Министерство образования Российской Федерации
Казанский государственный технологический университет

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ЧАСТЬ 1. СТАТИКА
Задание и анализ курсовых работ

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Казань 2007

Составитель: Ф.Х. Тазюков, Б.А. Снигерев

Теоретическая механика. Часть 1. Статика. Задание и анализ курсовых работ. Методические указания. /Казан. гос. технол. ун-т; сост. Ф.Х. Тазюков. Казань, 2007,   с.

Содержит основы теории, наиболее распространенные расчетные схемы и примеры решения задач по дисциплине «Теоретическая механика (раздел «Статика»)», а также полный перечень исходных данных для выполнения курсовой работы.

Предназначено для студентов технологических специальностей.

Разработано на кафедре «теоретической механики сопротивления материалов».

Печатается по решению методической комиссии по циклу общепрофессиональных дисциплин.

Рецензенты: проф. Ф.М.Галимов
проф. Ф.Ф.Ибляминов

Введение

Дисциплина «Теоретическая механика» состоит из трех основных разделов: *статики*, *кинематики* и *динамики*. Раздел *статики* связан с общим учением о силах и в нем изучаются условия покоя материальных тел, находящихся под действием приложенных сил.

Для успешного изучения дисциплины «Теоретическая механика» студенты должны научиться правильно схематизировать механические процессы и уметь представлять задачи в виде уравнений.

Для изучения *статики* необходимо в первую очередь уметь свободно оперировать тригонометрическими функциями и уметь решать геометрические задачи с прямоугольными треугольниками. Далее студенты должны уметь пользоваться основами векторной алгебры, а именно, уметь складывать вектора, уметь разлагать вектора по заданным направлениям координатных осей, уметь определять проекции векторов как на координатные оси, так и на произвольные заданные направления, знать основные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Освоив теоретические основы раздела, посвященного *статике*, рекомендуется ознакомиться с имеющимися в учебнике или в конспектах лекций решенными задачами.

При изучении теоретического курса по учебнику или конспекту необходимо понять изложенный материал, а не «заучить».

Приступая к решению задачи по теоретической механике, на первых порах необходимо составлять план решения. Чертежи необходимо делать аккуратными и крупными в соответствии с масштабами, указанными в условии задачи. Необходимо помнить: крупный и правильно нарисованный чертеж существенно облегчает решение задачи.

Запомните, небрежно выполненный чертеж во многих случаях не только затрудняет решение задачи, но и зачастую не позволяет правильно ориентироваться в постановке задачи.

Данное методическая разработка содержит указание для решения задач *статики* с анализом характерных ошибок, допускаемыми студентами при выполнении домашних и контрольных заданий.

При решении задач по *статике* можно рекомендовать придерживаться следующего примерного плана.

Примерный план решения задач по статике

1.- Нарисовать чертеж в соответствии с заданными в условии задачи линейными и угловыми размерами.

2.- Указать положение и направление координатных осей.

3.- Указать конструкцию, равновесие которой рассматривается при решении задачи.

4- Указать на чертеже все силы (в том числе и реакции связей) и пары сил, действующие на конструкцию.

5.- Определить, какая система сил действует на конструкцию (сходящаяся или плоская) и в соответствии с этим составить уравнения равновесия.

6.- Решить записанную систему линейных алгебраических уравнений.

7.- Осуществить анализ и проверку полученного решения.

Как правило, большинство ошибок, допускаемых студентами при выполнении контрольных заданий или расчетных заданий по СРС, вызваны небрежностью в построении расчетной схемы и, соответственно, оформлении задания.

Наиболее часто встречаемые ошибки связаны с неправильным указанием реакций связей. В связи с этим, ниже приведен детальный разбор основных типов связей, встречающихся при решении задач по теоретической механике с указанием направления действия их реакций.

Исходные положения статики

Статикой называется раздел механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием системы сил.

Основные понятия статики.

1. Абсолютно твердое тело- тело, в котором расстояние между любыми точками всегда остается постоянным.
2. Сила. Величина, являющаяся количественной мерой механического взаимодействия материальных тел, называется силой. Сила является величиной векторной. Ее действие на тело определяется точкой приложения, направлением действия и модулем.
3. Тело, не скрепленное с другими телами называется свободным.
4. Две системы сил эквивалентны, если их действие на тело одинаково, т.е. $\left\{\vec{F}_i\right\} \propto (\vec{R}_k)$.
5. Система сил, под действием которой твердое тело находится в покое, называется уравновешенной или эквивалентной нулю.
6. Если система сил эквивалентна одной силе, то эта сила называется равнодействующей. Таким образом, равнодействующая-это сила, которая одна заменяет действие данной системы сил.
7. Сила, равная равнодействующей по модулю и прямо противоположная ей по направлению и действующая вдоль той же прямой, называется уравновешивающей силой.

Расматриваемые в механике величины можно разделить на *скалярные*, полностью определяемые своим числовым значением, и *векторные,* определяемые модулем и направлением в пространстве.

Основными задачами статики являются:

- приведение данной системы сил, действующей на твердое тело, к простейшему виду;
- определение условий равновесия заданной системы сил.

Предмет статики основывается на некоторых эмпирических аксиомах, не требующих доказательств. Ниже приведены некоторые из них.

1. Если на свободное абсолютно твердое тело действуют две силы, то тело может находиться в равновесии тогда и только тогда, когда эти силы равны по модулю и направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны.

2.Действие данной системы сил на абсолютно твердое тело не изменится, если к ней прибавить или от нее отнять уравновешенную систему сил.

Следствие аксиомы 2. Не нарушая состояния твердого тела, силу можно переносить по ее линии действия в любую точку тела.

3.Две силы, приложенные к телу в данной точке, имеют равнодействующую, приложенную в той же точке и изображаемую диагональю параллелограмма, построенного на этих силах.

4. При всяком действии одного материального тела на другое имеет место такое же по величине, но противоположное по направлению противодействие.

Равновесие систем сил

Система сходящихся сил

Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке. После переноса всех сил по их линиям действия в эту точку получается эквивалентная система сил, приложенных в одной точке. Равнодействующая $\vec{\boldsymbol{R}}$ системы сил, приложенных в одной точке равна

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

Необходимым и достаточным условием равновесия сходящейся системы сил является равенство

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k = 0$$

В проекциях на оси координат это условие запишется в виде

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0$$

$$R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0$$

Очень часто решение задач на равновесие твердого тела, находящееся под действием сходящейся системы сил, облегчается применением теоремы о трех непараллельных силах.

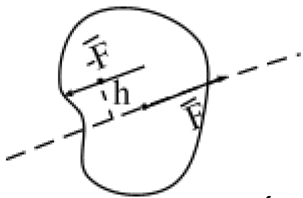
Теорема о трех непараллельных силах.

Если твердое тело находится в равновесии под действием трех непараллельных сил, лежащих в одной плоскости, то линии действия этих сил пересекаются в одной точке.

Данная теорема облегчает решение задач на равновесие твердого тела, находящееся под действием сходящейся системы сил в тех случаях, когда направление одной из трех уравновешивающих сил неизвестно. Определив точку пересечения линий действия двух сил, направления которых известны, можно указать направление линии действия третьей силы, т.к. она должна пройти через точку приложения этой силы и точке пересечения линий действия первых двух сил.

Произвольная плоская система сил

Одним из важнейших понятий статики является понятие ***пары сил***. Парой сил называется система двух параллельных, равных по модулю и направленных в противоположные стороны сил, действующих на абсолютно твердое тело. Мерой действия пары сил является алгебраическая величина, называемая моментом пары и равная произведению модуля одной из сил на плечо $\boldsymbol{h}$.



Определение пары сил $\left\{\vec{F},-\vec{F}\right\}$

Знак момента пары определяется следующим образом. Если вращение пары сил направлено против часовой стрелки, то момент пары положителен. Если вращение пары сил направлено по часовой стрелки, то момент пары отрицателен.

Рассмотрим следующие теоремы, посвященные парам сил.

Теорема 1. Алгебраическая сумма моментов сил, составляющих пару, относительно произвольной точки плоскости не зависит от выбора этой точки и равен моменту пары.

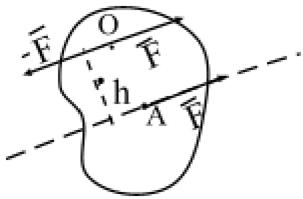
Теорема 2. Не нарушая состояния твердого тела, пару сил можно переносить в плоскости ее действия.

Теорема 3. Пары сил, моменты которых равны, эквивалентны.

Теорема 4. При сложении нескольких пар сил на плоскости получается равнодействующая пара, момент которой равен сумме моментов слагаемых пар.

Приведение силы к данной точке

При приведении силы к данной точке добавляется присоединенная пара сил, момент которой равен моменту данной силы относительно центра приведения. Это означает, что, не нарушая состояния твердого тела, можно силу $\vec{F}$ приложить в точке O, добавив присоединенную пару сил.



Сила, приложенная в центре приведения O ***и присоединенная пара сил***

Приведение силы к данному центру используется при преобразовании произвольной плоской системы сил к простейшему виду.

В результате приведения произвольной плоской системы сил к единому центру O система сил преобразуется к приложенной в этом центре силе, равной главному вектору

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

и паре сил, момент которой равен главному моменту

$$\sum_k m_o(\overline{F}_k) = 0 .$$

Не следует отождествлять главный вектор $\vec{R}$ с равнодействующей силой. Равнодействующая сила эквивалентна данной системе сил, а главный вектор эквивалентен данной системе сил только совместно с главным моментом.

Раздел 1. Обзор основных приемов решения задач статики

Все, что ограничивает перемещения тела в пространстве, называют связью. Силу, с которой данная связь действует на тело, препятствуя его перемещениям, называют реакцией связи.

Одно из ключевых положений статики занимает ***принцип освобождаемости от связей,*** который формулируется следующим образом.

Всякое несвободное тело можно освободить от связей, заменив их реакциями, после чего тело можно рассматривать как свободное, находящееся под действием заданных сил и реакций связей.

Глава 1. Основные типы реакций связей

Основными типами реакций связей, наиболее часто встречающиеся при решении задач по статике студентами технологических специальностей являются:

- гладкая поверхность (без трения);
- гладкий выступ;
- гибкая невесомая нить;
- невесомый стержень с шарнирно закрепленными концами;
- подвижный шарнир без трения (каток);
- неподвижный шарнир;
- жесткая заделка.

Рассмотрим каждый тип реакций связей подробнее.

1.1. Гладкая поверхность

Пусть тело опирается на гладкую поверхность **AB** и соприкасается с ней в некоторой точке. Реакция гладкой поверхности приложена в точке касания и направлена по нормали к поверхности. Обычно такие силы называются нормальными силами или нормальными реакциями опоры и обозначаются буквой $\overline{N}$.

На ***рис.1.1*** приведены примеры реакции гладкой поверхности.

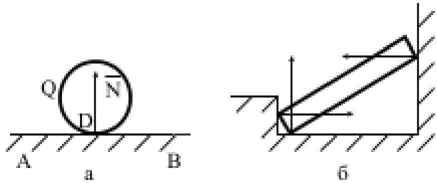


Рис.1.1. Соприкосновения с гладкой поверхностью

1.2. Гладкий выступ

Пусть балка **DE** опирается в точке **D** о гладкую поверхность, а в точке **E** о гладкий выступ. Реакция гладкой поверхности приложена в точке касания и направлена по нормали к поверхности, в то время как реакция гладкого выступа приложена в точке опоры балки и направлена по нормали к оси балки. Пример опирания о гладкий выступ с указанием реакции связи приведен на ***рис.1.2***.

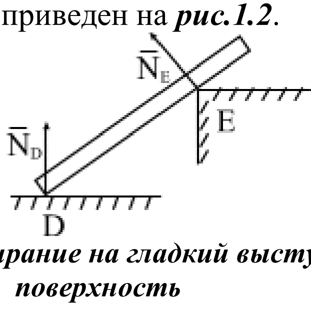


Рис.1.2. Опирание на гладкий выступ и гладкую поверхность

1.3. Гибкая невесомая нить

Пусть некоторый груз весом $\boldsymbol{P}$ подвешен на гибкой нерастяжимой и невесомой нити. Связь, осуществленная в виде гибкой нерастяжимой нити, не дает грузу удаляться от точки крепления нити к грузу. В этом случае реакция гибкой нерастяжимой и невесомой нити приложена к точке крепления нити к телу **D** и направлена вдоль нити (***рис.1.3***). Реакцию связи нити иногда называют натяжением нити и обозначают буквой $\overline{\boldsymbol{T}}$. В точке **A** реализуется опирание на гладкую поверхность без трения с реакцией $\boldsymbol{R}_A$.

