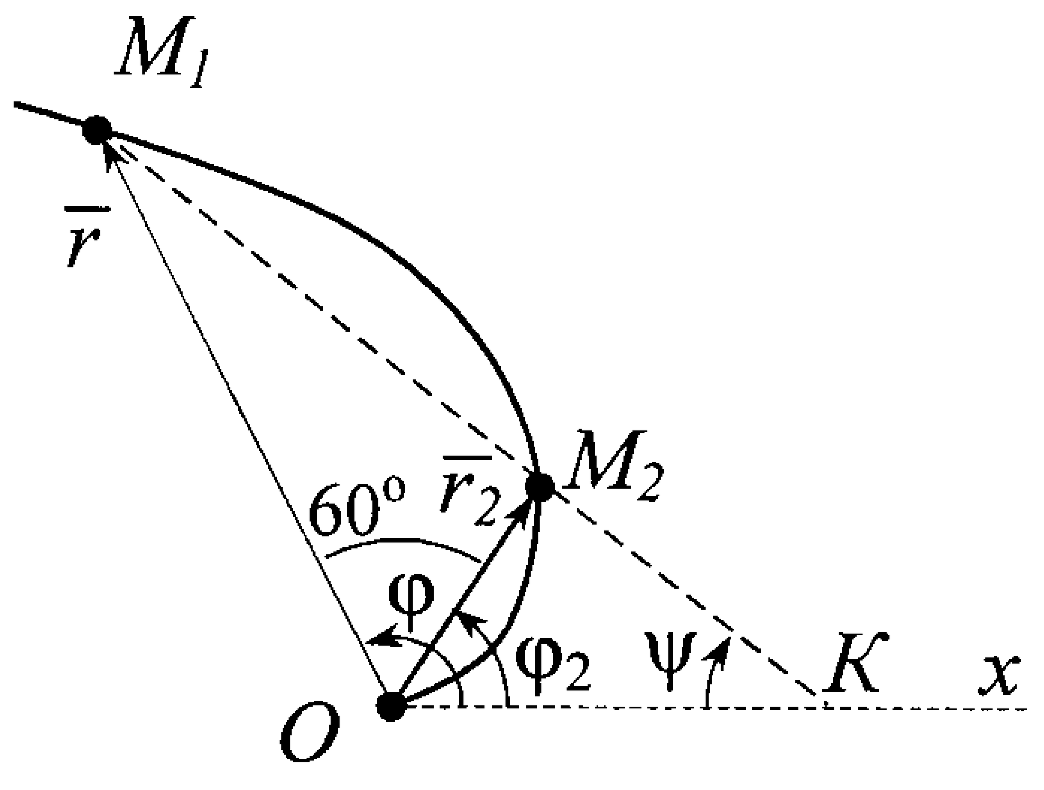


Рис. 5

2 способ (аналитический). Угол φ_2 между осью x и радиус-вектором $\bar{r}_2$ точки M_2 определяется, исходя из запаздывания её движения на время τ по сравнению с точкой M_1: $\varphi_2 = \frac{\pi v}{3l}(t-\tau) = \varphi_2 - \frac{\pi}{3}$, то есть угол M_1OM_2 равен

60^o (рис.5). Кроме того, $r_2 = v(t-\tau) = vt - l$. Тогда по теореме косинусов для треугольника OM_1M_2:

$$M_1M_2^2 = r^2 + r_2^2 - 2rr_2\cos 60^o = r^2 + r_2^2 - rr_2. \qquad (15)$$

$$M_1M_2 = \sqrt{r^2 + r_2^2 - rr_2}\,. \qquad (16)$$

Чтобы найти искомую $v_{12} = \dfrac{d(M_1M_2)}{dt}$, продифференцируем (15) и учтем $\dot{r} = \dot{r}_2 = v$:

$$2M_1M_2 \cdot v_{12} = 2rv + 2r_2v - vr_2 - rv. \qquad (17)$$

В момент $t = \tau$ выразим из (17) после подстановки (16) и $r = l$, $r_2 = 0$:

$$v_{12} = \frac{2lv - lv}{2\sqrt{l^2}} = \frac{v}{2}.$$

Угловое ускорение прямой, проходящей через M_1 и M_2, определяется так: $\varepsilon_{12} = \ddot{\Psi}$, где Ψ – угол наклона прямой M_1M_2, отсчитываемый от оси x по часовой стрелки. По теореме синусов для треугольника OKM_2:

$$\frac{\sin\Psi}{r_2} = \frac{\sin\varphi_2}{KM_2}. \qquad (18)$$

По теореме синусов для треугольника OKM_1:

$$\frac{\sin\Psi}{r} = \frac{\sin\varphi}{M_1M_2 + KM_2}. \qquad (19)$$

Соотношения (16), (18), (19) отражают все необходимые геометрические связи. Выражаем KM_2 из (18) и подставляем в (19), где учитываем также (16):

$$\frac{\sin\Psi}{r} = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{r^2 + r_2^2 - rr_2} + \dfrac{\sin\varphi_2}{\sin\Psi}\cdot r_2},$$

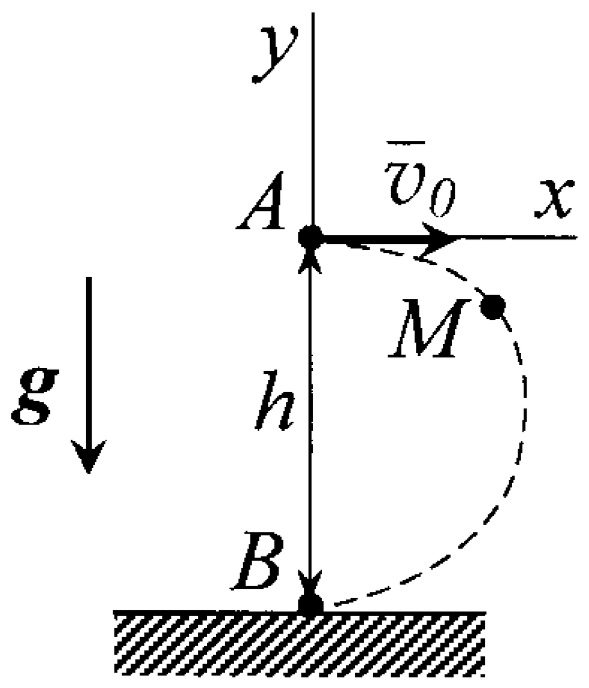
$$\sin\Psi\sqrt{r^2 + r_2^2 - rr_2} + r_2\sin\varphi_2 = r\sin\varphi. \qquad (20)$$

