Зональная (II тур Всероссийской) студенческая олимпиада

по теоретической механике

Казанский национальный исследовательский технологический университет

5-7 декабря 2012 г.

Решения задач компьютерного конкурса

Автор задачи 1: Насибуллин Ильназ Ирекович, магистрант ФННХ КНИТУ

Автор задач 2, 3: Муштари Айрат Ильдарович, доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ

Задача 1.

Задание 1.1 (5 баллов)

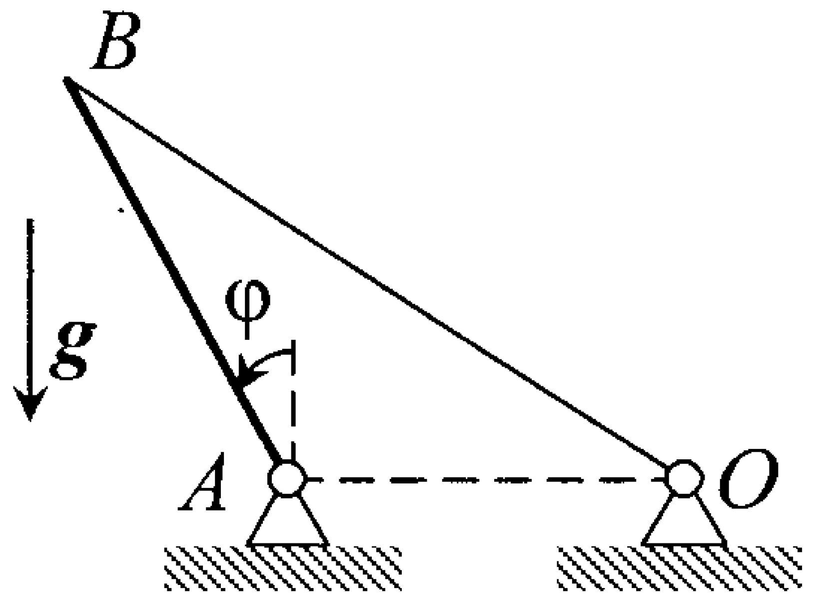


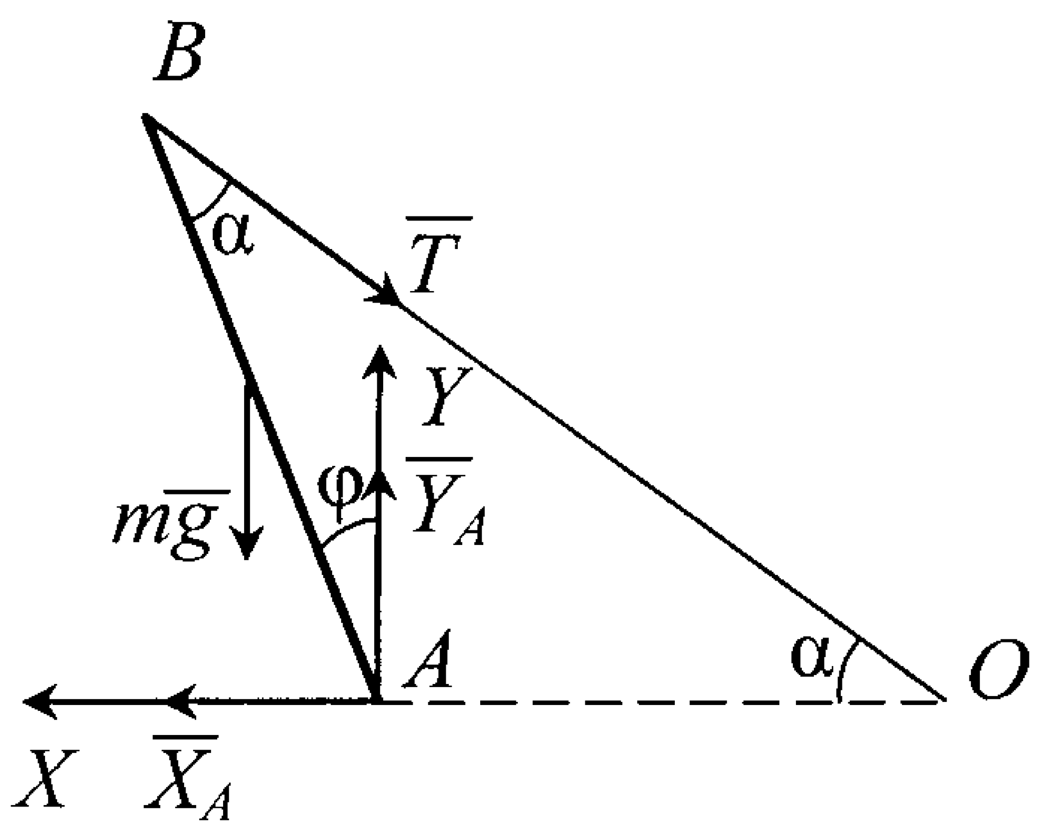
Рис. 1

Однородный стержень AB массой m = 1 кг и длиной AB = l = 1 м шарнирно закреплен в точке A. В точке B он соединен упругой нитью с точкой O, так что отрезок AO горизонтален, AO = l = 1 м. Длина нити в нерастянутом состоянии равна l = 1 м, коэффициент упругости равен c, где $c > 0$. Определить угол φ (в радианах) при равновесии стержня, считая $0 < \varphi < 0.5\pi$, направление отчета φ показано на рис. 1. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2.

Входные данные: c.

Выходные данные: φ.

Пример для отладки: при c = 6 получим φ = 0.468 рад.



Решение.

Запишем сумму моментов сил, действующих на стержень, относительно точки A:

$$\Sigma M_A(\bar{F}_k) = mg\frac{l}{2}\sin\varphi - T\,l\sin\alpha = 0;$$