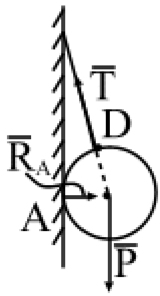
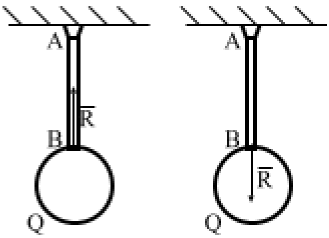


Рис.1.3 Соединение гибкой нерастяжимой нитью

1.4. Невесомый прямолинейный стержень с шарнирно закрепленными концами

Пусть груз *Q* весом $\boldsymbol{P}$ закреплен в точке **B** прямолинейным невесомым стержнем. Трением в шарнирах можно пренебречь. Реакция невесомого стержня с шарнирно закрепленными концами приложена к точке крепления стержня с грузом и направлена по оси стержня.

Если стержень под действием нагрузки подвергается сжатию, то реакция стержня $\overline{\boldsymbol{R}}$ направлена в сторону, указанную на ***рис.1.4а***. Если стержень под действием нагрузки подвергается растяжению, то реакция стержня $\overline{\boldsymbol{R}}$ направлена в сторону, указанную на ***рис.1.4б.***



а) б)

Рис.1.4. Пример закрепления груза невесомым стержнем

При решении задач, в которых связью служит невесомый стержень с шарнирно закрепленными концами, вначале указываем предположительное направление силы $\overline{\boldsymbol{R}}$. Если после решения задачи окажется, что $\boldsymbol{R > 0}$, т.е. проекция реакции связи $\overline{\boldsymbol{R}}$ на направление $\boldsymbol{AB}$ положительно, то это означает, что сила $\overline{\boldsymbol{R}}$ направлена на чертеже правильно. Если после решения задачи окажется, что $\boldsymbol{R < 0}$, т.е. проекция реакции связи $\overline{\boldsymbol{R}}$ на направление $\boldsymbol{AB}$ отрицательно, то это означает, что сила $\overline{\boldsymbol{R}}$ направлена на чертеже в противоположную сторону.

1.5. Подвижный шарнир без трения (каток)

Пусть тело весом $\overline{\boldsymbol{P}}$ опирается точкой **С** на подвижный каток, который может перемещаться по гладкой плоской поверхности **АВ**. Поскольку данная опора допускает возможность перемещения по направлению поверхности **АВ**, то в этом направлении отсутствует компонента реакции шарнира. Таким образом, реакция подвижного шарнира $\overline{\boldsymbol{N}}$, как показано на ***рис.1.5***, приложена в точке **С** и направлена по нормали к поверхности перемещения катка **АВ**.

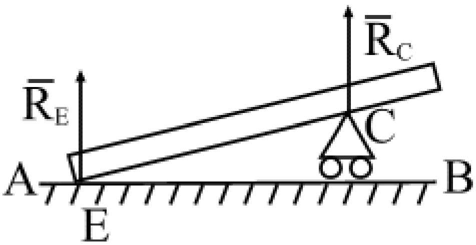


Рис.1.5 Подвижный шарнир (каток)

1.6. Неподвижный шарнир

Пусть тело Q весом $\overline{\boldsymbol{P}}$ опирается точкой **D** на неподвижный шарнир. Реакция неподвижного шарнира приложена в точке касания тела **D** с осью шарнира. Направление реакции неподвижного шарнира заранее неизвестно.

При решении задач реакцию неподвижного шарнира обычно раскладывают на две составляющие, соответствующие проекциям на оси координат. При этом могут быть случаи, когда реакцию неподвижного шарнира удобнее раскладывать по другим направлениям.

Составляющие реакции неподвижного шарнира обычно обозначают символами $\boldsymbol{R_{DX}}$ и $\boldsymbol{R_{DY}}$.

Направления каждой из составляющих реакции неподвижного шарнира обычно заранее неизвестно, поэтому, как показано на рис.6, при решении задач вначале указывают предполагаемые направления составляющих реакции шарнира.

Если после решения задачи окажется, что $\boldsymbol{R_{DX} > 0}$ и $\boldsymbol{R_{DY} > 0}$ то это означает, что обе составляющие на чертеже указаны правильно. В противном случае, составляющая реакции, имеющая отрицательный знак, должна быть направлена в противоположную сторону.

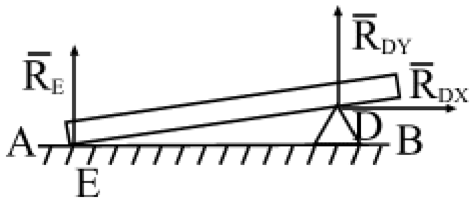


Рис.1.6. Неподвижный шарнир

В точке **E** реализуется свободное опирание с реакцией $\boldsymbol{\overline{R}_E}$

Пример.

Балка **DE** закреплена в точке **D** неподвижным шарниром, а в точке **E** опирается на гладкую поверхность стены (***рис.1.7а***). Для балки **DE** связями служат два тела: неподвижный шарнир **D** и гладкая поверхность стены. Раскладываем реакцию неподвижного шарнира на две составляющие $\boldsymbol{\overline{X}_D}$ и $\boldsymbol{\overline{Y}_D}$ и показываем на чертеже предполагаемые направления этих составляющих.

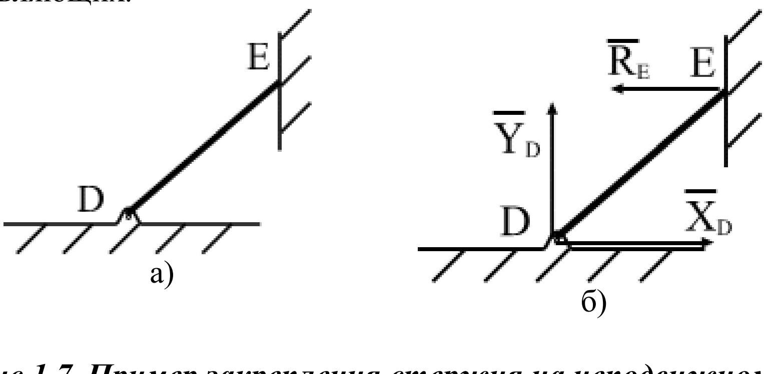


Рис.1.7. Пример закрепления стержня на неподвижном шарнире

Реакция гладкой стены приложена в точке **E** касания балки и стены и направлена по нормали к стене (***рис.1.7б***).

Раскладываем реакцию неподвижного шарнира на две составляющие $\overline{X}_D$ и $\overline{Y}_D$ и показываем на чертеже предполагаемые направления этих составляющих.

Реакция гладкой стены приложена в точке **E** касания балки и стены и направлена по нормали к стене (рис.7б).

На ***рис.1.8*** приведен также пример использования опирания на неподвижный шарнир.

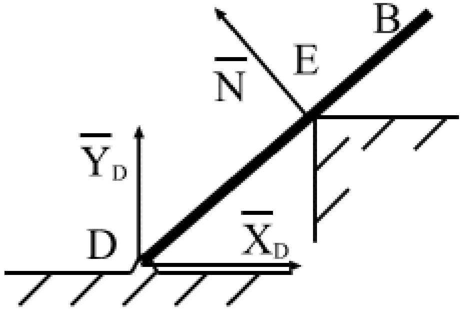


Рис.1.8. Опирание на неподвижный шарнир

1.7. Жесткая заделка

Пусть стержень **AB** концом **A** жестко заделан в стенку (***рис.1.9***). Реакция заделки состоит из силы $\overline{R}_a$, приложенной к точке **A**, и пары сил с неизвестным реактивным моментом M_a. Реактивная пара сил возникает вследствие того, что стержень в точке **A** будет сопротивляться повороту вокруг точки **A**. Направление силы реакции $\overline{R}_a$ заранее неизвестно. Поэтому силу раскладывают на две составляющие. Направление реактивного момента заранее тоже неизвестно.

Поэтому обычно предварительно назначают положительное направление реактивного момента.

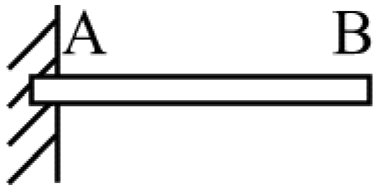


Рис.1.9. Схематическое представление жесткой заделки

При решении задач, в которых связью служит жесткая заделка в стене, указывают предполагаемые направления составляющих силы $\overline{R}_A(X_A, Y_A)$ и предполагаемое направление вращения пары с моментом M_A (***рис.1.10***).

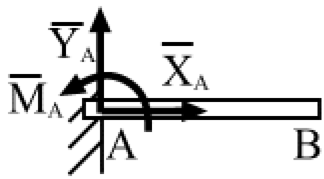


Рис.1.10. Предполагаемые направления компонентов реакции опоры и неизвестного момента M_a

Если после решения задачи окажется, что величины какой - либо составляющей реакции заделки, либо момент M отрицательны, значит, соответствующая составляющая, либо направление вращения пары противоположны указанным на ***рис.1.10.***

Следующие два типа связей предназначены для изучения студентами механических специальностей.

1.8. Цилиндрический подшипник

Вал **DE** закреплен в двух подшипниках **A** и **B** и может вращаться в этих подшипниках относительно свой оси.

Подшипники такого типа называют радиально – упорными или цилиндрическими.

Ось вала **DE** расположена горизонтально. Ось проекции **Ax** совпадает с осью вала. Ось **Az** вертикальна, **Ay** – горизонтальна.

Равновесие вала, закрепленного в двух цилиндрических подшипниках, рассматривается при решении многих задач в курсе сопротивления материалов и курсовом проектировании по деталям машин.

Для вала **DE** связями служат два тела – два подшипника **A** и **B** (***рис.1.9а***). Реакция цилиндрического подшипника приложена в точке соприкосновения вала и подшипника и всегда направлена перпендикулярно оси вала; как именно направлена эта реакция, заранее неизвестно.

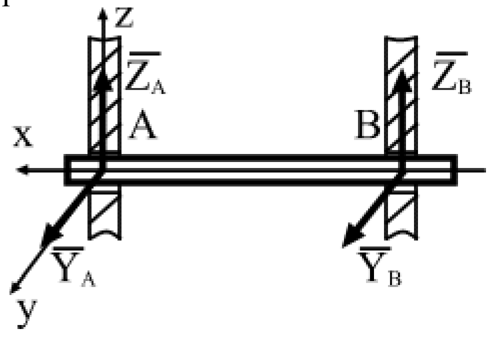


Рис.1.11. Схематическое представление подшипника

При решении задач неизвестную реакцию подшипника обычно раскладывают на две составляющие, которые направляют по осям **Ay** и **Az** и обозначают $\overline{Y}_A$ и $\overline{Z}_A$ и, аналогично, $\overline{Y}_B$ и $\overline{Z}_B$.

В какую именно сторону направлена каждая из составляющих, также заранее неизвестно, поэтому при решении задачи вначале указывают предполагаемые направления составляющих (***рис.1.12***).

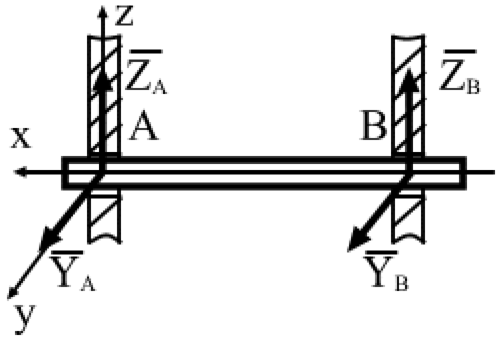


Рис.1.12. Предполагаемое направление реакций подшипника

Если после решения задачи окажется, что величины некоторых составляющих отрицательны, то действительные направления соответствующих составляющих противоположны указанным на чертеже.

1.9. Цилиндрический подшипник с подпятником

Вал **DE** закреплен в радиально упорном подшипнике **A** и подпятнике **B** и может вращаться в подшипнике вокруг своей оси (***рис.1.13***).

Ось вала **DE** расположена вертикально. Ось **Bz** совпадает с осью вращения вала, оси **Bx** и **By** перпендикулярны оси вала.

Для вала **DE** связями служат два тела - радиально упорный подшипник **A** и подпятник **B**.

Реакция радиально упорного подшипника рассмотрена выше.

Раскладываем реакцию радиально упорного подшипника **A** на две составляющие, направленные параллельно осям **Bx** и **By**. Эти составляющие обозначим $\overline{X}_A$ и $\overline{Y}_A$.

Реакция подпятника **D** приложена к валу в точке **D**, ее направление заранее неизвестно.

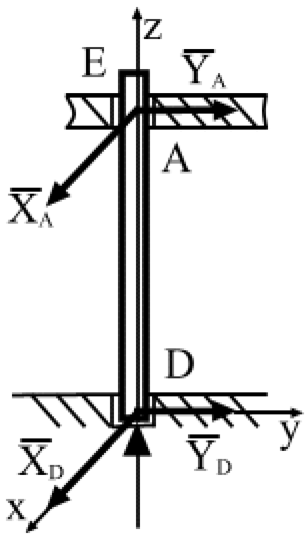


Рис.1.13 Предполагаемое направление реакций подшипника

При решении задачи реакцию подпятника раскладываем на три составляющие, направленные по осям **Bx, By, Bz.** Эти составляющие обозначим $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, $\overline{Z}_B$.

Направление каждой из составляющих заранее неизвестно, поэтому вначале указывают их предполагаемые направления.