Это основное геометрическое соотношение для Ψ. Дифференцируем (20) по времени, учитывая $\dot{r} = \dot{r}_2 = v$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_2 = \omega$. Затем в полученном довольно длинном выражении, которое мы здесь не приводим, полагаем $t = \tau$. При этом учитываем $\varphi = \pi/3$, $\varphi_2 = 0$, $r_2 = 0$, $\Psi = 2\pi/3$, за счет чего часть слагаемых обращается в ноль. Получаем $\dot{\Psi} = -\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\dfrac{v}{l}$, что совпадает с (8). Здесь отличие в знаке связано с направлением отсчета Ψ по часовой стрелке. Второе дифференцирование (20) по времени приводит к громоздкому выражению, которое мы здесь также не приводим. Из него при $t = \tau$ находим:

$$\ddot{\Psi} = \frac{\sqrt{3}\ v^2}{2l^2},$$

где знак «+» говорит о том, что искомое угловое ускорение $\varepsilon_{12} = \ddot{\Psi}$ направлено в сторону увеличения угла Ψ, то есть по часовой стрелке.

Ответ. $v_{1/2} = \dfrac{v}{2}$. $\varepsilon_{12} = \dfrac{\sqrt{3}\ v^2}{2l^2}$.



Задача Д1 (3 балла). Материальная точка M массы m в момент $t = 0$ находится в положении A на высоте h над горизонтальной поверхностью и получает скорость v_0. Вектор $\bar{v}_0$ сонаправлен горизонтальной оси x. На точку, помимо силы тяжести, действует переменная сила $\overline{Q}$, направленная противоположно оси x. $Q_x(t) = -kmgt$. При каком значении коэффициента k точка M в момент контакта с плоскостью окажется в положении B на вертикальной оси y, проходящей через точку A?

Решение. Дифференциальные уравнения движения материальной точки M в проекциях на оси x, y:

$$m\frac{dv_x}{dt} = -kmgt, \quad m\frac{dv_y}{dt} = -mg.$$

Разделяем переменные в каждом из этих ДУ и интегрируем:

$$\int dv_x = -kg\int tdt, \quad \int dv_y = -g\int dt.$$

$$v_x = -kg\frac{t^2}{2} + C_1, \quad v_y = -gt + C_2.$$

Подставляя при $t = 0$ начальные условия $v_x(0) = v_0$, $v_y(0) = 0$, находим $C_1 = v_0$, $C_2 = 0$, откуда

$$v_x = -kg\frac{t^2}{2} + v_0, \quad v_y = -gt.$$

$$\frac{dx}{dt} = -kg\frac{t^2}{2} + v_0, \quad \frac{dy}{dt} = -gt.$$

Вновь разделяем переменные и интегрируем при начальных условиях $x(0) = 0$, $y(0) = 0$. Получаем закон движения точки M:

$$x = -kg\frac{t^3}{6} + v_0 t, \quad y = -g\frac{t^2}{2}.$$

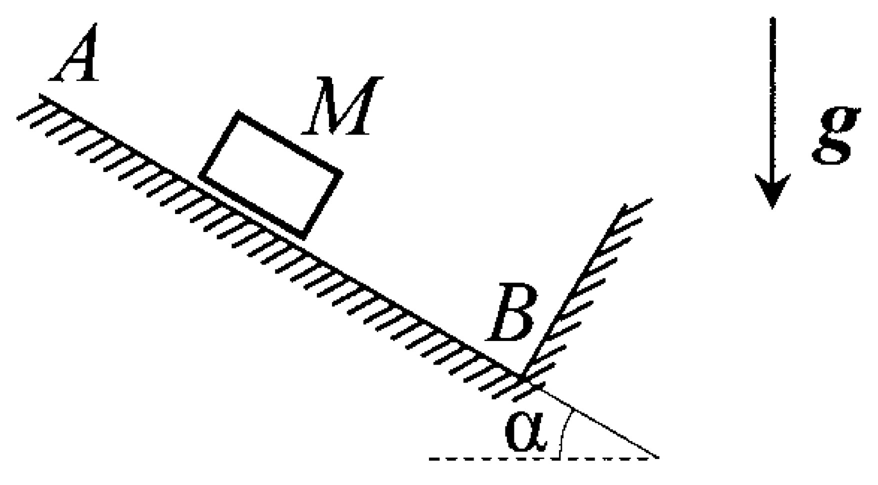
В момент $t = t_1$ контакта точки M с плоскостью её координаты: $x_1 = 0$, $y_1 = -h$. Подставляем в закон движения:

$$0 = -kg\frac{t_1^3}{6} + v_0 t_1, \quad -h = -g\frac{t_1^2}{2}.$$

Из первого соотношения: $k = \dfrac{6v_0}{gt_1^2}$. Подставляем сюда из второго соотношения $gt_1^2 = 2h$. Получаем окончательно:

$$k = \frac{6v_0}{2h} = \frac{3v_0}{h}.$$

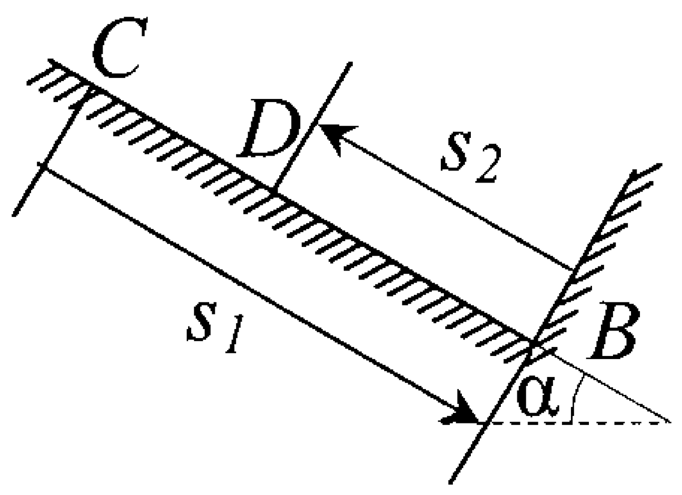
Ответ. $k = \dfrac{3v_0}{h}$.