$$\frac{1}{2}mg\sin\varphi - T\sin\alpha = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим треугольник OAB. Запишем сумму углов треугольника:

$$\alpha + \alpha + \varphi + \frac{\pi}{2} = \pi;$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}. \qquad (2)$$

По теореме косинусов получим:

$$OB^2 = AB^2 + AO^2 - 2AB \cdot AO\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$OB = \sqrt{2(1+\sin\varphi)}l. \qquad (3)$$

Сила натяжения нити:

$$T = (OB - l)c. \qquad (4)$$

Из (4), с учетом (3), получим:

$$T = \left(\sqrt{2(1+\sin\varphi)}l - l\right)c = \left(\sqrt{2(1+\sin\varphi)} - 1\right)cl. \qquad (5)$$

Из (1), (2) и (4) получим:

$$\frac{1}{2}mg\sin\varphi - \left(\sqrt{2(1+\sin\varphi)} - 1\right)cl\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = 0;$$

$$\frac{1}{2}mg\sin\varphi - \left(\cos\varphi - \sqrt{\frac{1-\sin\varphi}{2}}\right)cl = 0. \qquad (6)$$

Решив нелинейное уравнение (6) методом последовательного деления отрезка пополам, получим φ при равновесии стержня. Если проанализировать (6), можно убедиться, что оно имеет одно решение. Это подтверждается численным экспериментом.

Задание 1.2 (10 баллов)