Если после решения задачи окажется, что величины некоторых составляющих отрицательны, значит действительные направления соответствующих составляющих противоположны указанным на чертеже.

Глава 2. Наиболее частые случаи использования основных типов связей (с разбором типичных ошибок)

2.1. Случай, когда к телу, равновесие которого рассматриваем, на гибкой невесомой нити подвешен груз

Невесомая балка **AB** в точке **A** закреплена неподвижным шарниром, а в точке **E** опирается на гладкий выступ. В точке **B** к балке прикреплена гибкая невесомая нить, переброшенная через неподвижный блок без трения. К свободному концу нити прикреплен груз **D**, весом ***P*** (***рис.2.1***).

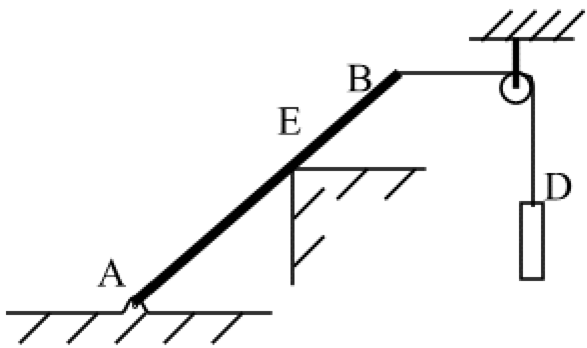


Рис.2.1. Схема крепления

***Укажем силы, действующие на балку* AB.**

Для балки **AB** связями служат: неподвижный шарнир, расположенный в точке **A,** и гладкий выступ, расположенный в точке **E**.

Как направлены реакции таких связей, рассмотрено выше.

Указывая активные силы, студенты иногда допускают ошибку: они указывают в числе активных сил вес груза ***P*** (***рис.2.2***).

Это грубая ошибка, так как сила ***P*** действует не на балку **AB**, а на груз **D**, т.е. совсем на другое тело.

Следует указать, что на балку **AB** действует активная сила – сила натяжения гибкой невесомой нити. Эта сила приложена в точке **B** крепления нити к балке **AB** и направлена вдоль нити.

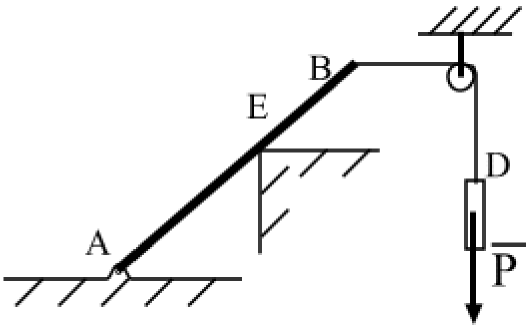


Рис.2.2. Схема крепления

Обозначим эту силу буквой $\overline{\boldsymbol{T}}$. Величина $\overline{\boldsymbol{T}}$ в свою очередь численно равна модулю силы $\overline{\boldsymbol{P}}$, то есть

$$\left|\overline{\boldsymbol{T}}\right| = \left|\overline{\boldsymbol{P}}\right|.$$

Правильное указание направления реакции в точке **B** дано на ***рис.2.3.***

Из этого рисунка следует, что сила натяжения нити приложена к точке **B** и направлена вдоль нити. Реакции в точках **A** и **E** приложены так, как указаны на рис. 2.3. Отметим, что если вес балки не учитывать, то в соответствии с теоремой о трех силах, на балку действует сходящаяся система сил.

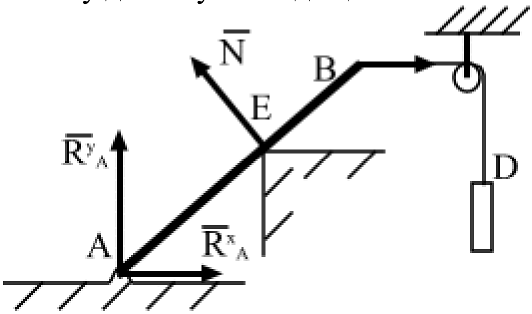


Рис.2.3 Направление реакций связи

2.2. Случай, когда к телу, равновесие которого рассматриваем, приложена равномерно распределенная нагрузка

На участок $\boldsymbol{AD = l}$ балки действует равномерно распределенная нагрузка интенсивности $\boldsymbol{q}$, $[q] = \frac{н}{м}$ (***рис.2.4***).

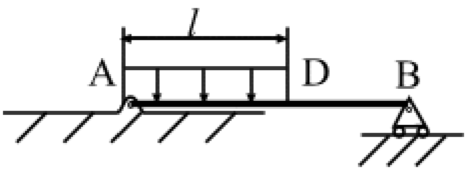


Рис.2.4. Схематическое представление распределенной нагрузки

При определении опорных реакций в задачах, где на тело действует равномерно распределенная нагрузка, эту нагрузку заменяют одной сосредоточенной силой $\boldsymbol{Q}$. Величина $\boldsymbol{Q = q \cdot l}$, т.е. равна произведению интенсивности нагрузки на длину нагруженного участка.

Положение силы $\boldsymbol{Q}$. Если распределенная нагрузка является равномерно распределенной по длине нагруженного участка, то сосредоточенная сила $\boldsymbol{Q = q \cdot l}$ приложена к середине длины нагруженного участка. Направление этой силы совпадает с направлением распределенной нагрузки (***рис.2.5***).

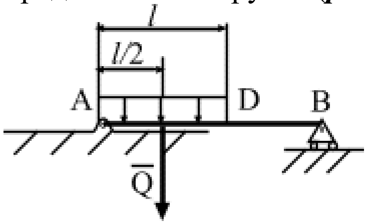


Рис.2.5 Замена распределенной нагрузки q сосредоточенной силой $\boldsymbol{Q = q \cdot l}$

В случае применения распределенной нагрузки студенты часто забывают, что сосредоточенная сила приложена к середине нагруженного участка конструкции.

2.3. Случай, когда на тело, равновесие которого рассматриваем, действует пара сил

На балку **AB** действует пара сил с моментом $\boldsymbol{m_1}$. Направление вращения пары сил указано стрелкой на ***рис.2.6.*** При определении опорных реакций в задачах, где на тело действует пара сил, следует учитывать, что в плоскости пары сумма проекций сил пары на любую ось равна нулю;

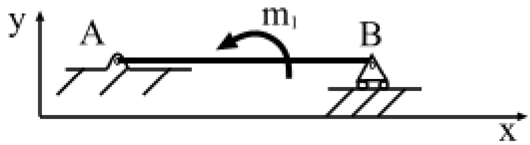


Рис.2.6. Схематическое представление момента силы

сумма моментов сил пары относительно любой точки – есть величина постоянная, равная моменту пары.

2.4. Определение момента силы относительно центра

В некоторых задачах для определения алгебраического момента силы относительно центра воспользоваться формулой $\boldsymbol{m_0(F) = \pm F \cdot h}$ достаточно сложно, так как вычисление $\boldsymbol{h}$ часто становится относительно сложной геометрической задачей. ***В дальнейшем алгебраический момент силы для краткости будем называть моментом силы.***

В этом случае для вычисления момента силы $\overline{\boldsymbol{F}}$ относительно некоторого центра можно воспользоваться следствием ***теоремы Вариньона.***

Предположим, что необходимо вычислить момент силы $\overline{\boldsymbol{F}}$ относительно некоторой точки **О**. С этой целью разложим силу $\overline{\boldsymbol{F}}$ на две составляющие, приложенные к той же точке, где приложена сила $\overline{\boldsymbol{F}}$. В общем случае можно записать:

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\boldsymbol{F}}_1 + \overline{\boldsymbol{F}}_2 .$$

Направления составляющих $\overline{\boldsymbol{F}}_1$ и $\overline{\boldsymbol{F}}_2$ нужно выбирать таким образом, чтобы момент каждой составляющей относительно центра **О** можно было бы легко вычислить.

Обычно в задачах бывает удобно разложить силу на составляющие, параллельные осям координат, т.е. $\overline{F} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$.

Таким образом, если вычислены моменты составляющих силы $\overline{F}$, а именно $m_0(F_1)$ и $m_0(F_2)$, то согласно теореме Вариньона

$$m_0(F) = m_0(F_1) + m_0(F_2).$$

Опыт проведения практических занятий по разделу ***Статика*** среди студентов технологических специальностей показывает, что наиболее сложным для студентов здесь оказывается определение правильного направления (и соответственно знака) момента силы. Также студенты затрудняются правильно вычислить плечо силы. Здесь следует обратить внимание на правило знаков, который заключается в следующем. ***Если момент силы стремится повернуть конструкцию против часовой стрелки, то такой момент силы принято считать положительным. Если момент силы стремится повернуть конструкцию по часовой стрелке, то такой момент силы принято считать отрицательным***.

Иногда при вычислении момента силы студенты учитывают знаки проекции силы на ту или иную ось. Это грубая ошибка. ***Знак момента силы определяется только направлением поворота. Знак проекции силы при определении знака момента не учитывается.***

Плечо силы удобно определять следующим образом. ***Плечо силы - это кратчайшее расстояние от точки, относительно которой берется момент силы, до линии действия силы*** (***рис.2.7***). На ***рис.2.7*** указаны точка приложения силы $\overline{F}$ (точка **А**), точка **О,** относительно которой берется момент силы и линия действия силы ab .

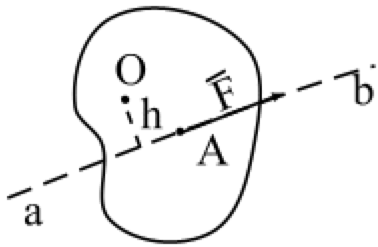


Рис.2.7 Определение величины h

Пример 2.1.

Пусть конструкция **ABCDE** концом **A** жестко заделана в вертикальную стенку (***рис.2.8***), в точке **C** приложена сила $\overline{F}_C$, а на конце конструкции в точке **E** приложена сила $\overline{F}_E$. Определить проекции сил $\overline{F}_C$ и $\overline{F}_E$ на оси координат и моменты этих сил относительно точки **A**.

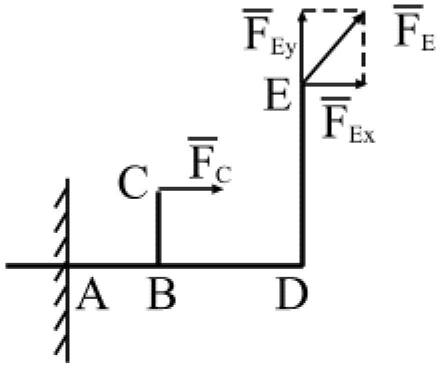


Рис.2.8 Пример вычисления момента силы

Решение.

Проведем оси координат, как указано на ***рис.2.8.*** Проведем линию действия силы $\overline{F}_C$ и определим плечо силы h_1

как расстояние от точки **A** до линии действия силы $\overline{F_C}$. Тогда $h_1 = BC$ и $m_A \overline{F_C} = -BC \cdot \overline{F_C}$.

Далее разложим силу $\overline{F_E}$ на составляющие по осям координат. Тогда $F_{E\,x} = \left|\overline{F_E}\right| \cdot cos\,\alpha, \quad F_{E\,y} = -\left|\overline{F_E}\right| \cdot sin\,\alpha$. Проекция силы $\overline{F_E}$ на ось **OX** оказалась положительной, ввиду того, что направление проекции и направление оси **OX** совпадают. Проекция силы $\overline{F_E}$ на ось **OY** оказалась отрицательной, поскольку направление проекции и направление оси **OY** противоположны.

Моменты проекций силы относительно точки **A** запишутся в виде $m_A F_{E\,x} = -DE \cdot F_{2E\,x}$ и $m_A F_{E\,y} = AD \cdot F_{E\,y}$. Из последних выражений следует, что несмотря на то, что $F_{E\,y}$ есть величина отрицательная, момент силы $m_A F_{E\,y}$ является величиной положительной.

Пример 2.2.

На изображенную на ***рис.2.9*** часть фермы действуют две сосредоточенные силы $\overline{F}$ и $\overline{Q}$. Вычислить моменты сил $\overline{F}$ и $\overline{Q}$ относительно точки крепления **B**.

Обозначим угол $\alpha = \angle ABC$, тогда

$$tg\varphi = \frac{a}{4a} = 0{,}25; \quad \varphi = arctg0{,}25 = 14^0;$$

$$sin(90^0 - 14^0) = sin76^0 = 0{,}970;$$

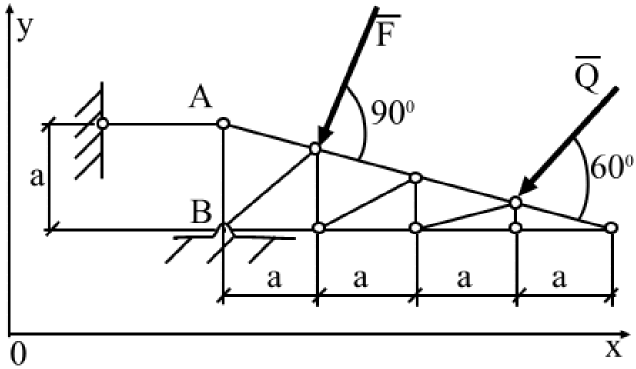


Рис.2.9. Схематическое изображение фермы и действующих на нее сил

$$\boldsymbol{cos(90^0 - 14^0) = cos76^0 = 0{,}242;}$$

$$\boldsymbol{sin(60^0 - 14^0) = sin46^0 = 0{,}719;}$$

$$\boldsymbol{cos(60^0 - 14^0) = cos46^0 = 0{,}695.}$$

Для решения задачи $\overline{F}$ и $\overline{Q}$ раскладываем на составляющие, параллельные осям **Ox** и **Oy**, как указано на ***рис.2.10***.