Задача Д2 (5 баллов). Материальная точка M находится на шероховатой плоскости с углом наклона α. Коэффициент трения равен f, причем $f < \operatorname{tg}\alpha$. Вначале точка M была в покое в положении A. Ниже вдоль плоскости на расстоянии $AB = l$ установлена перпендикулярно AB абсолютно упругая стенка (т.е. после удара о стенку модуль скорости точки остается прежним). Определите длину всего пути, который пройдет точка M до полного прекращения своего движения.

Решение.

1 способ. Для выхода точки из равновесия должно выполняться $mg\sin\alpha - fmg\cos\alpha > 0$, что обеспечивается условием задачи $f < \operatorname{tg}\alpha$.



Пусть материальная точка M в некоторый момент находится в покое в некотором положении C на наклонной плоскости. По теореме об изменении кинетической энергии материальной точки при прохождении пути s_1 из положения C до положения B:

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_C^2}{2} = A_G + A_{F_{тр}}.$$

При $v_C = 0$, с учетом $A_G = mgH = mgs_1\sin\alpha$, $A_{F_{тр}} = -F_{тр}s_1 = -fmgs_1\cos\alpha \cdot s_1$:

$$\frac{mv_B^2}{2} = mgs_1\sin\alpha - fmgs_1\cos\alpha. \qquad (1)$$

Аналогично, после абсолютно упругого отскока точки M из положения B до остановки в положении D при прохождении точкой пути s_2:

$$-\frac{mv_B^2}{2} = -mgs_2\sin\alpha - fmgs_2\cos\alpha. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует: $(\sin\alpha - f\cos\alpha)s_1 = (\sin\alpha + f\cos\alpha)s_2$, откуда

$$s_2 = \frac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha}s_1 = ks_1, \qquad (3)$$

где обозначено $k = \dfrac{\sin\alpha - f\cos\alpha}{\sin\alpha + f\cos\alpha} < 1$.

Начиная с момента $t = 0$, точка M проходит путь $s_1 = l$ до точки B, затем после отскока, с учетом (3), путь $s_2 = ks_1 = kl$ до положения покоя. Далее точка M вновь начинает опускаться. Но при этом расстояние до точки B будет уже меньше: $s_1 = kl$, а из (3): $s_2 = ks_1 = k^2 l$. И так далее. Этот процесс продолжается до полной остановки точки. Длина всего пройденного точкой пути определяется с учетом формулы для суммы геометрической прогрессии и последующей подстановки значения k:

$$s = (l + kl) + (kl + k^2 l) + (k^2 l + k^3 l) + \ldots = -l + 2l\left(1 + k + k^2 + k^3 + \ldots\right) =$$

$$= l\left(-1 + \frac{2}{1-k}\right) = \frac{1+k}{1-k}l = \frac{(\sin\alpha + f\cos\alpha) + (\sin\alpha - f\cos\alpha)}{(\sin\alpha + f\cos\alpha) - (\sin\alpha - f\cos\alpha)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f}l.$$

Замечание. Вместо теоремы об изменении кинетической энергии в этом способе можно использовать ДУ движения материальной точки с последующим его интегрированием.

2 способ. Возможно красивое короткое решение задачи.

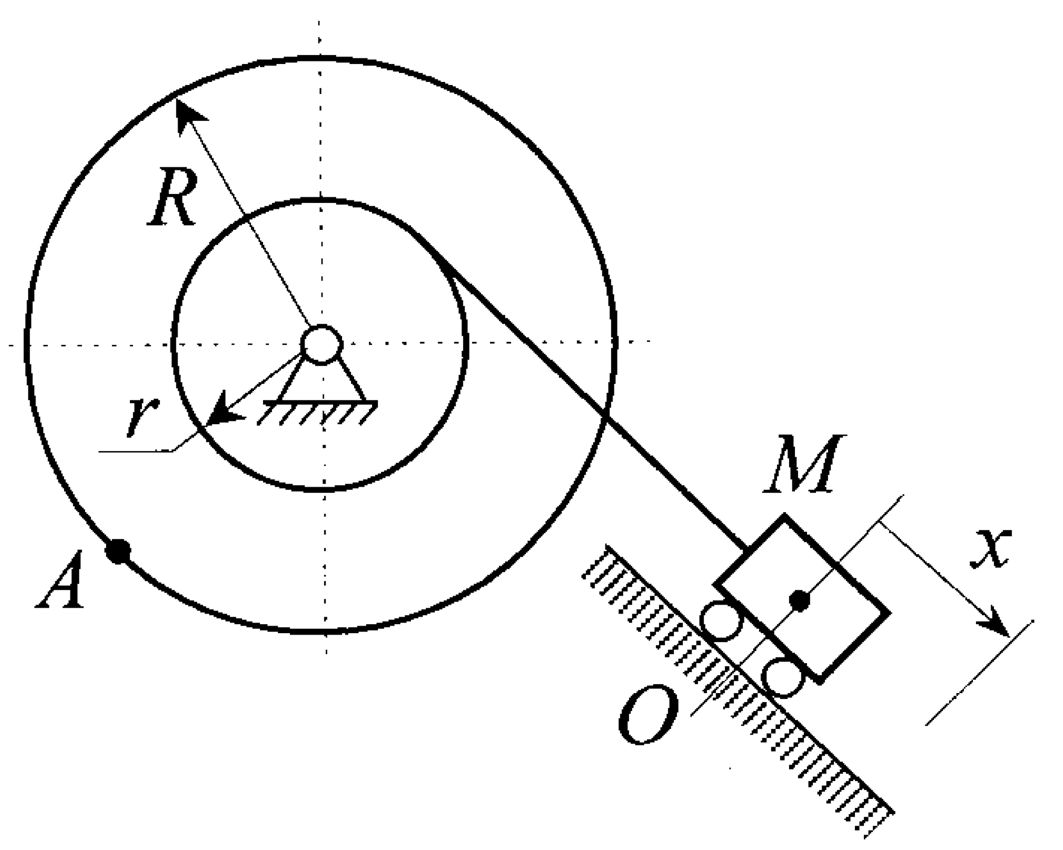
К моменту полного прекращения своего движения точка M находится в положении B и её скорость равна нулю. Поэтому работа силы тяжести на всем пути точки равна $A_G = mgl\sin\alpha$. Элементарная работа силы трения, независимо от того, движется ли точка вниз или вверх по плоскости, равна $dA_{F_{тр}} = -fmg\,ds\cos\alpha$. Поэтому на всем пути вплоть остановки работа сила трения равна $A_{F_{тр}} = -fmg\,s\cos\alpha$. Теорема об изменении кинетической энергии на всем пути:

