Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Казанский государственный технологический университет»

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ
ПО ДИНАМИКЕ

Методические указания

Казань 2010

ББК 22.21
УДК 531

Составители: ст.пр. М.Г.Ахметшин
доц. Х.С.Гумерова
доц. Н.П.Петухов

Контрольные задания по динамике. Метод. указания./ Казан. гос. технол. ун-т; Сост.: М.Г. Ахметшин, Х.С. Гумерова, Н.П.Петухов. Казань, 2010. – 26 с.

Содержат контрольные задания для студентов-заочников механических специальностей по разделу «Динамика» курса теоретической механики. Имеются указания к решению задач.

Подготовлены на кафедре теоретической механики и сопротивления материалов.

Печатается по решению методической комиссии
по циклу естественнонаучных дисциплин

Рецензенты: д-р ф.-м. наук, проф. В.А. Иванов
к. т. н., доц. В.М. Борисов

В методическом указании приведены контрольные задания для студентов механических специальностей заочной формы обучения по разделу «Динамика» курса теоретической механики.

Контрольное задание выбирается согласно шифру. ***Шифром*** *являются две последние цифры в зачетной книжке студента.* В задачах 1 и 6 даны по одному рисунку, поэтому номер строки в таблицах 1 и 6 выбирается по следующему правилу. Пусть m – предпоследняя, а n – последняя цифры шифра. Если $m = 0,1,2$, то номер строки таблицы совпадает с n. Если $m = 3,4,5$, то номер строки равняется $n+10$. Если $m = 6,7,8$, то номер строки равняется $n+20$. В остальных задачах предпоследняя цифра шифра соответствует номеру рисунка, а последняя – номеру строки (задачи 2,3,5,7) или столбца (задачи 4,8) таблицы исходных данных. Например, для шифра 53 в задаче 2 следует взять рис.2.5 и строку 3 таблицы 2.

Прежде чем приступить к решению задач, необходимо изучить соответствующий теоретический материал и разобрать решения типовых задач приведенных в учебной литературе, рекомендованной в конце методических указаний.

Студенты выполняют контрольную работу по двум темам: «Динамика материальной точки» (задачи 1-4) и «Динамика механической системы» (задачи 5-8). Контрольную работу следует выполнить в одной тетради, на обложке которой должны быть фамилия и инициалы, номер группы и номер зачетной книжки, адрес проживания, дата выполнения работы и подпись студента. При оформлении работы следует написать название, условие и исходные данные каждой задачи. Решения необходимо сопровождать краткими пояснениями с указанием применяемых теорем. Рисунки должны быть выполнены аккуратно с помощью циркуля и линейки. Положения тел, силы, скорости, ускорения и другие параметры должны соответствовать исходным данным задач.

При решении задач следует считать, что все изображенные на рисунках нити (тросы) нерастяжимые и невесомые, катки катятся по плоскостям без скольжения, связи идеальные.

Тема 1. Динамика материальной точки

Задача 1. Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки

Кольцо D массы $m = 2кг$ (кольцо считаем материальной точкой) начинает движение в точке A с начальной скоростью υ_A =10$м/с$ вдоль стержня $ABCE$, расположенного в вертикальной плоскости и имеющего форму ломаной прямой (рис.1). На участке AB кольцо движется под действием вертикальной силы тяжести $\overline{P}$ и переменной силы $\overline{F}$, направленной вдоль оси x. Модуль силы тяжести $P = mg$, $g \approx 10м/с^2$. Величина силы $\overline{F}$ задана в таблице 1. Силами сопротивления движению на участке AB пренебречь. Время движения кольца на участке AB равно τ = 0,5$с$. В точке B кольцо, не изменяя величины скорости, переходит на участок BC, длина которого равна l. При движении кольца на этом участке действуют: вертикальная сила тяжести $\overline{P}$; направленная от точки B к точке C постоянная сила $\overline{Q}$; сила сопротивления среды $\overline{R}$, зависящая от квадрата скорости кольца. Не изменяя величины скорости в точке C, кольцо переходит на участок CE. При движении по этому участку на кольцо, кроме силы тяжести, действует сила трения. Коэффициент трения f = 0,1.