Тогда

$$\boldsymbol{F_1 = F\,sin76^0 = 0{,}970F;}$$

$$\boldsymbol{F_2 = F\,cos76^0 = 0{,}242F;}$$

$$Q_1 = Q\sin 46^0 = 0{,}719Q;$$

$$Q_2 = Q\cos 46^0 = 0{,}695Q.$$

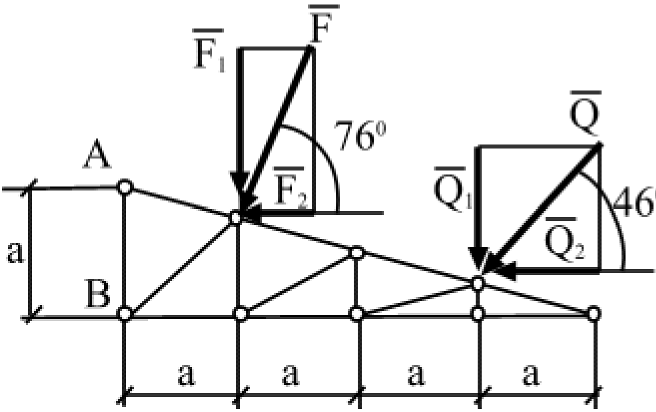


Рис.2.10.Разложение сил на составляющие

В соответствие с теоремой Вариньона запишем:

$$m_B(\overline{F}) = m_B(\overline{F_1}) + m_B(\overline{F_2});$$
$$m_B(\overline{Q}) = m_B(\overline{Q_1}) + m_B(\overline{Q_2});$$

и поскольку моменты этих четырех сил $\overline{F_1}$, $\overline{F_2}$, $\overline{Q_1}$, $\overline{Q_2}$ относительно точки **В** вычислить просто, получим:

$$m_B(\overline{F}) = -F_1 \cdot a + F_2 \cdot \frac{3}{4}a =$$
$$= -F \cdot 0{,}970a + F \cdot 0{,}242 \cdot 0{,}75a = -0{,}788F \cdot a$$

$$m_B(\overline{Q}) = -Q_1 \cdot 3a + Q_2 \cdot \frac{1}{4} a =$$

$$= -Q \cdot 0,719 \cdot 3a + Q \cdot 0,695 \cdot 0,25a = -1,983Q \cdot a$$

Пример 2.3.Равновесие произвольной плоской системы сил

На конструкцию, представленную на ***рис.2.8,*** действуют сосредоточенные силы $\vec{F}_c$ и $\vec{F}_E$. Сила $\vec{F}_c$ приложена к точке C, а сила $\vec{F}_E$ приложена к точке E и наклонена к линии горизонта на угол α. Заданная конструкция в точке A жестко заделана в вертикальной стене. Определить реакции связи X_A, Y_A и реактивный момент m_a, если $F_c = 50H$, $F_E = 100H$, угол наклона $\alpha = 30^0$, $AB = BC = 2м$, $BD = DE = 4м$.

Решение

Заменим схему, представленную на ***рис.2.8*** расчетной схемой (***рис.2.11***). При этом, пользуясь принципом освобождения от связей, заменим стенку реакциями связи X_A, Y_A и реактивным моментом m_a.

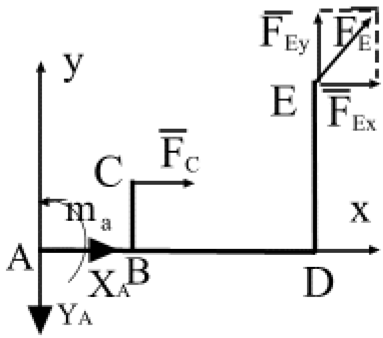


Рис.2.11. Расчетная схема

Введем систему координат x, A, y и определим проекции заданных сил на оси координат Ax и Ay.

$$F_{cx} = F_c = 50H \qquad\qquad F_{cy} = 0$$

$$F_{Ex} = F_E \cdot \cos(30^o) = 100 \cdot 0.86 = 86H$$

$$F_{Ey} = F_E \cdot \sin(30^o) = 100 \cdot 0.5 = 50H$$

Необходимые и достаточные условия равновесия произвольной плоской системы сил определяются равенствами нулю главного вектора и главного момента. В проекциях на оси координат эти условия запишутся в виде

$$\sum_k F_{kx} = 0,$$
$$\sum_k F_{ky} = 0,$$
$$\sum_k m_o(\overline{F}_k) = 0.$$

В данном случае, пользуясь теоремой Вариньона и правилом знаков для вычисления алгебраического момента силы, получим следующую запись уравнений равновесия

$$(1)\ \sum_k F_{kx} = X_A + F_{cx} + F_{Ex} = 0$$

$$(2)\ \sum_k F_{ky} = -Y_A + F_{Ey} = 0$$

$$(3)\ \sum_k m_o(\overline{F}_k) = m_a - F_c \cdot BC - F_{Ex} \cdot DE + F_y \cdot AD = 0$$

Из уравнения (1) следует

$$X_A = -50 - 86 = -136H$$

$$Y_A = 50H$$

$$m_a = 144H \cdot м$$

Отрицательное значение реакции X_A означает, что направление реакции, указанное на ***рис.2.11***, угадано не правильно. В действительности направление реакции X_A является противоположным указанному на ***рис.2.11***. Положительное значение реакции Y_A и реактивного момента m_a означает, что эти направления указанные на ***рис.2.11***, угаданы правильно.

Глава 3.Решение задач, в которых рассматривается равновесие сочлененных тел

Необходимые и достаточные условия равновесия произвольной плоской системы сил определяются равенствами нулю главного вектора и главного момента

$$\overline{R} = 0, \ \overline{M} = 0.$$

Поскольку вектор $\overline{R}$ равен нулю, то равны нулю и его проекции на оси координат и величина $M_0 = 0$, где M_0 - алгебраический момент, а точка **О** – произвольная точка в плоскости действия сил.

В этом случае *основная форма условий равновесия* запишется в виде

$$\sum_k F_{kx} = 0,$$

$$\sum_k F_{ky} = 0,$$

$$\sum_k m_o(\overline{F}_k) = 0 .$$

Кроме основной формы условий равновесия, существуют еще две формы условий равновесия, обычно используемые для проверки правильности решения задачи.

Вторая форма условий равновесия

$$\sum_k F_{kx} = 0 ,$$

$$\sum_k m_A(\overline{F}_k) = 0 ,$$

$$\sum_k m_B(\overline{F}_k) = 0 .$$

Третья форма условий равновесия

$$\sum_k m_A(\overline{F}_k) = 0 ,$$

$$\sum_k m_B(\overline{F}_k) = 0 ,$$

$$\sum_k m_C(\overline{F}_k) = 0 .$$

При решении задач, в которых в равновесии находятся два взаимодействующих между собой тела (так называемые сочлененные тела), надо рассматривать равновесие каждого тела в отдельности.

При этом необходимо учитывать, что силы, с которыми действуют друг на друга два тела, всегда равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны.

Пример 3.1.

Стержень **AB** в точке **A** заделан в стену. В точке **B** шарниром к ней присоединен второй стержень **DE**. Стержень

DE свободно опирается на гладкую поверхность в точке **E**. Стержни **AB** и **DE** образуют сочлененные тела (***рис.3.1***).

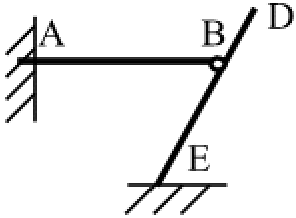


Рис.3.1. Сочленение двух стержней

Предположим, что сила действия шарнира **B** на стержень **DE** имеет составляющие $\overline{\boldsymbol{R}}_x$ и $\overline{\boldsymbol{R}}_y$, направленные как указано на ***рис. 3.2***.

Тогда сила действия этого же шарнира **B** на балку **AB** имеет составляющие $\overline{\boldsymbol{X}}_B$ и $\overline{\boldsymbol{Y}}_B$ (***рис.3.3***).

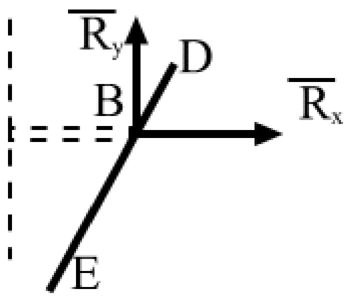


Рис.3.2. Влияние стержня AB на стержень CD

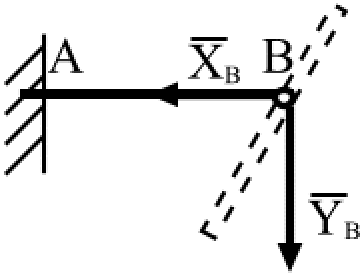


Рис.3.3 Влияние стержня CD на стержень AB

Причем, в соответствии с аксиомой статики о равенстве сил действия и противодействия, соответствующие силы равны по модулю и противоположны по направлению

$$\overline{X}_B = -\overline{R}_x, \qquad X_B = R_x,$$
$$\overline{Y}_B = -\overline{R}_y, \qquad Y_B = R_y.$$

Пример 3.2.

Две однородные балки **AB** и **DE** весом P_1 и P_2 соединены шарниром **B** так, как указано на ***рис. 3.4.***

На балку **DE** в точке **D** действует сила $\overline{F}$, направленная горизонтально.

Определить реакцию опоры в точке **E**, усилие в шарнире **B** и реакцию опоры **A**.

Составим таблицу данных.

Таблица 3.1

Исходные данные

Величина	P_1	P_2	**AB**	**DE**	**BD**	F
Размерность	н	н	м	м	м	н
Значение	100	160	8	6	2	200

Конструкция представляет собой шарнирное соединение в точке **B** двух стержней.

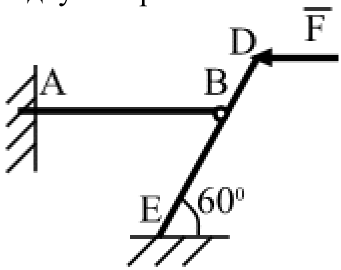


Рис.3.4 Исходная постановка задачи

Решение задачи.

Рассмотрим равновесие каждого стержня в отдельности.

Для стержня **DE** нарисуем схему, с указанием всей действующих на стержень сил (***рис.3.5***).

На стержень **DE** действуют: активная сила $\overline{F}$, приложенная в точке **D** и сила P_2, приложенная в точке $\mathbf{C_2}$.

Связями для балки являются гладкая горизонтальная поверхность в точке **E** и неподвижный шарнир в точке **B**.

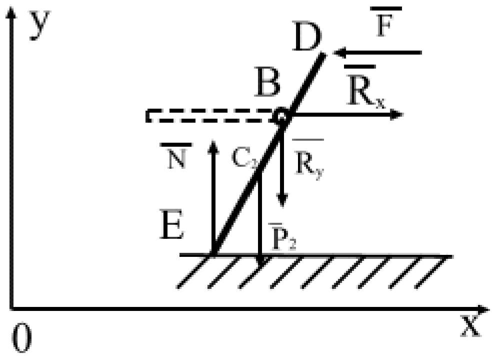


***Рис.3.5. Схема равновесия стержня* DE**

Указываем реакции связей.

Реакцию гладкой поверхности в точке **E** проводим по нормали к поверхности. Реакция неподвижного шарнира показана двумя составляющими: $\overline{R}_x$ и $\overline{R}_y$.

Рисуем оси координат.

На балку действует произвольная плоская система сил. Для равновесия такой системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три условия равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$\sum m_0(\overline{F}_k) = 0.$$

Моменты всех действующих на стержень **DE** сил можно вычислять относительной любой произвольно выбранной точки. Однако удобнее в нашем примере в качестве такой точки выбрать точку **B.** Это связано с тем, что через точку **B** проходят линии действия двух, пока неизвестных и подлежащих определению реакций $\overline{R}_x$ и $\overline{R}_y$.В этом случае, моменты этих сил относительно точки **B** равны нулю, поскольку линии действия этих сил проходят через точку **B**.

Проведем вспомогательные вычисления

$$BE = 6 - 2 = 4(м);$$

$$C_2B = \frac{DE}{2} - DB = 3 - 2 = 1(м).$$

Теперь решение можно оформить в виде следующей таблицы.