$$0 = mgl\sin\alpha - fmgs\cos\alpha.$$

Отсюда сразу получаем: $s = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{f}l$.

Ответ. $s = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{f}l$.

Задача Д3 (5 баллов). С внутренней окружности радиуса r колеса с неподвижной осью вращения сходит нить, которую протянули и прикрепили к самодвижущемуся механизму M. Механизм M движется по плоскости, которая параллельна линии протянутой нити, по закону $x = x(t) = 2r(1 - \cos\omega t)$, где $\omega > 0$ –



заданная константа. (На рисунке стрелкой указано направление отсчета x от начального положения O механизма). Момент инерции колеса относительно оси вращения равен J. Центр тяжести колеса находится на оси. Трением в оси пренебрегаем. В начальный момент колесо находилось в покое.

1). В момент $t_1 = \dfrac{\pi}{3\omega}$ определите силу натяжения нити.

2). В момент $t_2 = \dfrac{2\pi}{3\omega}$ определите ускорение точки A на внешней окружности колеса радиуса $R = 2r$.

Решение. Скорость и ускорение точки M:

$$v_{M,x} = \frac{dx}{dt} = 2\omega r \sin\omega t\,, \quad a_{M,x} = \frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega^2 r\cos\omega t\,. \tag{1}$$

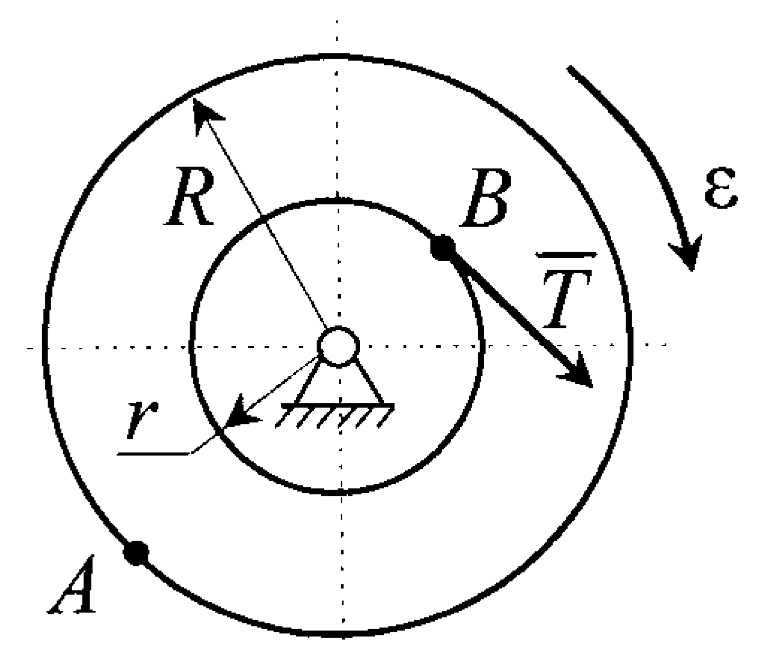


Рис. 2

Обозначим через B точку схода нити с колеса. Модуль углового ускорения колеса при условии, что нить натянута:

$$\varepsilon = \frac{a_B^\tau}{r} = \frac{a_{M,x}}{r} = 2\omega^2\cos\omega t\,. \tag{2}$$

Дифференциальное уравнение вращения колеса вокруг неподвижной оси z:

$$J\varepsilon_z = -T\cdot r\,, \tag{3}$$

где ε_z – алгебраическое угловое ускорение.

По условию вначале колесо было в покое, а нить натянута. Так как сила натяжения нити должна удовлетворять условию $T \ge 0$, то из (3) следует, что $\varepsilon_z = -\varepsilon$, то есть колесо может вращаться только по часовой стрелке. Это вращение либо ускоренное при $T > 0$ (нить натянута), либо равномерное при $T = 0$ (нить провисает). Очевидно, что нить будет натянута, пока точка M движется вниз по плоскости, причем это движение должно быть ускоренным. Итак, условия натяжения нити при $t > 0$:

$$v_{M,x} > 0\,,\ a_{M,x} > 0\,. \tag{4}$$

В момент $t_1 = \dfrac{\pi}{3\omega}$ условия (4) выполняются. Из (2), (3) получаем натяжение нити $T_{(1)}$ в этот момент:

$$T_{(1)} = -\frac{J\varepsilon_z}{r} = \frac{J\varepsilon}{r} = \frac{J\cdot 2\omega^2\cos(\pi/3)}{r} = \frac{J\omega^2}{r}\,.$$

В момент $t_2 = \dfrac{2\pi}{3\omega}$ второе из условий (4) не выполняется. Необходимо дополнительное исследование.