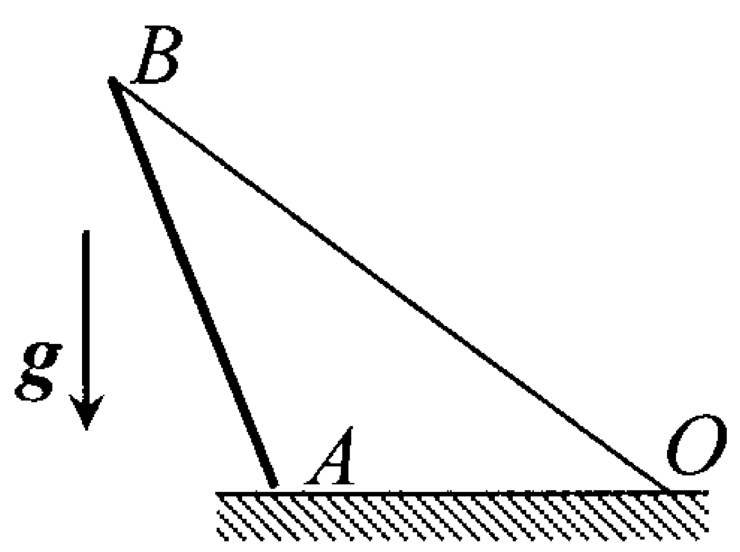


Рис. 2

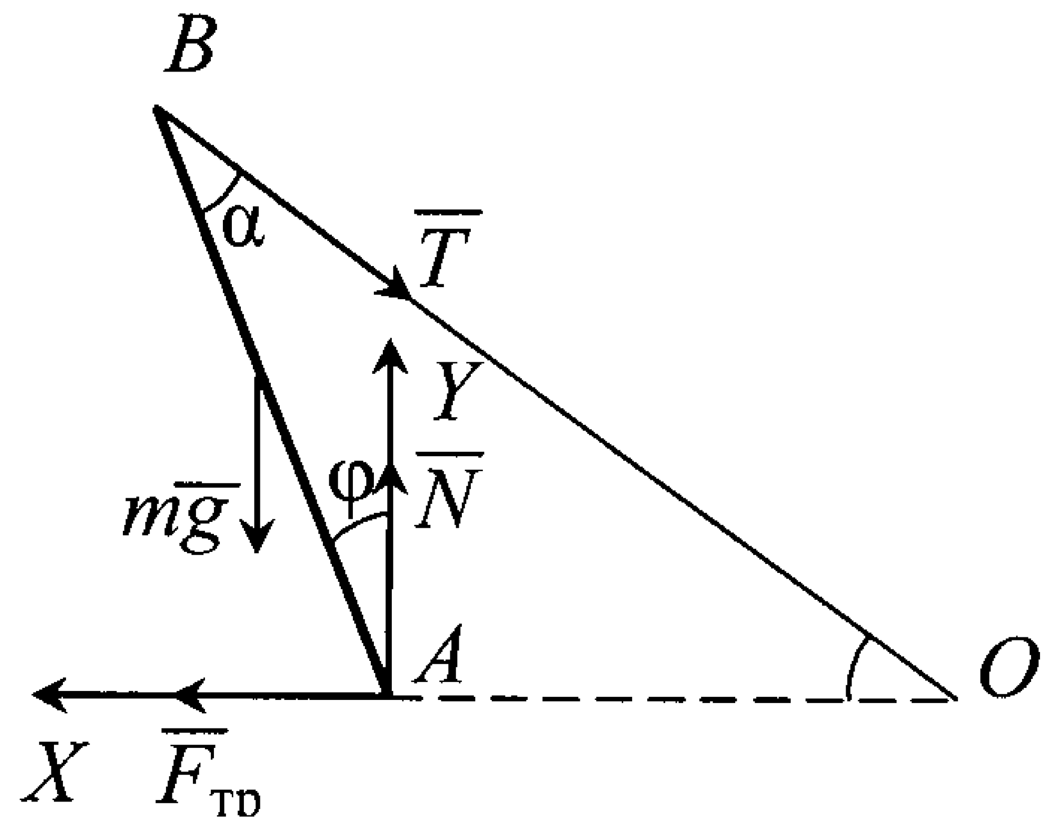
Однородный стержень массой $m = 1$ кг и длиной $AB = l = 1$ м в точке A опирается на шероховатую горизонтальную плоскость. В точке B он соединен упругой (растяжимой) нитью с точкой O, $AO = l = 1$ м (рис. 2). Длина нити в нерастянутом состоянии $l = 1$ м, коэффициент упругости нити равен c, где $c > 0$. Определить минимальный коэффициент трения f между плоскостью и стержнем AB, при котором возможно его равновесие. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2.

Входные данные: c.

Выходные данные: f.

Пример для отладки: при $c = 6$ получим $f = 0.299$.

Решение.



Рассмотрим уравнения равновесия стержня в проекциях на оси X и Y:

$$\Sigma F_{kx} = F_{\text{тр}} - T\sin(\varphi + \alpha) = 0;$$

$$\Sigma F_{ky} = N - mg - T\cos(\varphi + \alpha) = 0;$$

$$F_{\text{тр}} = T\sin(\varphi + \alpha)\,; \tag{7}$$

$$N = mg + T\cos(\varphi + \alpha). \tag{8}$$

Минимальный коэффициент трения:

$$f = \frac{F_{\text{тр}}}{N}.$$

Из последнего выражения, с учетом (7) и (8), получим:

$$f = \frac{T\sin(\varphi + \alpha)}{mg + T\cos(\varphi + \alpha)} = \frac{\sin(\varphi + \alpha)}{\frac{mg}{T} + \cos(\varphi + \alpha)}. \tag{9}$$

Из (9), с учетом (2), получим:

$$f = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{mg}{T} + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\frac{1 + \sin\varphi}{2}}}{\frac{mg}{T} + \sqrt{\frac{1 - \sin\varphi}{2}}}, \tag{10}$$

где T определяется по (5).

Угол φ, при котором возможно равновесие, найдем как в решении задания 1.1, то есть решив нелинейное уравнение (6). Затем, подставив φ в (10), получим минимальный коэффициент трения, при котором возможно равновесие стержня.

Однако равновесие также возможно при $\varphi = 0.5\pi$. Подставив 0.5π в (10), получим, что минимальный коэффициент трения между плоскостью и стержнем в этом случае $f = cl/mg$. Но в этом случае коэффициент трения будет больше, чем в случае, рассмотренном выше.

Задание 1.3 (15 баллов)

Однородный стержень AB массой $m = 1$ кг и длиной $AB = l = 1$ м в точке A опирается на шероховатую горизонтальную плоскость. В точке B он соединен упругой (растяжимой) нитью с точкой O (рис. 2). Коэффициент трения между стержнем и плоскостью f. Длина нити в нерастянутом состоянии равна $l = 1$ м, коэффициент упругости нити c, где $c > 0$. Определить наибольшее расстояние AO, при котором возможно равновесие стержня. Ускорение свободного падения принять равным 9.8 м/с^2.