Значение реакций

Таблица 3.2

$\overline{F}_x$	F_{kx}	F_{ky}	$m_0(\overline{F}_x)$
$\overline{F}$	$-F$	0	$F \cdot DB \cdot \sin 60^0$
P_2	0	$-P_2$	$P_2 \cdot C_2B \cdot \sin 30^0$
$\overline{N}$	0	N	$-N \cdot EB \cdot \sin 30^0$
$\overline{R}_x$	R_x	0	0
$\overline{R}_y$	0	$-R_y$	0

Составляем уравнение равновесия

1. $\sum F_{kx} = -F + R_x = 0;$

2. $\sum F_{ky} = -P_2 + N - R_y = 0;$

3. $$\sum m_0(\overline{F}_x) = F \cdot DB \cdot \sin 60^0 + P_2 \cdot C_2B \cdot \sin 30^0 - N \cdot EB \cdot \sin 30^0 = 0;$$

Решаем эти уравнения относительно неизвестных сил $\overline{R}_x$ и $\overline{R}_y$.и N .

Из уравнения (3) получим:

$$200 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 160 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - N \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 0;$$

откуда

$$N = 213{,}5(H).$$

Из уравнения (1) следует, что

$$R_x = F = 200(H).$$

Из уравнения (2) определими реакцию $\boldsymbol{R_y}$

$$\boldsymbol{R_y} = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{P_2} = 213{,}5 - 160 = 53{,}5(\boldsymbol{H}).$$

Итак:

$$\boldsymbol{N} = 213{,}5\boldsymbol{H};$$
$$\boldsymbol{R_x} = 200\boldsymbol{H};$$
$$\boldsymbol{R_y} = 53{,}5\boldsymbol{H}.$$

Поскольку все величины получены положительными, значит все искомые силы на чертеже указаны правильно.

Теперь рассмотрим равновесие стержня **AB**.

Выполняем новый чертеж (***рис.3.6***) и проводим оси координат.

На балку действует активная сила $\boldsymbol{P_1}$, приложенная в точке **C**$_1$.

Связями для балки служат шарнир **B** и заделка в стене, связанная с точкой **A**. Пользуясь принципом освобождаемости от связей, заменим связи их реакциями.

Составляющие реакции шарнира **B** на балку **AB** обозначены $\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{B}}$ причем $\boldsymbol{X_B = R_x = 200\ H}$, $\boldsymbol{Y_B = R_y = 53{,}5\ H}$.

ОБРАТИТЬ ВНИМАНИЕ! Составляющие $\overline{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{B}}$, $\overline{\boldsymbol{Y}}_{\boldsymbol{B}}$ направлены противоположно составляющим $\overline{\boldsymbol{R}}_{x}$, $\overline{\boldsymbol{R}}_{y}$, соответственно.

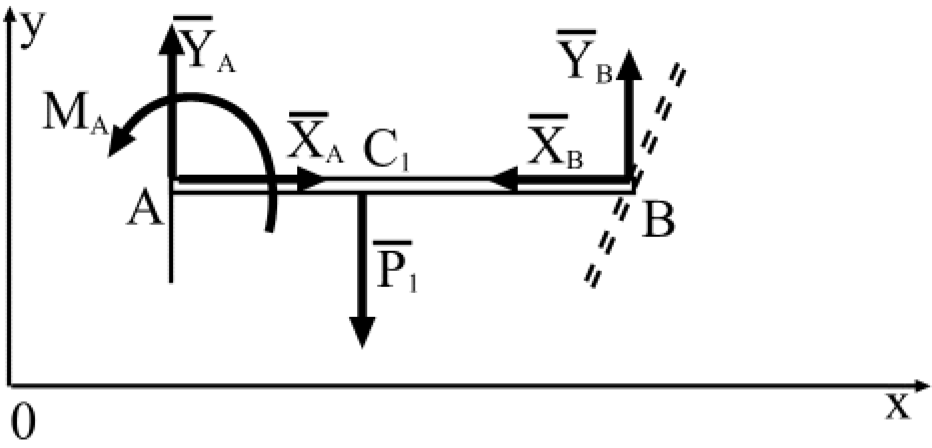


Рис.3.6. Равновесие стержня **АВ**

Реакция заделки имеет три неизвестные величины: $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$, $\overline{M}$.

На балку действует плоская система сил. Для равновесия такой системы необходимо и достаточно, чтобы

выполнились три условия равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0;$$
$$\sum m_0(\overline{F}_k) = 0.$$

Моменты всех действующих на стержень **АВ** сил можно вычислять относительной любой произвольно выбранной точки. Однако удобнее в качестве такой точки на, нашем примере, выбрать точку **А.** Это связано с тем, что через точку **А** проходят линии действия двух, пока неизвестных и подлежащих определению реакций $\overline{X}_A$, $\overline{Y}_A$. В этом случае, моменты этих сил относительно точки **А** равны нулю.

Решение может быть оформлено в виде таблицы 3.3.

Таблица 3.3

Нагрузка	Проекция на ось **Ox**	Проекция на ось **Oy**	Момент силы
$\overline{P}_1$	0	$-\overline{P}_1$	$-\overline{P}_1 \cdot \frac{1}{2} AB$
$\overline{Y}_B$	0	Y_B	$\overline{Y}_B \cdot AB$
$\overline{X}_B$	$-X_B$	0	0
$\overline{Y}_A$	0	Y_A	0
$\overline{X}_A$	X_A	0	0
$\overline{M}$	0	0	M

Составим уравнения равновесия:

4. $\sum F_{kx} = -X_B + X_A = 0.$

5. $\sum F_{ky} = -P_1 + Y_B + Y_A = 0.$

6. $\sum m_A(\overline{F}_k) = -P_1 \cdot \frac{AB}{2} + Y_B \cdot AB + M = 0;$

Решаем эти уравнения.

Из уравнения (4) следует, что

$$X_A = X_B = 200(H).$$

Из уравнения (5) можно подсчитать

$$Y_A = P_1 - Y_B = 100 - 53{,}5 = 46{,}5(H).$$

Неизвестный момент определится из уравнения (6)

$$M = 100 \cdot 4 - 53{,}5 \cdot 8 = 400 - 428 = -28(\,Н \cdot м\,).$$

Усилие в шарнире **В** равно

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{200^2 + 63{,}5^2} =$$
$$= \sqrt{400 + 2850} = \sqrt{42850} = 208(\,Н\,).$$

$$N = 213{,}5\ Н\,;$$
$$R_B = 208\ Н\,;$$
$$X_A = 200\ Н\,;$$
$$Y_A = 46{,}5\ Н\,;$$
$$M = -28Н \cdot м.$$

Таким образом, получены все искомые реакции опор, следовательно, задача статики является решенной.

Для лучшего понимания решения задачи статики для сочлененных тел, приведем решение еще одной задачи с другими типами опор.

Пример 3.3. ***Определение реакций опор составной конструкции.***

Найти реакции опор и давление в промежуточном шарнире составной конструкции. Схема конструкции представлена на ***рис. 3.7*** (размеры – в ***м***), нагрузка указана в ***таблице 3.4.***

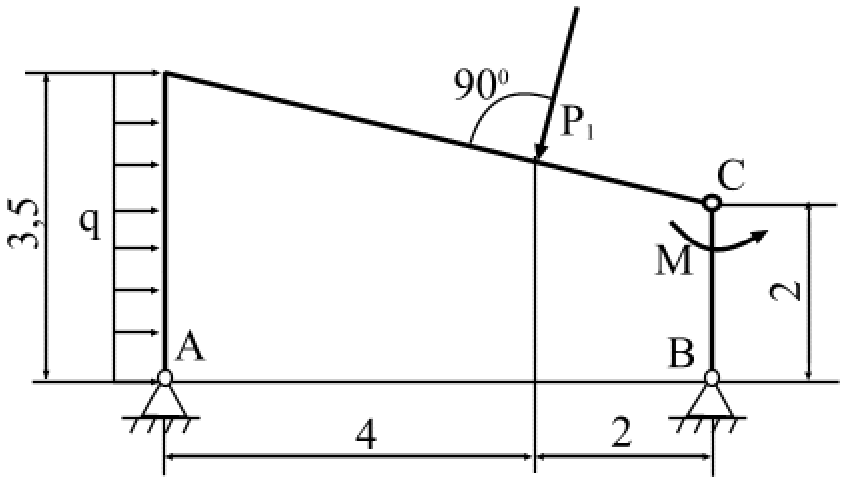


Рис. 3.7. Исходная постановка задачи

Таблица 1

P_1, кН	M, кН·м	q, кН/м
6,0	***25,0***	***0,8***

Заменим опоры в точках $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ реакциями связи, а распределенную нагрузку сосредоточенной. В этом случае укажем все силы и моменты сил, приложенные ко всей конструкции (***рис. 3.8***).

Из **рис.3.8** следует, что на конструкцию действует следующая система сил: реакции опор $\boldsymbol{R_{Ax}}, \boldsymbol{R_{Ay}}, \boldsymbol{R_{Bx}}, \boldsymbol{R_{By}}$, сосредоточенная сила $\boldsymbol{P_1}$, сосредоточенная сила $\boldsymbol{Q}$ и изгибающий момент $\boldsymbol{M}$.

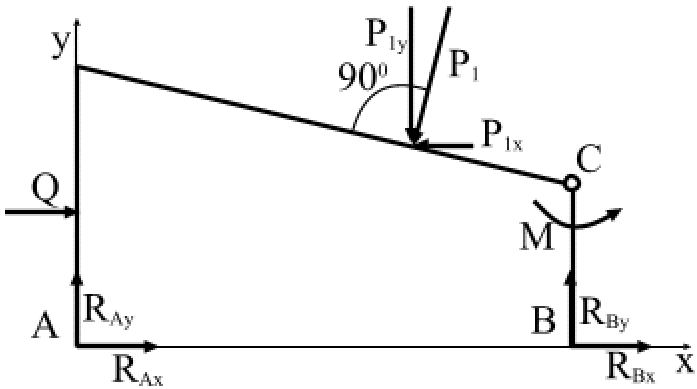


Рис. 3.8. Силы и моменты приложенные ко всей конструкции

Разложим силу $\boldsymbol{P_1}$ на составляющие $\boldsymbol{P_{1x}}$ и $\boldsymbol{P_{1y}}$.

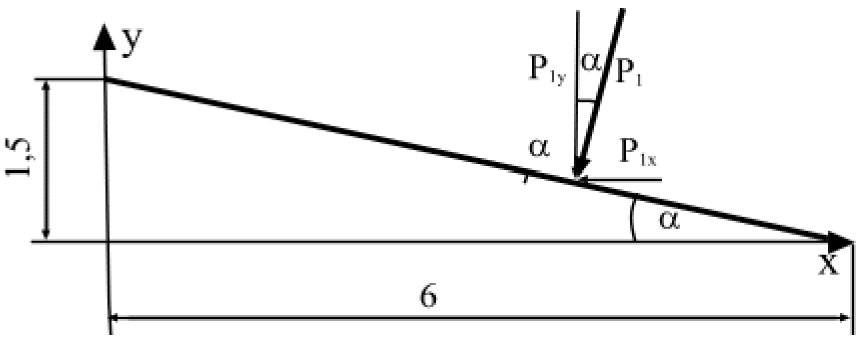


Рис. 3.9 Определение проекций на оси координат

Вычислим проекции силы $\boldsymbol{P_1}$ на оси координат

$$P_{1x} = P_1 \cdot \sin(\alpha) \qquad \sin(\alpha) = \frac{1.5}{\sqrt{6^2 + 1,5^2}} \approx 0,24$$

$$P_{1y} = P_1 \cdot \cos(\alpha) \qquad \cos(\alpha) = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 1,5^2}} \approx 0,97$$

$$P_{1x} = P_1 \cdot \sin(\alpha) = 1{,}44 \ (кН)$$

$$P_{1y} = P_1 \cdot \cos(\alpha) = 5{,}82 \ (кН)$$

$$Q = 3.5 \cdot q = 2.8 \ (кН)$$

Разъединим конструкцию на две части и рассмотрим равновесие каждой части в отдельности

Рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к левой части конструкции (***рис.3.10***):

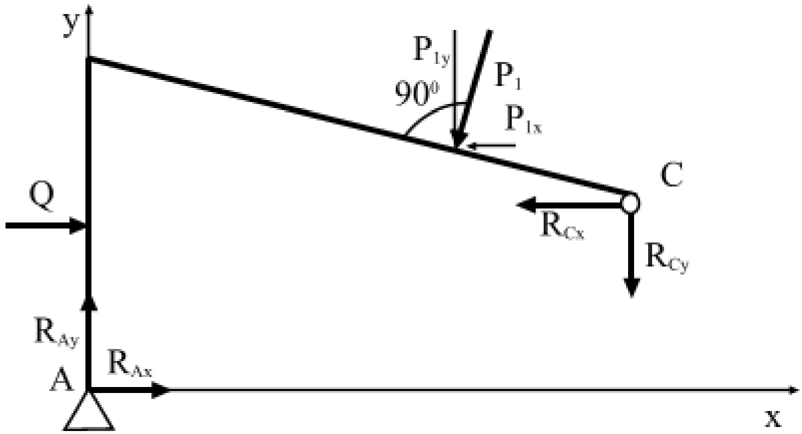


Рис. 3.10. Силы, приложенные к левой части конструкции

Запишем уравнения равновесия:

1) $\sum F_{xi} = 0; \ -R_{Cx} + R_{Ax} + Q - P_{1x} = 0,$

2) $\sum F_{yi} = 0; \ -R_{Cy} + R_{Ay} - P_{1y} = 0,$

Моменты сил, действующих на левую выделенную часть конструкции будем вычислять относительно точки C.