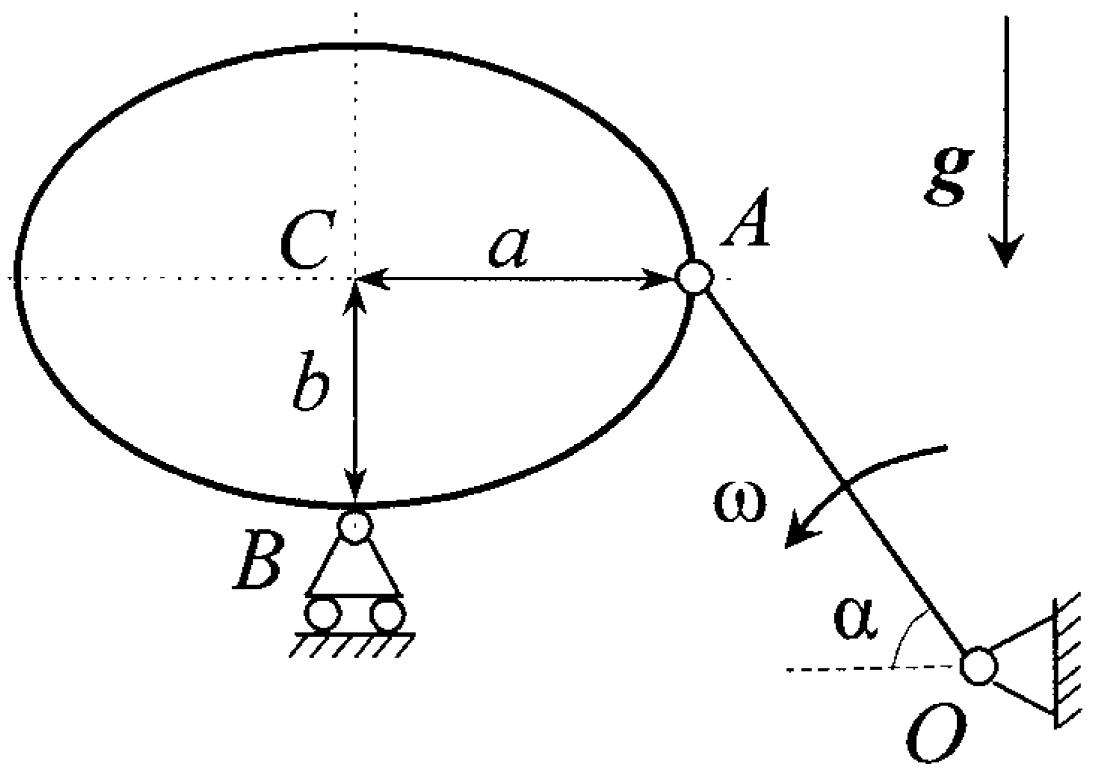
Оба условия (4) выполняются вплоть до момента $t_3 = \dfrac{\pi}{2\omega}$. В момент t_3, после которого нить начнёт провисать, угловая скорость колеса: $\omega_3 = \dfrac{v_{M,x}}{r} = 2\omega(\sin\pi/2) = 2\omega$. Далее, в силу провисания нити, вплоть до момента t_2 (и после этого тоже) будет $\varepsilon = 0$, действует закон сохранения кинетического момента для колеса: $\omega = const = \omega_3 = 2\omega$.

Ускорение точки A в момент t_2:

$$a_A = a_A^n = R\omega_3^2 = 8r\omega^2.$$

Замечание. Из того, что в условии задан закон движения механизма *M*, следует, что он движется под действием внутренних сил. Внешняя сила для механизма *M*, помимо сил тяжести и реакции опоры, – это сила сцепления между механизмом и плоскостью. Она неизвестна так же, как и вес точки *M*. Поэтому нет смысла записывать ДУ движения механизма *M* (принимая его за материальную точку).

Ответ. $T_{(1)} = \dfrac{J\omega^2}{r}$. $a_{(2)} = 8r\omega^2$.



Задача Д4 (6 баллов). Однородное тонкое кольцо, вытянутое в форме эллипса с полуосями $AC = a = R$, $BC = b = R\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, прикреплено в точке A к шарнирному стержню OA длины l. В точке B кольцо опирается на подвижный шарнир. Масса кольца равна m. Массой стержня OA, а также трением пренебрегаем. В момент, когда полуось AC горизонтальна, угол наклона OA к горизонтали равен α. Угловая скорость стержня OA в этот момент равна ω. Определите величину и направление момента M пары сил, которую надо приложить к стержню OA, чтобы угловое ускорение кольца в этот момент было равно нулю. Определите также, какова при этом будет реакция опоры B ?

Решение. Рассмотрим динамику движения кольца и стержня OA вначале по отдельности, вводя реакции $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$ шарнира A.