Входные данные: c, f.

Выходные данные: AO.

Пример для отладки: при $c = 6$, $f = 0.5$ получим $AO = 1.307$ м.

Решение.

При равновесии стержня:

$$F_{\text{тр}} \leq fN. \tag{11}$$

Из (11), с учетом (7) и (8), получим:

$$T\sin(\varphi + \alpha) \leq f(mg + T\cos(\varphi + \alpha)). \tag{12}$$

Из (12), с учетом (4), получим:

$$(\mathrm{OB} - l)c\ \sin(\varphi + \alpha) \leq f(mg + (OB - l)c\ \cos(\varphi + \alpha)). \tag{13}$$

Из (1), с учетом (4), получим:

$$\frac{1}{2}mg\sin\varphi - (OB - l)c\ \sin\alpha = 0. \tag{14}$$

Рассмотрим треугольник AOB. По теореме косинусов получим:

$$OB = \sqrt{AO^2 + l^2 + 2AO\, l \sin \varphi}. \tag{15}$$

По теореме синусов получим:

$$\sin \alpha = \frac{AO}{OB} \cos \varphi\,;$$

$$\alpha = \arcsin \frac{AO}{OB} \cos \varphi. \tag{16}$$

При наибольшем AO выражение (13) примет вид:

$$f_{min} = \frac{(OB - l)c\ \sin(\varphi + \alpha)}{mg + (OB - l)c\ \cos(\varphi + \alpha)}, \tag{17}$$

куда выражение для OB подставляется из (15). В (17) значение f_{min} – минимальный коэффициент трения, который обеспечивает равновесие при данном AO.

Если AO относительно мало, то, как можно заметить из численного эксперимента, $f_{min} < f$. Положение точки O, соответствующее этой ситуации, обозначим через O_1. Если же AO относительно велико, то $f_{min} > f$. Положение точки O, соответствующее такой ситуации, обозначим через O_2.

Искомое AO, соответствующее $f_{min} = f$, найдём методом последовательного деления отрезка пополам. Вначале выбираем левый конец отрезка, соответствующий точке O_1, совсем близко к точке A. Правый конец отрезка, соответствующий точке O_2, выбираем на очень большом расстоянии от точки A. Полагаем $a = \mathrm{AO}_1$, $b = \mathrm{AO}_2$.

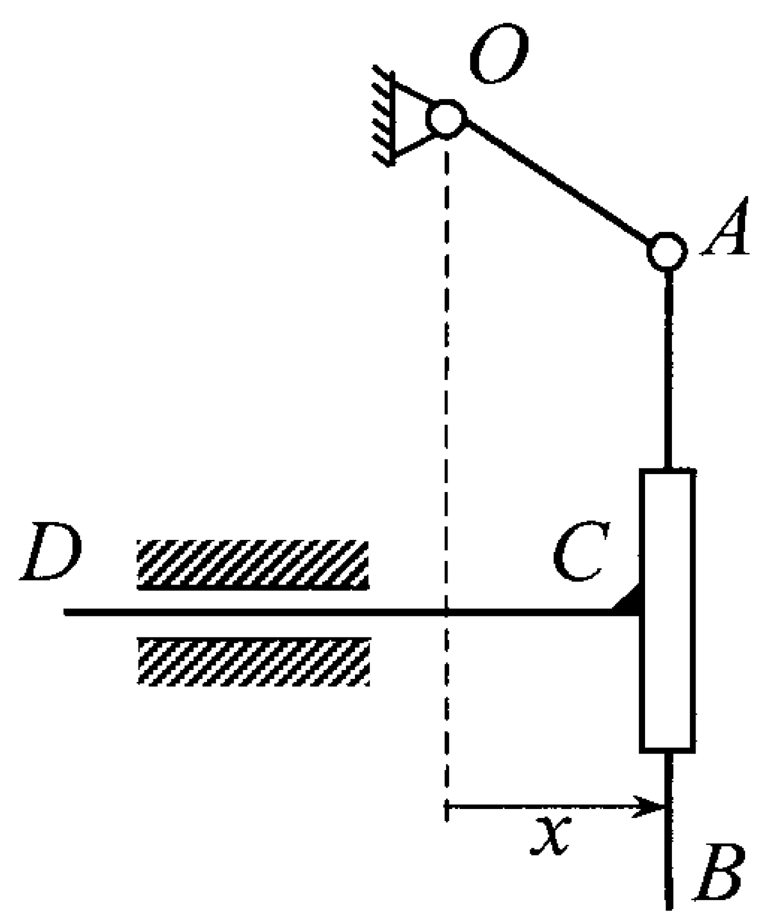
Далее начинаем цикл. Для $A\mathrm{O} = \mathrm{c} = (a + b)/2$ находим угол φ, при котором возможно равновесие стержня из решения нелинейного уравнения (14), например, методом последовательного деления отрезка пополам. Затем, подставив φ в (17), найдём f_{min}, соответствующий $A\mathrm{O} = \mathrm{c}$. Если оказывается $f_{min} < f$, то полагаем в программе $a = \mathrm{c}$. Если оказывается $f_{min} > f$, то полагаем $b = \mathrm{c}$.