3) $\sum M_{iC} = 0;$ $\quad R_{Ax} \cdot 2 + Q \cdot (2 - \frac{3,5}{2}) + P_1 \cdot \frac{2}{\cos(\alpha)} - R_{Ay} \cdot 6 = 0.$

Теперь рассмотрим систему уравновешивающихся сил, приложенных к правой части конструкции (***рис.3.11***):

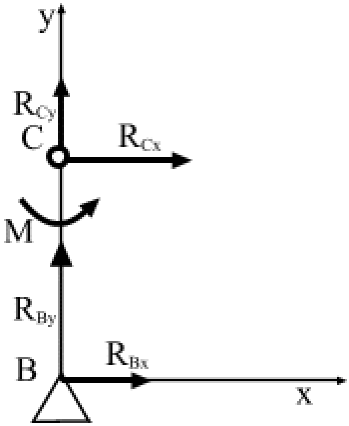


Рис.3.11. Силы, приложенные к левой части конструкции

Запишем уравнения равновесия:

4) $\sum F_{xi} = 0;$ $\quad R_{Cx} + R_{Bx} = 0,$

5) $\sum F_{yi} = 0;$ $\quad R_{Cy} + R_{By} = 0,$

6) $\sum M_{iC} = 0;$ $\quad R_{Bx} \cdot 2 + M = 0,$

Таким образом, имеем систему ***6*** уравнений с ***6*** неизвестными $R_{Ax}, R_{Ay}, R_{Bx}, R_{By}, R_{Cx}, R_{Cy}$.

Из уравнения (***6***)

$$R_{Bx} = \frac{-M}{2} = \frac{-25}{2} = -12{,}5\ kH.$$

Из уравнения (*4*)

$$R_{Cx} = -R_{Bx} = 12{,}5 кH$$

Из уравнения (*1*) следует

$$R_{Ax} = -Q + P_{1x} + R_{Cx} = -2{,}8 + 1{,}44 + 12{,}5 = 11{,}14\ kH.$$

Из уравнения (*3*)

$$R_{Ay} = \frac{R_{Ax} \cdot 2 + Q \cdot (2 - \frac{3{,}5}{2}) + P_1 \cdot \frac{2}{\cos(\alpha)}}{6} =$$

$$= \frac{11{,}14 \cdot 2 + 2{,}8 \cdot (2 - \frac{3{,}5}{2}) + 6 \cdot \frac{2}{0{,}97}}{6} = 5{,}89\ kH.$$

Из уравнений (*2*) и (*5*)следует

$$R_{Cy} = R_{Ay} - P_{1y} = 5{,}89 - 5{,}82 = 0{,}07\ kH.$$

$$R_{By} = -R_{Cy} = -0{,}07\ kH.$$

Отрицательные значения реакций говорят о том, что действительное направление R_{Bx} и R_{By} противоположно указанному на ***рис.3.11***.

Раздел 2. Пространственная система сил

Глава 4. Равновесие пространственной системы сил

Пространственная система сходящихся сил, подобно плоской системе сил, также приводится к равнодействующей

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Проекции равнодействующей силы $\vec{R}$ на оси декартовых координат x, y, z равны суммам проекций слагаемых сил на соответствующие оси, т. е.

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{kx} \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{ky} \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{kz}$$

Для равновесия твердого тела, к которому приложена пространственная система сходящихся сил, необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая сил равнялась нулю, т.е.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

или

$$R_x = \sum_{i=1}^{n} F_{kx} = 0 \qquad R_y = \sum_{i=1}^{n} F_{ky} = 0 \qquad R_z = \sum_{i=1}^{n} F_{kz} = 0$$

При решение задачи рекомендуется придерживаться следующего порядка:

1) выделить тело или конструкцию, равновесие которой надо рассмотреть;

2) указать все действующие на выделенный объект силы – активные силы и реакции связей;

3) в соответствие с принципом освобождения от связей, рассмотреть выделенный объект исследования как свободное тело находящееся под действием активных сил и реакций связей;

4) выбрать систему декартовых координат $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$;

5) составить уравнения равновесия в проекциях на оси координат;

6) решить полученную систему и провести анализ результатов решения задачи.

Начало осей декартовых координат рекомендуется выбрать в точке пересечения линий действия сил.

Для определения проекции силы на ось можно воспользоваться способом двойного проектирования: сначала спроектировать силу на плоскость, содержащую нужную ось, а затем эту проекцию спроектировать на ось.

Пример 4.1

К одной из вершин параллелепипеда (***рис.4.1***) приложена сила $\overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{1}}$. Определить проекции силы на оси координат.

Углы, составленные силой $\overline{\boldsymbol{F}}$ с осями $\boldsymbol{Ox}$ и $\boldsymbol{Oy}$ неизвестны, поэтому для вычисления проекций силы $\overline{\boldsymbol{F}}$ на оси $\boldsymbol{Ox}$ и $\boldsymbol{Oy}$ воспользуемся способом двойного проектирования: сначала спроектируем силу $\overline{\boldsymbol{F}}$ на плоскость $\boldsymbol{Oxy}$.

Как известно, проекция силы на плоскость есть вектор $\overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{1}}$, равный по модулю:

$$\vec{F}_1 = \vec{F} \cdot \cos 30^0.$$

Теперь вектор $\vec{F}_1$, лежащий в плоскости $\boldsymbol{xoy}$, нужно спроецировать на координатные оси $\boldsymbol{ox}$ и $\boldsymbol{oy}$.

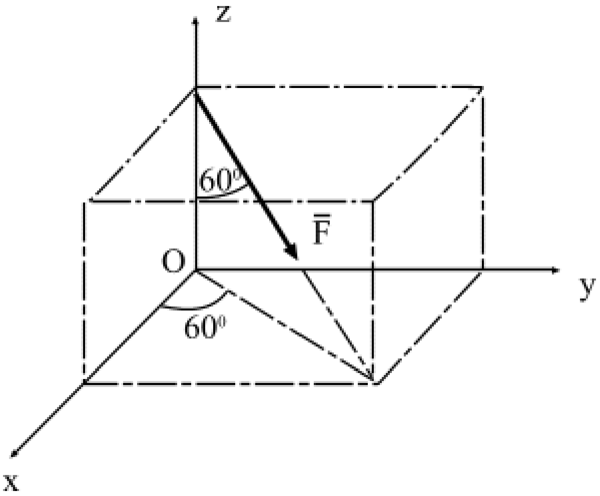


Рис.4.1. Схема действия силы $\vec{F}$

Направление проекции $\vec{F_1}$ указано на ***рис. 4.2.***

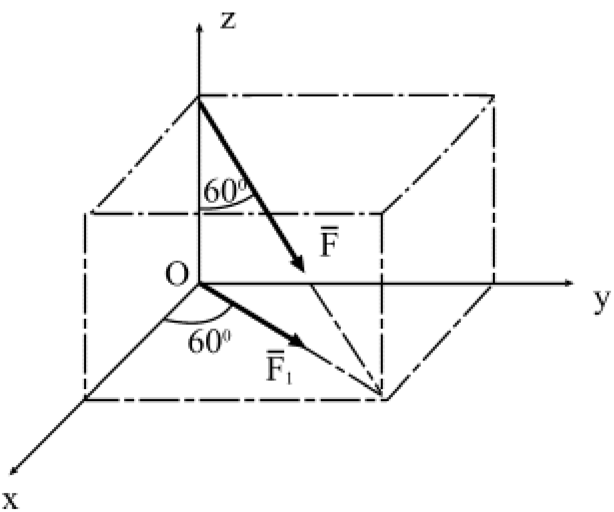


Рис.4.2 Проекция силы $\vec{F}$ ***на плоскость*** ***Oxy***

Теперь легко вычислить проекции силы $\overline{F}$ на оси:

$$F_x = F_1 \cdot \cos 60^0 = F \cdot \cos 30^0 \cdot \cos 60^0 = F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = F \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$F_y = F_1 \cdot \cos 30^0 = F \cdot \cos 30^0 \cdot \cos 30^0 = F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = F \cdot \frac{3}{4}.$$

$$F_z = -F \cdot \cos 60^0 = -F \cdot \frac{1}{2}.$$

4.1. Решение задач, в которых рассматривается равновесие пространственной сходящейся системы сил

При решении таких задач часто встречаются ошибки, вызванные тем, что студент, начиная решать задачу, еще не представляет четко, как расположены в пространстве элементы конструкции и как расположены в пространстве действующие силы.

Чтобы избежать таких ошибок, надо нарисовать расчетную схему, в которой достаточно крупно и очень подробно нарисовать конструкцию и указать все действующие силы. Прежде чем решать задачу, необходимо разобраться, куда направлена каждая сила и к чему приложена.

Рекомендуется до составления уравнений равновесия сначала оформить таблицу, где будут записаны проекции каждой силы на каждую ось.

Пример 4.2.

Шесть невесомых стержней соединены между собой шарнирами в точках ***А*** и ***В***, а в точках ***С, Д, Е, О*** соединены шарнирно с неподвижными опорами (***рис.4.3***).

К шарниру A приложена сила $\overline{P}$, направленная вдоль оси Ay.

К шарниру B приложена сила $\overline{Q}$, составляющая с осями координат углы α, β, γ.

Определить усилия в стержнях. Исходные данные приведены в ***табл. 4.1***.

Таб.4.1 Исходные данные

α	β	γ	ψ	δ	P	Q
град	***град***	***град***	***град***	***град***	***Н***	***Н***
60^0	60^0	45^0	30^0	30^0	***1000***	***2000***

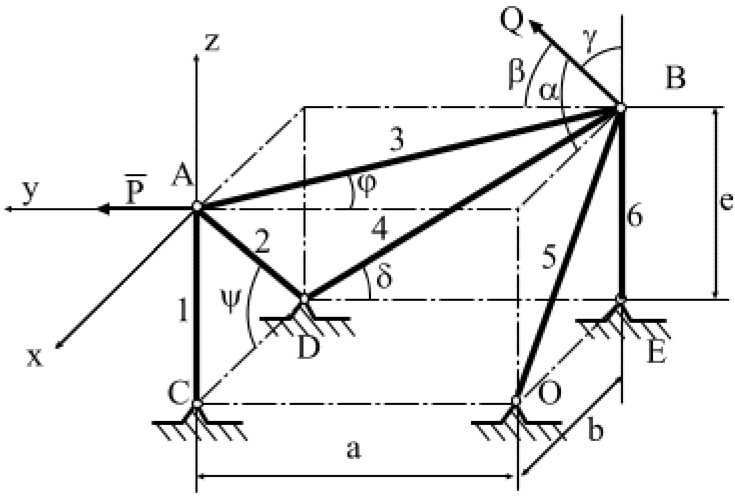


Рис.4.3. Схема действия сил на конструкцию

Вспомогательные вычисления.

Вычислим величину угла φ

$$e = a \cdot tg\delta = b \cdot tg\psi, \qquad \frac{b}{a} = \frac{tg\delta}{tg\psi};$$

$$tg\varphi = \frac{b}{a} = \frac{tg\delta}{tg\psi}, \qquad tg\varphi = 1, \qquad \varphi = 45^0.$$

Для решения задачи рассмотрим отдельно равновесие узла ***A***, затем равновесие узла ***B***. При этом учитываем, что стержень ***AB*** соединяет узлы ***A*** и ***B***. Стержень ***AB*** – невесомый с шарнирно закрепленными концами. Следовательно, силы, с которыми стержень ***AB*** действует на узлы ***A*** и ***B*** равны по величине и противоположны по направлению, т.е.

$$\overline{R}_A = -\overline{R}_B, \quad |\,R_A\,| = |\,R_B\,|.$$

Рассмотрим равновесие узла ***A***. На этот узел действует активная сила $\overline{P}$.

Связями для узла служат три невесомых с шарнирно закрепленными концами стержня ***1, 2, 3.*** Реакция невесомого стержня с шарнирно закрепленными концами направлена по оси стержня.

Укажем на ***рис.4.4*** реакции стержней $\overline{R}_1, \quad \overline{R}_2, \quad \overline{R}_A$.