Вычислить, на каком расстоянии от точки C кольцо будет находиться через 1 секунду после начала движения по участку CE, и какую скорость оно будет иметь в этот момент времени.

Примечание. Построение рисунка следует начать с угла α.

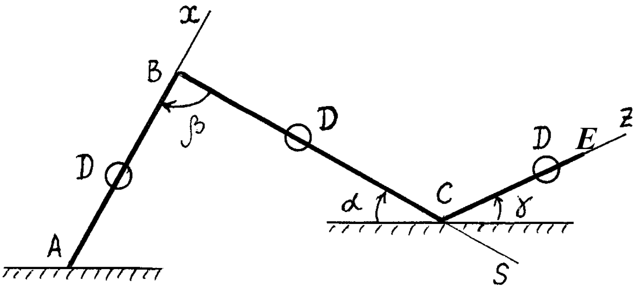

Рис. 1

Таблица 1

№	Q, H	R, H	F, H	l, $м$	α^o	β^o	γ^o
0	5,4	$0,6\ \upsilon^2$	2cosπt/2	0,6	0	150	330
1	3,6	$0,4\ \upsilon^2$	4sinπt	0,6	30	90	0
2	7,5	$0,3\ \upsilon^2$	2cosπt/3	0,4	60	120	30
3	4,9	$0,1\ \upsilon^2$	2sin2πt	0,3	45	135	60
4	1,6	$0,4\ \upsilon^2$	3sinπt/6	0,4	0	150	45
5	12,5	$0,5\ \upsilon^2$	4cosπt/3	0,5	0	120	30
6	9,6	$0,6\ \upsilon^2$	3sinπt/4	0,6	30	120	45
7	12,8	$0,2\ \upsilon^2$	2cosπt	0,7	0	120	45
8	9,8	$0,2\ \upsilon^2$	3cosπt/2	0,8	60	90	300
9	4,8	$0,3\ \upsilon^2$	3sin2πt	0,6	0	120	300
10	5,2	$0,1\ \upsilon^2$	6cosπt/6	0,2	0	150	45
11	3,4	$0,3\ \upsilon^2$	3sinπt/2	0,25	45	135	60
12	7,4	$0,5\ \upsilon^2$	7cosπt/2	0,3	0	120	30
13	4,6	$0,6\ \upsilon^2$	5sin2πt	0,35	45	135	330
14	1,8	$0,7\ \upsilon^2$	6cosπt/2	0,4	0	150	60
15	12,2	$0,8\ \upsilon^2$	8sinπt	0,45	0	120	45
16	9,4	$0,9\ \upsilon^2$	3cos3πt/2	0,5	60	90	45
17	12,6	$0,15\upsilon^2$	4sin2πt	0,55	0	120	30
18	9,6	$0,15\upsilon^2$	2sin3πt	0,6	60	120	45
19	4,4	$0,9\ \upsilon^2$	4cosπt/2	0,65	0	150	315
20	6,2	$0,8\ \upsilon^2$	9cosπt/2	0,7	0	120	330
21	8,2	$0,7\ \upsilon^2$	6sinπt/3	0,75	30	120	45
22	3,5	$0,45\upsilon^2$	10cosπt/2	0,2	0	150	300
23	4,6	$0,25\upsilon^2$	12sinπt/6	0,15	0	150	60
24	5,8	$0,35\upsilon^2$	10cosπt/2	0,4	45	135	0
25	6,2	$0,65\upsilon^2$	6cosπt/6	0,3	45	90	330

26	7,4	$0{,}35\upsilon^2$	14sinπt/2	0,6	0	120	30
27	8,6	$0{,}35\upsilon^2$	8sinπt	0,5	45	135	60
28	7,8	$0{,}25\upsilon^2$	8cosπt/2	0,8	60	120	45
29	5,0	$0{,}45\upsilon^2$	6sinπt/3	0,9	30	120	45