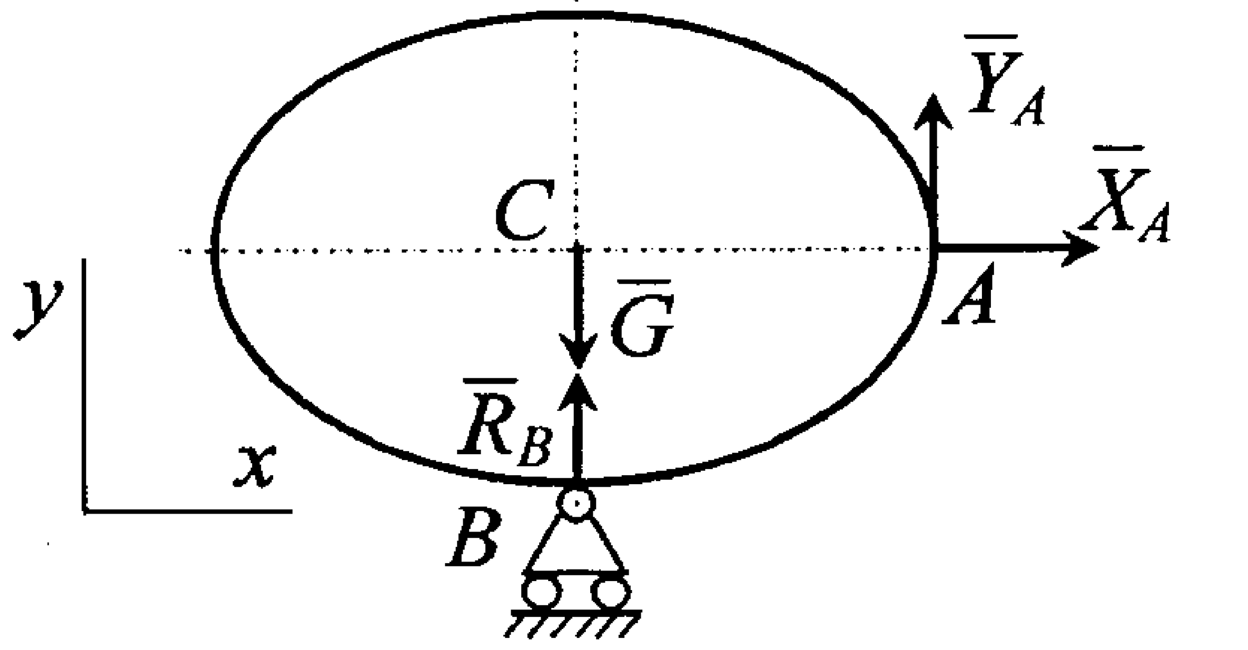


Рис. 1

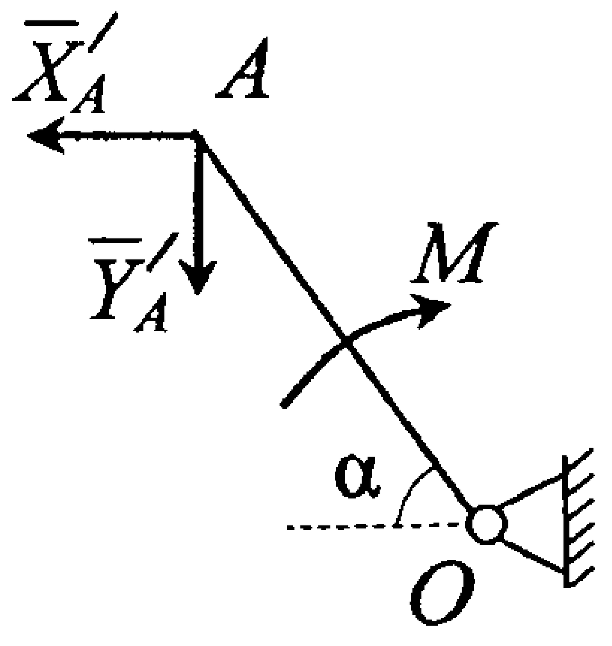


Рис. 2

Запишем дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения кольца (рис.1):

$$ma_{C,x} = X_A, \tag{1}$$

$$ma_{C,y} = -G + Y_A + R_B, \tag{2}$$

$$J_{Cz}\varepsilon_z = Y_A \cdot a. \tag{3}$$

Так как по условию угловое ускорение кольца $\varepsilon_z = 0$, то из (3):

$$Y_A = 0. \tag{4}$$

Дифференциальное уравнение вращения стержня OA вокруг неподвижной оси (рис.2):

$$J_{Oz}^{(OA)}\varepsilon_{OA} = X_A l \sin\alpha + Y_A l \cos\alpha - M, \tag{5}$$

где момент инерции стержня полагаем $J_{Oz}^{(OA)} = 0$, так как его массой пренебрегаем по условию. Тогда, с учетом (4), получаем из (5):

$$M = X_A l \sin\alpha. \tag{6}$$

Установим кинематические соотношения (рис.3). Из соотношений между величинами AC и BC следует, что угол $O\widehat{A}B$ прямой, то есть $\overline{v}_A \uparrow\uparrow \overline{AB}$. По направлениям скоростей $\overline{v}_A$, $\overline{v}_B$ построим мгновенный центр скоростей кольца – точку P. Из треугольника ACP: $AP = R/\cos\alpha$. Угловая скорость кольца, с учетом $v_A = l\omega$:

$$\omega_к = \frac{v_A}{AP} = \frac{l\omega\cos\alpha}{R}. \tag{7}$$

При плоскопараллельном движении отрезка AB:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A^\tau + \overline{a}_A^n + \overline{a}_{B/A}^\tau + \overline{a}_{B/A}^n. \tag{8}$$