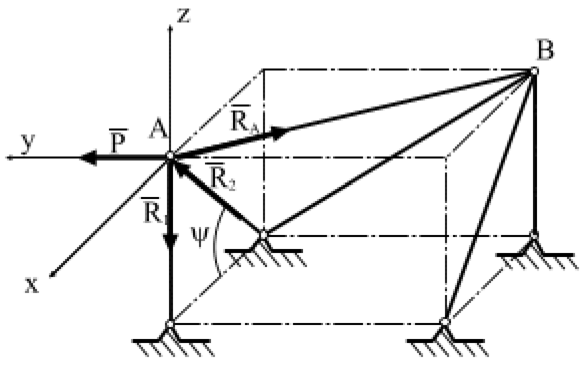


Рис.4.4 Реакции стержней

На узел A действует пространственная сходящаяся система сил. Условие равновесия такой системы записывается в виде

$$\sum F_{kx} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$\sum F_{kz} = 0.$$

Заполним таблицу 4.2.

4.2.Таблица вычислений

$\overline{F}_n$	F_{kx}	F_{ky}	F_{kz}
$\overline{P}$	0	P	0
$\overline{R}_1$	0	0	$-R_1$
$\overline{R}_2$	$R_2 \cos\psi$	0	$R_2 \sin\psi$
$\overline{R}_A$	$R_A \sin\varphi$	$-R_A \cos\varphi$	0

В соответствие с таблицей запишем уравнения равновесия

(1) $\sum F_{kx} = R_2 \cos 30^0 - R_A \sin 45^0 = 0;$

(2) $\sum F_{ky} = P - R_A \cos 45^0 = 0;$

(3) $\sum F_{kz} = -R_1 + R_2 \cos 60^0 = 0.$

Решим полученную систему уравнений. Из уравнения (2) получим значение реакции R_A

$$R_A = \frac{P}{\cos 45^0} = P\sqrt{2} = 1000\sqrt{2}\,(H).$$

Из уравнения (1) определим величину реакции R_2

$$R_2 = R_A \frac{\sin 45^0}{\cos 30^0} = R_A \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1000 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 1150(H).$$

Из уравнения (3) получим R_1

$$R_1 = R_2 \cos 60^0 = 1150 \cdot \frac{1}{2} = 575(H).$$

Все рассчитанные величины реакций получены оказались положительными. Это означает, что направления реакций связей R_1, R_2, R_A на чертеже указаны верно.

Теперь рассмотрим равновесие узла B. На этот узел действует активная сила $\overline{Q}$. Связями служат четыре невесомых, с шарнирно закрепленными концами, стержня: ***3, 4, 5, 6.***

Реакция невесомого стержня с шарнирно закрепленными концами направлена по оси стержня.

Укажем на ***рис.4.5*** реакции $\overline{R}_B$, $\overline{R}_4$, $\overline{R}_5$, $\overline{R}_6$. Причем $\overline{R}_B = -\overline{R}_A$, т.е. сила $\overline{R}_B$ направлена от узла B.

На узел B действует пространственная сходящаяся система сил.

Условие равновесия такой системы

$$\sum F_{kx} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0;$$

$$\sum F_{kz} = 0.$$

Силы, действующие на конструкцию и реакции связей, приведены на ***рис.4.5***.

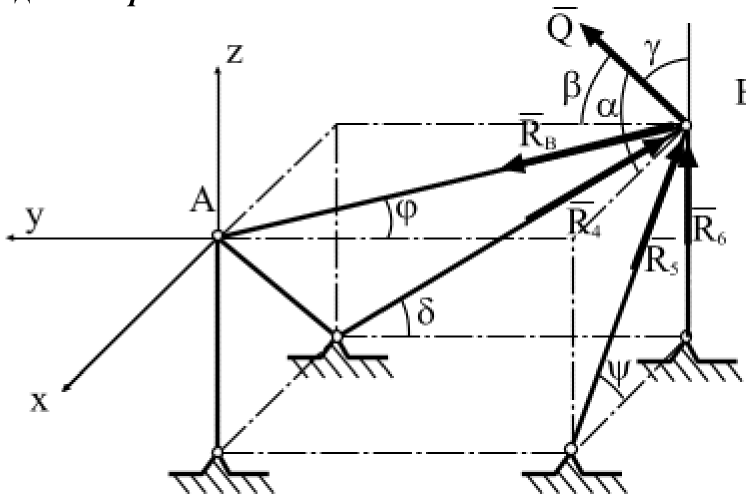


Рис.4.5. Силы, приложенные к узлу B

Заполняем следующую таблицу

4.3. Таблица расчетных данных

$\overline{F}_n$	F_{kx}	F_{ky}	F_{kz}
$\overline{Q}$	$Q\cos\alpha$	$Q\cos\beta$	$Q\cos\gamma$
$\overline{R}_B$	$R_B\sin\varphi$	$R_B\cos\varphi$	0
$\overline{R}_4$	0	$-R_4\cos\delta$	$R_4\sin\delta$
$\overline{R}_5$	$-R_5\cos\psi$	0	$R_5\sin\psi$
$\overline{R}_6$	0	0	$-R_6$

В соответствие с данными таблицы составим уравнения равновесия

(4) $\sum F_{kx} = Q\cos 60^0 + R_B \sin 45^0 - R_5 \cos 30^0 = 0;$

(5) $\sum F_{ky} = Q\cos 60^0 + R_B \cos 45^0 - R_4 \cos 30^0 = 0;$

(6) $\sum F_{kz} = Q\cos 45^0 + R_4 \cos 60^0 + R_5 \cos 60^0 - R_6 = 0.$

Решим систему уравнений (4)-(6). Из уравнения (4) следует

$$2000 \cdot \frac{1}{2} + 1000\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - R_5 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0;$$
$$R_5 = \frac{4000}{\sqrt{3}} = 2330(H).$$

Из уравнения (5) получим

$$2000 \cdot \frac{1}{2} + 1000\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2} - R_4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 0;$$
$$R_4 = \frac{4000}{\sqrt{3}} = 2330(H).$$

Из уравнения (6) следует

$$2000 \cdot \frac{1}{2} + 2300 \cdot \frac{1}{2} + 2330 \cdot \frac{1}{2} - R_6 = 0;$$
$$R_6 = 3740(H).$$

Реакция стержня равна усилию в стержне. Поэтому окончательно запишем полеченные результаты

$R_1 = 575H;$ $\qquad$ $R_4 = 2330H;$

$R_2 = 1150H;$ $\qquad$ $R_5 = 2330H;$

$$R_3 = 1000\sqrt{2}H; \qquad R_6 = 3740H.$$

4.2. Решение задач, в которых рассматривается равновесие произвольной пространственной системы сил

При решении таких задач студенты делают много типичных ошибок. Основными ошибками являются следующие характерные ошибки.

Главная ошибка.

Студент начинает решать задачу, не разобравшись в чертеже, т.е. он не понял расположение в пространстве заданной конструкции, сил и осей координат. Для избежания подобных ошибок, чертеж необходимо выполнять крупно и тщательно, разобраться в чертеже и уяснить взаимное расположение конструкции, сил и осей координат.

Текущие ошибки.

1) Типичны ошибки при определении проекции силы на ось в случаях, когда сила и ось не пересекаются.

2) Типичны также ошибки при определении момента силы относительно оси.

4) Типичны ошибки при составлении шести условий равновесия.

Перед началом решения задачи целесообразно составлять таблицу данных.

Табл.4.2. Данные вычислений

$\overline{F}_k$	$\overline{F}_{kx}$	$\overline{F}_{ky}$	$\overline{F}_{kz}$	$m_x(\overline{F}_k)$	$m_y(\overline{F}_k)$	$m_z(\overline{F}_k)$

В таблице число строк равно числу сил, действующих на тело. Поэтому после заполнения таблицы мы будем знать, что ни одна сила не пропущена и не учтена дважды.

Начинать заполнение таблицы следует построчно с того, что ставим нули в тех клетках, где проекции силы на оси координат или моменты сил относительно осей координат равны нулю.

Проекция силы на ось равна нулю в том случае, когда сила расположена в плоскости, перпендикулярной оси.

Момент силы относительно оси равен нулю в двух случаях:

1) сила параллельна оси координат;
2) сила и ось координат пересекаются.

4.2.1. Определение моментов силы относительно осей

Для определения моментов силы относительно осей можно воспользоваться формулами:

$$m_x(\overline{F}) = yZ - zY$$

$$m_y(\overline{F}) = zX - xZ$$

$$m_z(\overline{F}) = xY - yX,$$

где x, y, z - координаты точки приложения силы $\overline{F}$; X, Y, Z - проекции силы $\overline{F}$ на оси Ox, Oy, Oz.

Пример 4.3.

В задаче, представленной на ***рис.4.6***, вычислить момент силы $\overline{F}$ относительно осей Ox, Oy, Oz. Величина силы $\overline{F}$ и расстояние a известны.

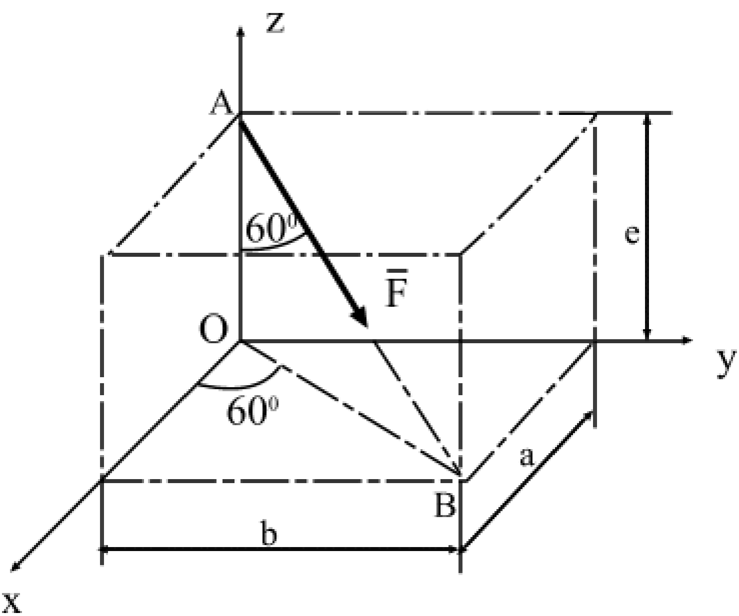


Рис.4.6. Начальная постановка задачи

Вспомогательные вычисления.

Определим величины b и e, выразив их через a

$$b = a \cdot tg60^0 = \sqrt{3} \cdot a;$$

$$OB = \frac{a}{\cos 60^0} = 2a;$$

$$e = OB \cdot ctg60^0 = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 2a.$$

Координаты точки приложения силы $\overline{F}$ (точка **A**):

$$x_A = 0; \quad y_A = 0; \quad z_A = 2a\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Проекции силы $\overline{F}$ на оси определены выше

$$X = F_x = F\frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$Y = F_y = F\frac{3}{4};$$

$$Z = F_z = -F\frac{1}{2}.$$

Теперь легко вычислить моменты силы $\vec{F}$ относительно осей координат

$$m_x(\overline{F}) = yZ - zY = 0 - 2a\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot F\cdot\frac{3}{4};$$

$$m_y(\overline{F}) = zX - xZ = 2a\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot F\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} - 0 = F\cdot a\cdot\frac{1}{2};$$

$$m_z(\overline{F}) = xY - yX = 0 - 0 = 0.$$

4.2.2. Решение задач

Пример 4.4.

К прямоугольной плите ***ABDE,*** вес которой Q, приложена сила $\overline{P}$. Сила $\overline{P}$ составляет с осями проекций углы α, β, γ (***рис.4.7***).

Плита удерживается в горизонтальном положении шестью невесомыми стержнями, которые скреплены шарнирно с плитой и с неподвижными опорами. Исходные данные приведены в ***табл. 4.3.***

Определить реакции стержней.

Табл.4.3. Исходные данные

α	β	γ	φ	δ	P	Q
град	***град***	***град***	***град***	***град***	***Н***	***Н***
60^0	45^0	60^0	30^0	60^0	**600**	**800**

На ***рис.4.7*** изобразим силы, действующие на заданную конструкцию.

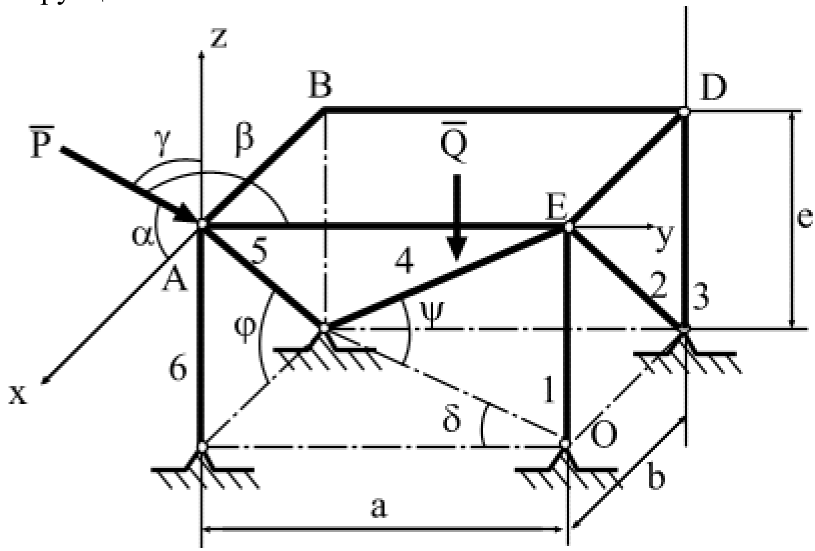


Рис.4.7. Силы, действующие на конструкцию.