Указания к решению задачи. Задача решается методом интегрирования дифференциальных уравнений движения материальной точки (в данном случае – кольца). Перед тем, как приступить к решению задачи, предлагаем ознакомиться с теоретическим материалом и разобрать решения задач интегрирования дифференциальных уравнений движения точки, когда действующая на точку сила постоянна, зависит от времени и скорости. Решение задачи 1 разделяется на три этапа. Сначала нужно составить, а затем проинтегрировать уравнение движения кольца на участке AB. При $t=\tau$ определить скорость кольца в точке B. Эта скорость будет начальной на участке BC. Рекомендуется направить ось s вдоль BC, считая точку B началом отсчета координаты s. Затем нужно составить дифференциальное уравнение движения кольца на участке BC с учетом действующих на кольцо сил. Поскольку длина участка l известна, то уравнение интегрируется проще, если преобразовать ускорение к виду $\dfrac{d\upsilon}{dt}=\dfrac{ds}{ds}\dfrac{d\upsilon}{dt}=\upsilon\dfrac{d\upsilon}{ds}=\dfrac{1}{2}\dfrac{d\upsilon^2}{ds}$. Далее следует разделить переменные υ и s, проинтегрировать уравнение и определить постоянную интегрирования. При $s=l$ определяется скорость кольца в точке C. Она будет начальной на участке CE. На третьем участке дифференциальное уравнение придется интегрировать дважды. Сначала определяется скорость в текущий момент времени t и скорость кольца в точке E при $t=1c$. Второе интегрирование позволит определить длину участка CE.

Задача 2. Применение теорем об изменении кинетической энергии и момента количества движения точки

Шарик массы m *кг* выталкивается без начальной скорости сжатой пружиной AB в трубку, имеющую криволинейные участки с радиусами кривизны R_1 и R_2 (рис.2.0–2.9). В точке B шарик отделяется от пружины. Трубка расположена в вертикальной плоскости. Радиус $R_1 = 0{,}5м$. Жесткость пружины $c = 50km/R_1^2$. Длина сжатой пружины $l_1 = 0{,}4l_0$.

Принимая шарик за материальную точку, определить скорость и ускорение шарика в положении M_1, определяемым углом φ. Силами сопротивления пренебречь. Данные коэффициента k, радиуса R_2, длины недеформированной пружины l_0 и угла φ содержатся в таблице 2.