Цикл продолжаем до тех пор, пока не будет $|a–b| < \varepsilon$, где ε – малая погрешность вычислений.

Замечание. Искомое значение AO также можно найти, решив, например, методом Ньютона, систему двух нелинейных уравнений относительно φ и OA :

$$\begin{cases}(OB-l)c\ \sin(\varphi+\alpha)=f(mg+(OB-l)c\ \cos(\varphi+\alpha)), \\ \dfrac{1}{2}mg\sin\varphi-(OB-l)c\ \sin\alpha=0 .\end{cases}$$

Задача 2 (10 баллов)



Кривошип OA длины $l=1$ м вращается вокруг неподвижной оси O. К точке A шарнирно прикреплен стержень AB, проходящий через втулку C. Втулка C жестко прикреплена под прямым углом к стержню CD, скользящему вдоль горизонтальной направляющей. (Тем самым стержень AB все время остается вертикальным.) Задан закон движения стержня CD: $x(t)=\sqrt{2\sin(t^2)}$ при $0\le t\le 0.7$, где x отсчитывается вправо от вертикали, проходящей через точку O. В начальный момент точка A находится ниже точки O. Определите для момента времени t $(0\le t\le 0.7)$ угловую скорость ω и угловое ускорение ε стержня OA.

Входные данные: t.

Выходные данные: ω, ε.

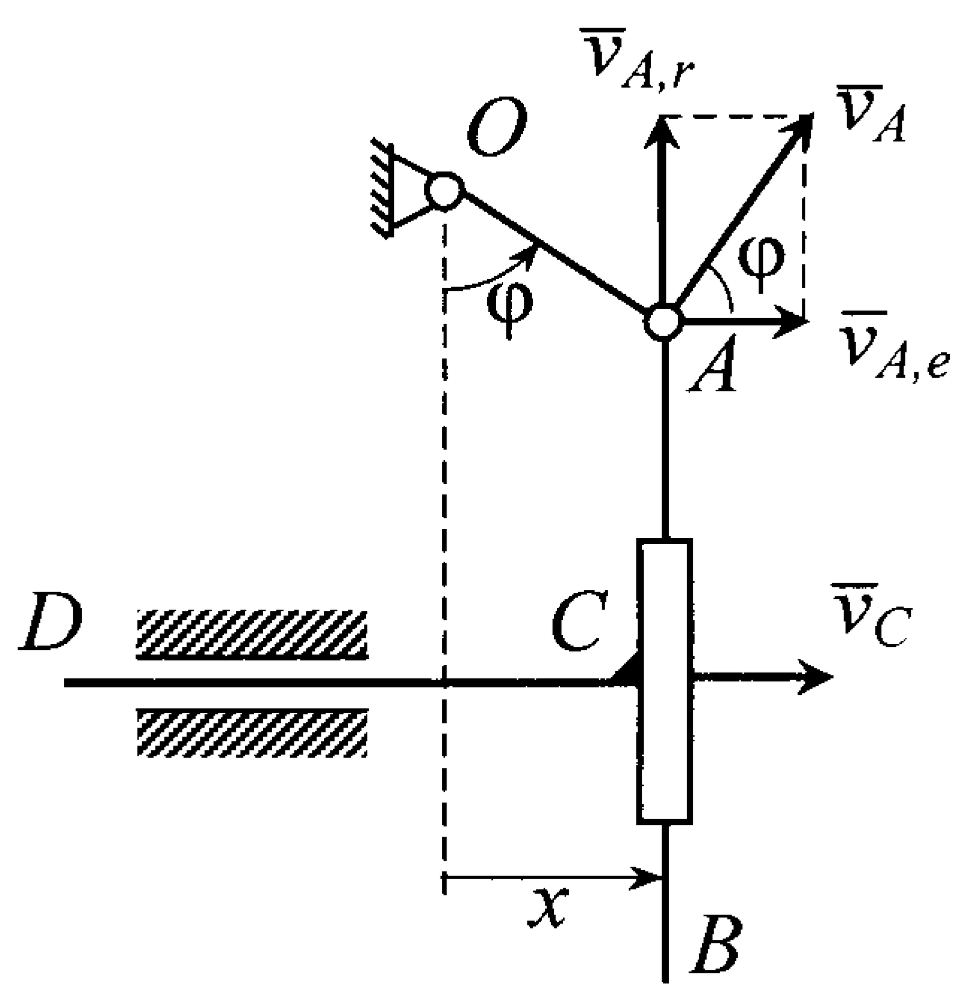
Пример для отладки: при $t=0.3$ получим $\omega=1.556$, $\varepsilon=1.064$.