Вспомогательные вычисления.

Вычислим тригонометрические функции углов

$$b = a \cdot tg\delta = a \cdot tg60^0 = a\sqrt{3},$$

$$e = b \cdot tg\varphi = a\sqrt{3}tg30^0 = a,$$

$$tg\psi = \frac{e}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{e}{\sqrt{a^2+3a^2}} = \frac{1}{2},$$

$$cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\psi}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$sin\psi = \frac{tg\psi}{\sqrt{1+tg^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Для решения задачи рассмотрим равновесие плиты. На плиту действуют две активные силы $\overline{\boldsymbol{P}}$ и $\overline{\boldsymbol{Q}}$. Связями для плиты служат шесть стержней. Стержни являются невесомыми, с шарнирно закрепленными концами. Реакция прямолинейного стержня с шарнирно закрепленными концами направлена по оси стержня.

Выполняем новый чертеж (***рис.4.8***) и указываем на нем действующие на плиту силы.

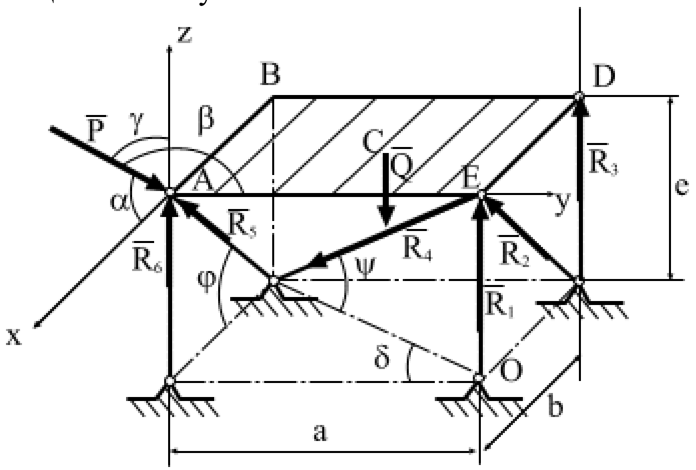


Рис.4.8. Плита и действующие на нее силы

На плиту ***ABDE*** действует произвольная пространственная система сил. Для равновесия такой системы необходимо, чтобы выполнялись шесть условий равновесия

$$\sum F_{kx} = 0, \qquad \sum m_x\left(\overline{F}_k\right) = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0, \qquad \sum m_y\left(\overline{F}_k\right) = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0, \qquad \sum m_z\left(\overline{F}_k\right) = 0.$$

Прежде, чем составлять уравнения равновесия, надо составить и заполнить таблицу, в которой записаны проекции каждой силы на оси и момент каждой силы относительно осей.

Сначала заполняем те клетки, в которых должны быть нули.

Табл.4.4.Расчетные данные

$\overline{F}_k$	F_{kx}	F_{ky}	F_{kz}	$m_x\left(\overline{F}_k\right)$	$m_y\left(\overline{F}_k\right)$	$m_z\left(\overline{F}_k\right)$
$\overline{P}$				*0*	*0*	*0*
$\overline{Q}$	*0*	*0*				*0*
$\overline{R}_1$	*0*	*0*			*0*	*0*
$\overline{R}_2$		*0*			*0*	
$\overline{R}_3$	*0*	*0*				*0*
$\overline{R}_4$					*0*	
$\overline{R}_5$		*0*			*0*	*0*
$\overline{R}_6$	*0*	*0*		*0*	*0*	*0*

Очевидно, что затруднения возникнут при определении проекций силы $\overline{R}_4$ на оси и при вычислении моментов силы $\overline{R}_4$ относительно осей.

Проекции силы $\overline{R}_4$ на оси равны

$$R_{4x} = -R_4 \cos\psi \sin\delta,$$

$$R_{4y} = -R_4 \cos\psi \cos\delta,$$

$$R_{4z} = -R_4 \cos\psi \cos\delta.$$

В точке E с координатами X_E, Y_E, Z_E приложена сила $\overline{R}_4$

$$X_E = 0, \qquad Y_E = a, \qquad Z_E = 0.$$

Вычисляем момент силы $\overline{R}_4$ относительно осей

$$m_x\left(\overline{R}_4\right) = yZ - zY = -R_4 \sin\psi \cdot a - Q = -R_4 \sin\psi \cdot a;$$

$$m_y\left(\overline{R}_4\right) = zX - xZ = 0 - 0 = 0;$$

$$m_z\left(\overline{R}_4\right) = xY - yX = 0 - a(-R_4 \cos\psi \cdot \sin\delta) = R_4 \cdot a \cos\psi \cdot \sin\delta.$$

Проведем вспомогательные вычисления

$$\sin\psi = \frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \cos\psi = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\cos\psi \cdot \sin\delta = \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}};$$

$$\cos\psi \cdot \cos\delta = \frac{2}{\sqrt{5}} \cos 60^0 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Теперь заполним таблицу

Табл.4.5. Расчетные данные

$\overline{F}_k$	F_{kx}	F_{ky}	F_{kz}	$m_x(\overline{F}_k)$	$m_y(\overline{F}_k)$	$m_z(\overline{F}_k)$
$\overline{P}$	$-P\cos\alpha$	$-P\cos\beta$	$-P\cos\gamma$	0	0	0
$\overline{Q}$	0	0	$-Q$	$-Q\cdot\frac{1}{2}a$	$-Q\cdot\frac{1}{2}$	0
$\overline{R}_1$	0	0	R_1	$R_1\cdot a$	0	0
$\overline{R}_2$	$R_2\cos\varphi$	0	$R_2\sin\varphi$	$R_2\sin\varphi\cdot a$	0	$-R_2\cdot a\times$ $\times\cos\varphi$
$\overline{R}_3$	0	0	R_3	$R_3\cdot a$	$R_3\cdot b$	0
$\overline{R}_4$	$-R_4\cos\psi$ $\times\sin\delta$	$-R_4\cos\psi$ $\times\cos\delta$	$-R_4\sin$	$-R_4\sin\psi$	0	$R_4\cdot a\times$ $\times\cos\psi\ s$
$\overline{R}_5$	$R_5\cos\varphi$	0	$R_5\sin\varphi$	0	0	0
$\overline{R}_6$	0	0		0	0	0

Составляем уравнения равновесия:

1. $\sum\overline{F}_{kx} = -P\cos 60^0 + R_2\cos 30^0 - R_4\cos\psi\sin\delta + R_5\cos 30^0 = 0,$

2. $\sum\overline{F}_{ky} = -P\cos 45^0 - R_4\cos\psi\cos\delta = 0,$

3. $\sum \overline{F}_{kz} = -P\cos 60^0 - Q + R_1 + R_2 \sin 30^0 + R_3 - R_4 \sin\psi + R_5 \sin 30^0 + R_6 = 0,$

4. $\sum m_x\left(\overline{F}_k\right) = -Q\dfrac{a}{2} + R_1 a + R_2 \sin 30^0 \cdot a + R_3 \cdot a - R_4 a \sin\psi = 0,$

5. $\sum m_y\left(\overline{F}_k\right) = -Q\dfrac{b}{2} + R_3 \cdot b = 0,$

6. $\sum m_z\left(\overline{F}_k\right) = -R_2 \cos 30^0 \cdot a + R_4 a \cos\psi \sin\delta = 0.$

Решаем уравнения уравнения (1)-(6).
Из уравнения (5) следует, что

$$R_3 \cdot b = Q\frac{b}{2}, \qquad R_3 = \frac{Q}{2} = 400(H).$$

Из уравнения (2) вычислим R_4

$$R_4 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -P\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$R_4 = -P\frac{\sqrt{10}}{2} = -300\sqrt{10}.$$

Из уравнения (6) вычислим R_2

$$R_2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = R_4 a\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \qquad R_2 = R_4 a\frac{2}{15} = -600\sqrt{2} = -849(H).$$

Из уравнения (1) вычислим R_5

$$R_5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{P}{2} - R_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + R_4 \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}},$$

$$R_5 = \frac{P}{\sqrt{3}} - R_2 + R_4 \frac{2}{15} = \frac{P}{\sqrt{3}},$$

$$R_5 = \frac{600}{\sqrt{3}} = 200\sqrt{3}\,(H).$$

Из уравнения (4) следует

$$R_1 = \frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}R_2 - R_3 + R_4 \frac{1}{\sqrt{5}} = 400 - \frac{1}{2}(-600\sqrt{2}) - 400 + (-300\sqrt{10})\frac{1}{\sqrt{15}} = 0.$$

Из уравнения (3)

$$R_6 = \frac{1}{2}P + Q - R_1 - \frac{1}{2}R_2 - R_3 + R_4 \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}R_5 = 300 + 800 - 0 - \frac{1}{2}(-600\sqrt{2}) -$$

$$-400 + (-300\sqrt{10})\frac{1}{\sqrt{5}} - 100\sqrt{3} = 527\,(H).$$

Таким образом получено решение

$$R_1 = 0, \qquad R_2 = -849\,H, \qquad R_3 = 400\,H,$$

$$R_4 = -950\,H, \qquad R_5 = 347\,H, \quad R_6 = 527\,H.$$

Знаки минус указывают, что действительные направления сил $\overline{R}_2$ и $\overline{R}_4$ противоположны указанным на рисунке 4.8.

Вопросы для самопроверки

1. Что изучает статика?
2. Какими тремя факторами определяется сила, действующая на твердое тело? Что такое линия действия силы?
3. Какая сила называется равнодействующей силой?
4. Сформулируйте аксиомы статики.
5. Каковы две основные задачи статики?
6. Какое тело называется несвободным? Что обозначает термин «связь»?
7. В чем состоит принцип освобождения от связей?
8. Что понимается под термином «реакция связи»? Куда направлена реакция связи?
9. Основные типы реакций связи.
10. Что означает термин найти реакцию опоры?
11. Что называется моментом силы относительно данной точки? Как выбирается знак этого момента?
12. Что такое плечо силы?
13. Что называется парой сил? Как вычисляется момент пары сил?
14. В каких случаях момент силы относительно точки равен нулю?
15. Как формулируются условия равновесия произвольной плоской системы сил? Какие формы условий равновесия вы знаете?
16. Что называется главным вектором системы сил?
17. Что называется главным моментом системы сил относительной данной точки?
18. Как формулируется теорема о параллельном переносе сил?
19. Чему равны проекции главного вектора на каждую из координатных осей?

Библиографический список

1 Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. Учебник для втузов. М.: Высшая школа, 1986, -416 с.

2. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Учебное пособие для технических ВУЗов под общей редакцией Яблонского А.А.. М.: Интеграл-Пресс, 2002, –384 стр.

3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, часть 1, 1961, -448с. и последующие издания.

4. Айзенберг Т.Б., Воронков И.М., Осецкий В.М. Руководство к решению задач по теоретической механике. М**.,** 1968, -267с.

5 Рябенков Н.Г. Основы теоретической механики, Изд. КГЭУ, 2002, -214с.

Оглавление

Раздел 3. Контрольные задания

1. Определение реакций шарнирных опор

Задание. Определить реакции опор заданной конструкции. Схемы конструкций приведены на ***рис.5.1.***

Исходные данные

$$a = 4\,м$$

$$q = 20\ Н/м$$

$$F = 100\ Н$$

$$M = 50\ Н \cdot м$$

$$\alpha = 30^o$$

2. Определить реакции и реактивный момент для жесткой заделки

Задание. Определить реакции опор заданной конструкции. Схемы конструкций приведены на ***рис.5.2.***

Исходные данные

$$a = 4\,м$$

$$q = 20\ Н/м$$

$$F = 100\ Н$$

$$M = 50\ Н \cdot м$$

$$\alpha = 30^o$$

3. Определение реакций опор составной конструкции

(система двух тел)

Задание. Найти реакции опор составной конструкции. Схемы конструкций приведены на ***рис.5.3.*** Необходимые для решения данные приведены в таблице **5.3**. На рисунках все размеры указаны в метрах.

Таблица 5.3

№	Нагрузка				№	Нагрузка			
	P_1, кН	P_2, кН	q, кН/м	М, кН.м		P_1, кН	P_2, кН	q, кН/м	М, кН.м
1	15	14	3	10	16	3	10	2	10
2	13	12	2	6	17	1	8	1	8
3	11	10	1	5	18	3	6	3	6
4	9	8	3	14	19	5	4	2	7
5	7	6	2	12	20	7	2	1	5
6	8	5	1	4	21	10	9	2	4
7	7	4	2	10	22	8	7	1	7
8	6	6	1	7	23	6	5	2	8
9	5	8	3	8	24	4	3	1	3
10	4	10	2	6	25	2	1	2	2
11	12	11	1	12	26	7	1	2	7
12	10	6	2	10	27	6	2	1	5
13	9	5	1	6	28	5	3	2	10
14	7	10	2	13	29	4	4	1	5
15	6	8	1	5	30	3	5	2	10