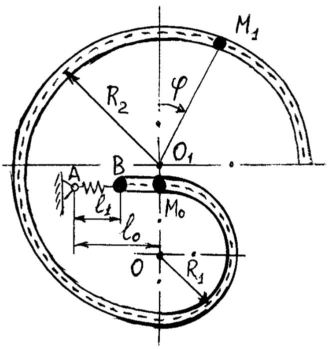

Рис. 2.0

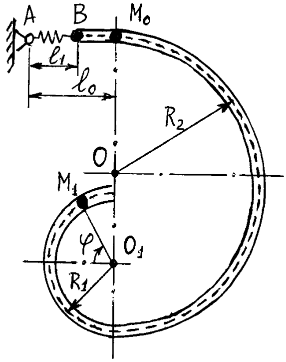

Рис. 2.1

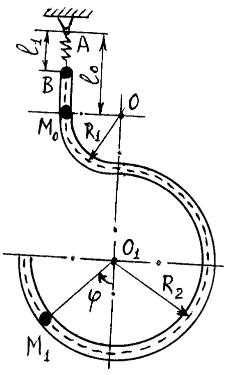

Рис. 2.2

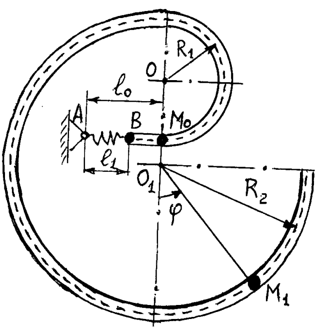

Рис. 2.3

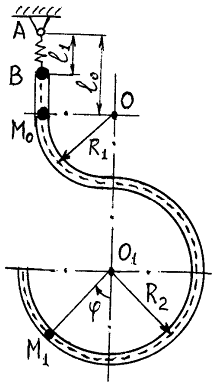

Рис. 2.4

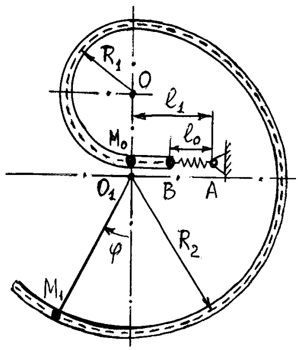

Рис. 2.5

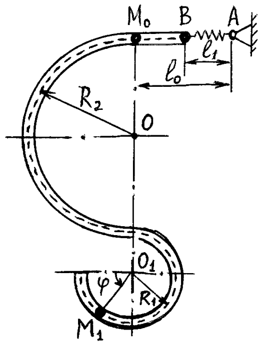

Рис. 2.6

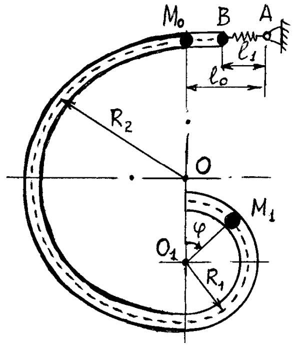

Рис. 2.7

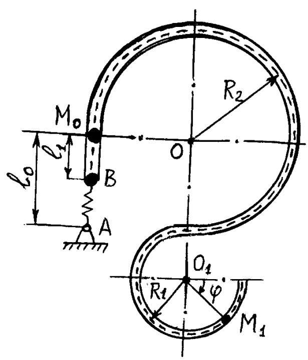

Рис. 2.8

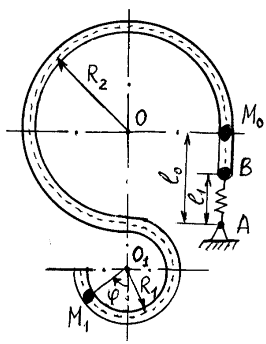

Рис. 2.9

Таблица 2

№	R_2, *м*	k, *Н·м/кг*	l_0, *м*	φ, *град.*
0	2,0	18	0,28	30
1	1,4	12	0,22	45
2	1,6	14	0,24	60
3	1,8	16	0,25	60
4	1,2	10	0,20	45
5	1,8	15	0,26	90
6	1,6	12	0,28	30
7	1,2	10	0,18	45
8	1,4	12	0,25	30
9	2,0	16	0,30	60

Указания к решению задачи. Прежде чем приступить к решению задач 2 и 3, рекомендуем найти ответы на следующие вопросы:

1. Что такое количество движения, момент количества движения, кинетическая энергия точки?
2. Как определяются импульс силы, работа постоянной силы, работа силы тяжести, работа силы упругости?
3. Как формулируются теоремы динамики точки?

Решение задачи 2 разбивается на несколько этапов. Сначала следует рассмотреть движение шарика на участке BM_0 под действием силы тяжести (если участок BM_0 не горизонтальный) и силы упругости пружины, и определить скорость шарика в точке M_0. Необходимо найти сумму работ этих сил на перемещении BM_0, и приравнять ее кинетической энергии шарика в точке M_0. Кинетическая энергия шарика в точке B равна нулю, т.к. по условию задачи его начальная скорость равна нулю. При вычислении работы силы упругости пружины учесть, что начальная деформация пружины $\lambda_0 = l_0 - l_1$, а конечная деформация $\lambda_1 = 0$. Движение шарика на участке M_0M_1 происходит под действием только силы тяжести. По теореме об изменении кинетической энергии точки определяется скорость шарика в точке M_1. Нормальное ускорение находится по формуле $a_n = \upsilon^2 / \rho$, где ρ – радиус кривизны траектории в точке M_1. Касательное ускорение a_τ можно найти, применяя теорему об изменении момента количества движения точки относительно неподвижного центра O_1. Модуль ускорения шарика находится по формуле $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Задача 3. Применение теоремы об изменении количества движения точки