Решение.

1 способ (аналитический). Обозначим через φ угол между вертикалью и OA. Очевидно, что $x=OA\sin\varphi$. Можно проверить, что при $0\le t\le 0.7$ будет $0\le x(t)<1$. Отсюда следует, с учетом $OA=1$, что φ меняется от 0 до величины, несколько меньшей $\pi/2$. Получим $\varphi=\arcsin x$, то есть

$$\varphi(t)=\arcsin\sqrt{2\sin(t^2)}\,. \tag{1}$$

Далее нужно использовать формулы $\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}$, $\varepsilon=\dfrac{d\omega}{dt}$.



Первая и, особенно, вторая производные от правой части (1) в аналитическом виде представляют собой достаточно громоздкие выражения. Их можно определить, используя пакет прикладных программ, например, пакет Mathcad или Mathematica.

При использовании языка программирования, где нет возможности вычислять производные в аналитическом виде, удобнее найти их численно. Согласно определению производной, $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) \approx \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h}$, где h – малая величина, а $\varphi(t)$, $\varphi(t+h)$ определяем по (1). Для достаточной точности вычислений можно взять $h = 0.0001$ или $h = 0.00001$. По аналогии, $\varepsilon(t) = \frac{d\omega}{dt}(t) \approx \frac{\omega(t+h) - \omega(t)}{h}$. Здесь предварительно понадобится найти $\omega(t+h) \approx \frac{\varphi(t+2h) - \varphi(t+h)}{h}$.

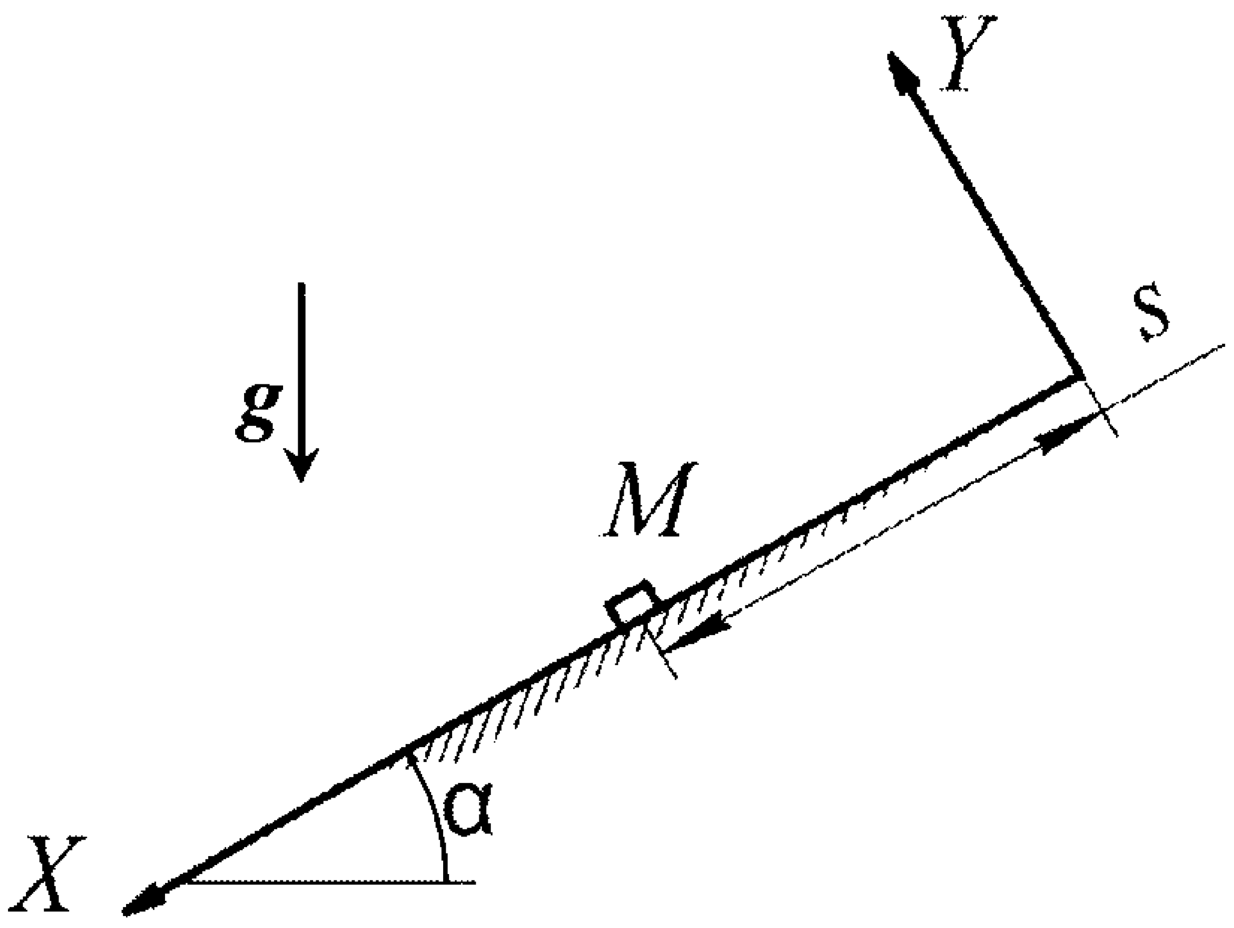
2 способ (геометрический). Скорость втулки C равна: $v_C = \frac{dx}{dt}$. Движение точки A вместе со стержнем AB можно рассмотреть как сложное движение. Переносное движение – движение вдоль горизонтали со скоростью $v_{A,e} = v_C$. Относительное движение вдоль вертикали связано с тем, что точка A из-за поворота вокруг O смещается также и вверх. По теореме о сложении скоростей при сложном движении: $\overline{v}_A = \overline{v}_{A,e} + \overline{v}_{A,r}$. Проецируя на горизонтальную ось, получим: $v_A \cos\varphi = v_C$. С учетом $v_A = OA \cdot \omega$, имеем: $\omega \cos\varphi = \frac{dx}{dt}$. С учетом $x = \sin\varphi$, $\cos\varphi = \sqrt{1 - x^2}$, получим:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{dx}{dt}. \qquad (2)$$