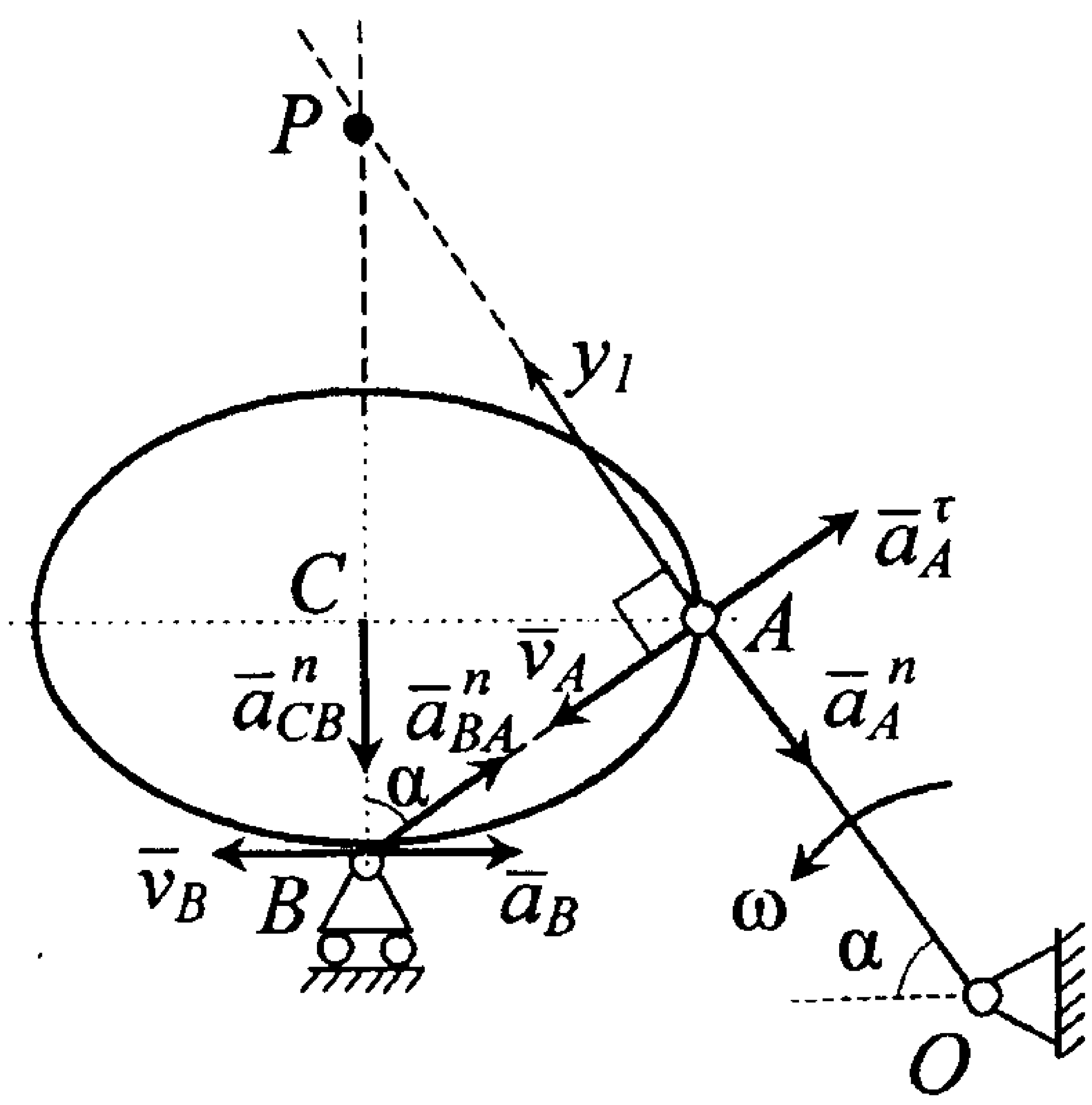


Рис. 3

Здесь $a_A^n = l\omega^2$. Так как модуль углового ускорения кольца $\varepsilon = 0$, то $a_{B/A}^\tau = AB \cdot \varepsilon = 0$. Для определения a_B спроецируем (8) на ось y_1 вдоль OA (чтобы обнулить проекцию неизвестного нам ускорения $\bar{a}_A^n$, а также попутно и проекцию $\bar{a}_{B/A}^n$):

$$-a_B \cos\alpha = -a_A^n,$$

$$a_B = \frac{l\omega^2}{\cos\alpha}. \qquad (9)$$

При плоскопараллельном движении отрезка BC, с учетом $\bar{a}_{C/B}^{\tau} = 0$:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{C/B}^n. \qquad (10)$$

Проецируем (10) на ось x и подставляем (9):

$$a_{C,x} = a_B = \frac{l\omega^2}{\cos\alpha}. \qquad (11)$$

Подставляем (11) в (1). Тогда из (6) получаем первый ответ:

$$M = m\frac{l\omega^2}{\cos\alpha} l\sin\alpha = ml^2\omega^2 tg\alpha.$$

Направление момента M будет по часовой стрелке, как указано на рис.2.

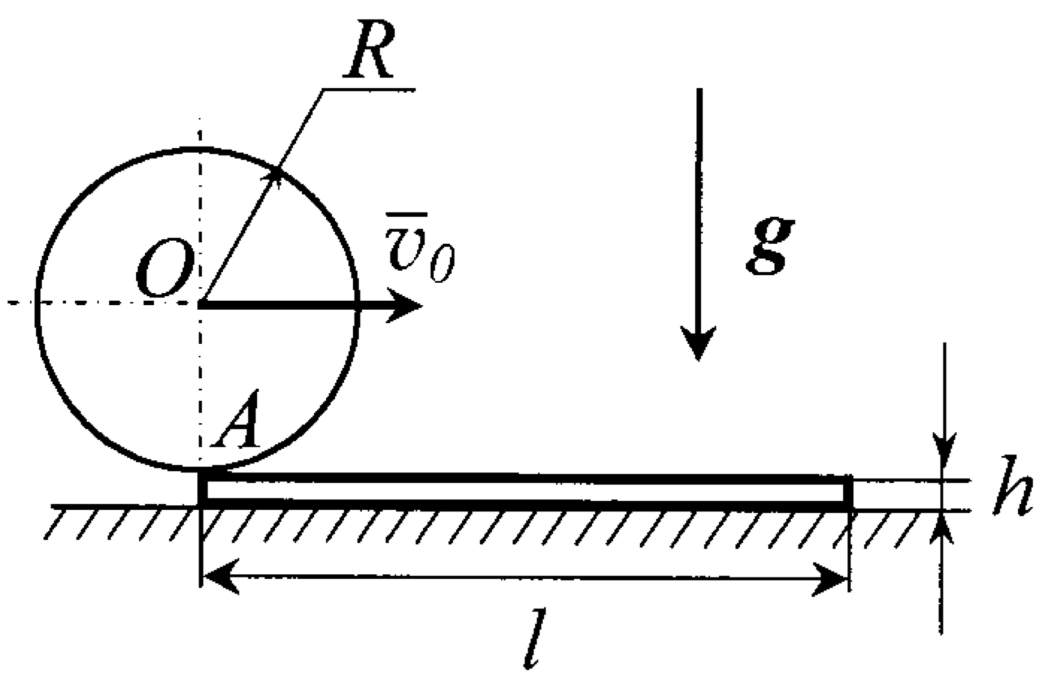
Проецируем (10) на ось y:

$$a_{C,y} = -a_{C/B}^n = -BC\cdot\omega_\kappa^2 = -Rctg\alpha\left(\frac{l\omega\cos\alpha}{R}\right)^2 = -\frac{l^2\cos^3\alpha}{R\sin\alpha}\omega^2. \qquad (12)$$

Учитываем (12), а также (4), в (2):

$$R_B = G - Y_A + ma_{C,y} = m\left(g - \frac{l^2\cos^3\alpha}{R\sin\alpha}\omega^2\right).$$

Ответ. $M = ml^2\omega^2\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $\quad R_B = m\left(g - \dfrac{l^2\cos^3\alpha}{R\sin\alpha}\omega^2\right)$.



Задача Д5 (7 баллов). Катушка, однородный цилиндр заданного радиуса R, прикреплена в точке A к концу гибкой однородной плотной ленты (ленточной цепи). Лента лежит на гладкой горизонтальной поверхности. Длина l и толщина h ленты связаны с R таким образом: $\dfrac{h}{R}\sim 0$, $\dfrac{R}{l}\sim 0$, $lh = 3\pi R^2$. Массы катушки и ленты одинаковы. В начальный момент центр катушки O получает скорость v_0, при этом вся лента находится в покое. При каком минимальном значении v_0 катушка через какое-то время намотает на себя всю ленту?

Примечание. Лента наматывается слой поверх слоя, образуя в конце намотки вместе с катушкой сплошной цилиндр (ширину ленты и длину образующей катушки считаем одинаковыми).

Решение. Ввиду отсутствия трения между лентой и поверхностью, $\sum_k F_{kx}^e = 0$.

По закону сохранения количества движения системы вдоль оси x: $Q_{1x} = Q_{0x}$, т.е. $2mv_1 = mv_0$, где m – масса катушки, равная массе ленты, v_1 – скорость центра масс O системы в конце намотки. Отсюда

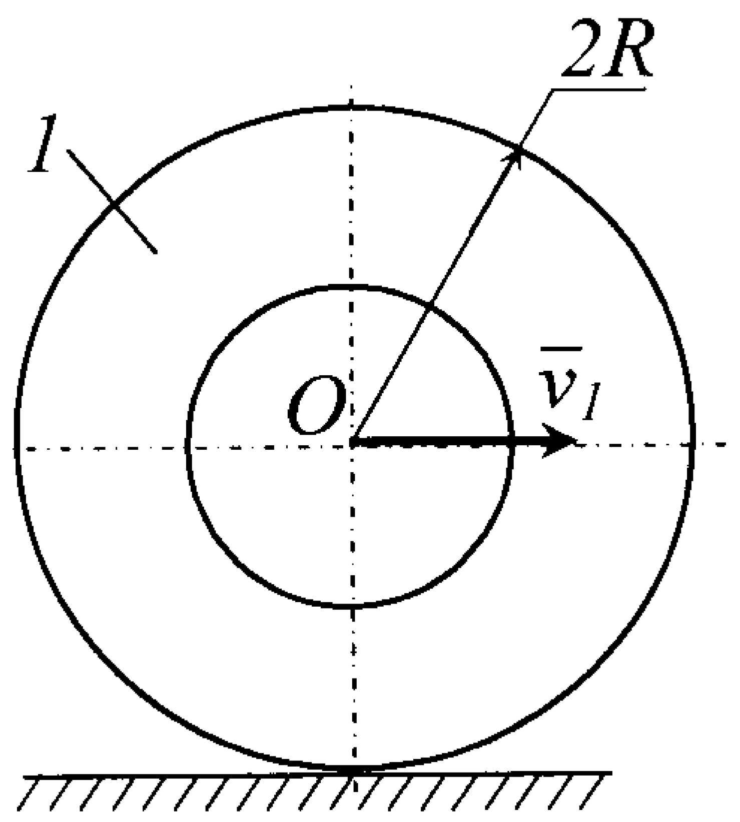
$$v_1 = v_0/2. \tag{1}$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы:

$$T_1 - T_0 = A_G. \tag{2}$$

Так как в начальный момент лента, а значит, и точка A неподвижны, то точка A – МЦС для катушки (вернее, для плоского круглого среза катушки, изображенного на рисунке в условии).

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv_0^2. \tag{3}$$



Обозначим через ω_1 угловую скорость цилиндра *1* – катушки с лентой в конце намотки. (То, что получившееся тело можно считать цилиндром, а не фигурой в форме «улитки», следует из условия малости h по сравнению с R). Кинетическая энергия системы при этом, с учетом (1):

$$T_1 = \frac{(2m)v_1^2}{2} + \frac{1}{2}J_{z1}\omega_1^2 = \frac{mv_0^2}{4} + \frac{1}{2}J_{z1}\omega_1^2. \tag{4}$$

Ввиду послойности намотки, площадь сечения цилиндра *1* в плоскости рисунка будет $S = S_{цил} + S_{цепи} = \pi R^2 + l\,h = 4\pi R^2 = \pi(2R)^2$, т.е. радиус цилиндра *1* будет $2R$. Значит, точка O поднимется на величину $H_{цил} = 2R - R = R$.

$$A_G = A_{цил} + A_{цепи} = -mgR - mg\cdot 2R = -3mgR. \tag{5}$$

Подставляем (3), (4), (5) в (2):

$$-\frac{mv_0^2}{2} + \frac{1}{2}J_{z1}\omega_1^2 = -3mgR. \tag{6}$$

Отсюда видно, что v_0 минимальна, если $\omega_1 = 0$ (т.е. если цилиндр *1* будет совершать поступательное движение). Тогда из (6) получаем ответ:

$$v_0 = \sqrt{6gR}.$$

Замечание 1. Случайным образом верный ответ может быть получен из соотношения, содержащего сразу две серьезные ошибки: $0 - \frac{mv_0^2}{2} = -3mgR$ (откуда выходит $v_0 = \sqrt{6gR}$). Здесь вместо начальной кинетической энергии цилиндра, совершающего плоское движение, ошибочно записано выражение для кинетической энергии тела при поступательном движении. Кроме того, ошибочно принята равной нулю кинетическая энергия цилиндра в конце намотки.

Замечание 2. В случае косой намотки, т.е. под углом (если смотреть сбоку), в конце получился бы не цилиндр, а тело гораздо более сложной геометрии. Высота точки O тогда была бы меньше $2R$. (Из-за косой намотки «ширина», т.е. размер вдоль оси, перпендикулярной плоскости рисунка, увеличилась бы. А объем, очевидно, остается тем же, что и в случае «правильной» намотки. Из-за этого размеры в двух других направлениях, в том числе по высоте, уменьшились бы.) Поэтому процедура намотки была описана в условии с указанием того, что в конце получается цилиндр.

Замечание 3. Цилиндр *1* неоднороден, так как плотность ленты в три раза меньше плотности катушки (если считать ширину ленты и длину образующей катушки одинаковыми). Но это не существенно для решения, так как в формуле (6) момент инерции J_{z1} вычислять не надо.

Ответ. $v_0 = \sqrt{6gR}$.