Нетрудно убедиться, что (2) эквивалентно (1). Производная $\frac{dx}{dt}$ находится по аналогии с 1-м способом.

Далее можно рассмотреть ускорения при сложном движении точки A, что потребует больших затрат времени по сравнению с 1-м способом.

Задача 3 (10 баллов)

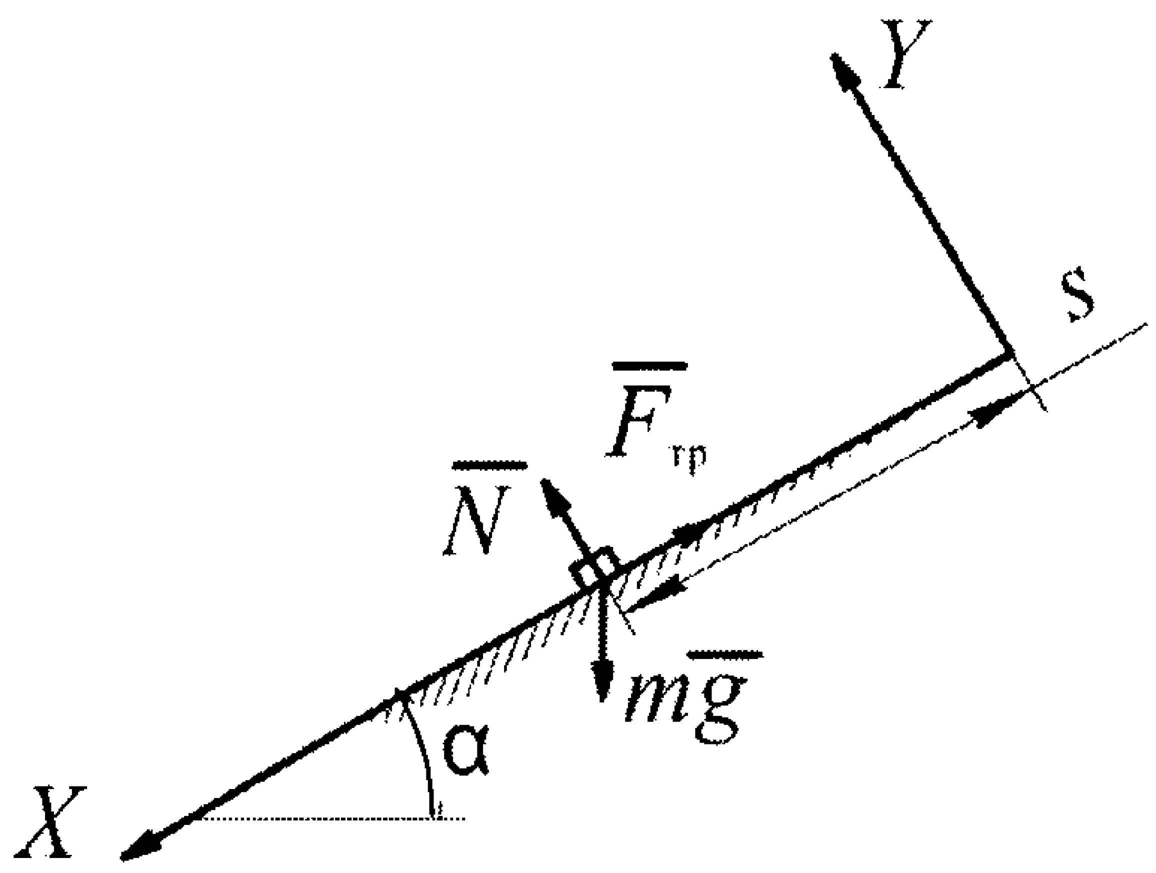


Материальная точка M при $t = 0$ находится в покое на шероховатой поверхности с углом наклона $\alpha = \gamma\pi$ $(0 < \gamma < 0.5)$. Коэффициент трения f изменяется по закону: $f = f_1(1 - e^{-s})$, где s – пройденный точкой путь, f_1 – постоянная $(0 \le f_1 \le 1)$. В момент t определить путь s. Принять $g = 9.8$ м/с^2.

Входные данные: γ, f_1, t.

Выходные данные: s.

Пример для отладки: при $\gamma = 0.2$, $f_1 = 0.4$, $t = 1$ получим $s = 2.421$ м.



Решение. Запишем ДУ движения материальной точки в проекциях на оси координат:

$$m\ddot{s} = mg\sin\alpha - F_{mp},$$

$$0 = N - mg\cos\alpha.$$

С учетом $F_{mp} = fN$ и заданного выражения для f получим ДУ:

$$\ddot{s} = g(\sin\alpha - f_1\cos\alpha(1 - e^{-s})) \qquad (1)$$

При $t = 0$: $\ddot{s} = g\sin\alpha > 0$. Поэтому точка начнет двигаться вниз по плоскости. Далее возможны два случая.

Если $\operatorname{tg}\alpha \geq f_1$, то $\sin\alpha - f_1\cos\alpha \geq 0$. Так как $0 \leq 1 - e^{-s} < 1$ при любом значении s, то все время будет выполняться:

$$g\left(\sin\alpha - f_1\cos\alpha(1 - e^{-s})\right) > 0. \qquad (2)$$

Тогда из (1): $\ddot{s} > 0$ в любой момент времени. Значит, скорость точки может лишь возрастать с течением времени.

Если $\operatorname{tg}\alpha < f_1$, то $\sin\alpha - f_1\cos\alpha < 0$. Однако условие (2) выполняется при $s = 0$ и при значениях s, меньших некоторого значения s_1. При этом $\ddot{s} > 0$, поэтому скорость возрастает. Следовательно, величина s через какое-то время достигнет значения s_1. После чего будет уже $\ddot{s} < 0$ и скорость точки начнет убывать. В некоторый момент времени $t = \tau$ скорость точки окажется равной нулю. В силу $\operatorname{tg}\alpha < f$ точка окажется в равновесии, то есть её движение прекратится.

Возможны два метода решения ДУ (1). Более простым является метод численного решения ДУ методом Эйлера или Рунге-Кутта. В случае $\operatorname{tg}\alpha < f_1$ необходимо на каждом шаге цикла проверять условие $v_x > 0$. Когда это условие перестанет выполняться при достижении t значения τ, следует выход из цикла. Полученное значение s будет ответом при $t > \tau$.

Во втором методе решения (1) используется возможность разделения переменных в ДУ. Учитываем $\ddot{s} = v\frac{dv}{ds}$ в (1), интегрируем и получаем:

$$\frac{\dot{s}^2}{2} = g\left(s\sin\alpha - f_1\cos\alpha\,(s + e^{-s})\right) + c.$$

При $t = 0$: $s = 0$ и $\dot{s} = 0$. Отсюда $c = gf_1\cos\alpha$. Тогда

$$\dot{s} = \sqrt{2g\left(s\sin\alpha - f_1\cos\alpha\,(s - 1 + e^{-s})\right)}, \qquad (3)$$

$$\int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2g\left(s\sin\alpha - f_1\cos\alpha\,(s - 1 + e^{-s})\right)}} = t.$$

Интеграл в левой части вычисляем численно, например, по формуле прямоугольников. В случае $\operatorname{tg}\alpha \geq f_1$ интегральная сумма образуется последовательным прибавлением слагаемых, соответствующих постепенно возрастающим значениям s, до тех пор, пока эта сумма не достигнет заданного значения t. Последнее значение s является ответом. В случае же $\operatorname{tg}\alpha < f_1$ необходимо по ходу счета определять из (3) значение скорости. Как только подкоренное выражение в (3) перестанет быть положительным, вычисление интегральной суммы прекращается.