Шарик D, имеющий массу m *кг*, получив в точке A начальную скорость υ_0, движется в изогнутой трубке ABC, расположенной в вертикальной плоскости (рис.3.0 – 3.9). При движении шарика по участку AB на него действуют: сила тяжести, постоянная сила Q, направленная от точки A к точке B, и сила трения. Коэффициент трения шарика о стенку трубки $f = 0{,}2$. Через промежуток времени t_1 шарик попадает в точку B и, не изменяя величины скорости, переходит на участок BC трубки. При движении по этому участку на шарик действуют: сила тяжести, переменная сила $\overline{F}$, действующая в направлении BC. Масса шарика m, скорость шарика υ_0 в точке A, модули сил $\overline{Q}$ и $\overline{F}$, угол α и время t_1 заданы в таблице 3. Принимая шарик за материальную точку, найти скорость шарика через $t_2 = 2$с, $t_3 = 3$с после начала движения по участку BC.

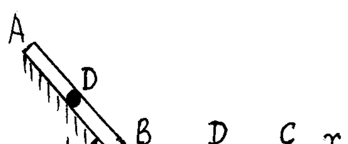

Рис. 3.0

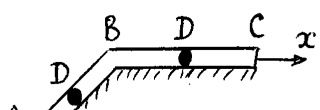

Рис. 3.1

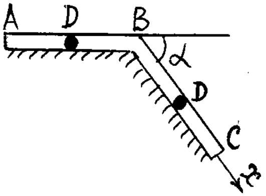

Рис. 3.2

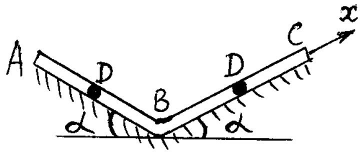

Рис. 3.3

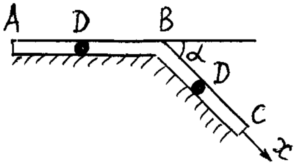

Рис. 3.4

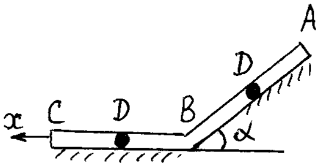

Рис. 3.5

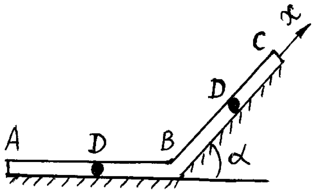

Рис. 3.6

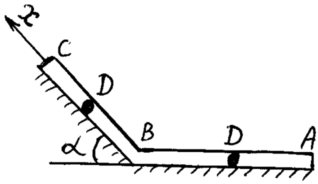

Рис. 3.7

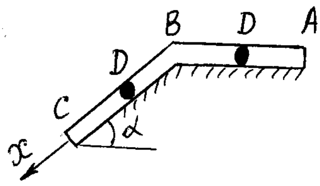

Рис. 3.8

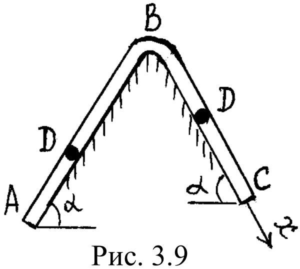

Рис. 3.9

Таблица 3

№	m, *кг*	υ_0, *м/с*	Q, *Н*	F, *Н*	α^o	t_1, *с*
0	0,8	12	4	$40\cos 2t$	45	0,8
1	0,4	16	1,5	$70\cos 4t$	30	0,6
2	0,3	20	1,5	$40t^2$	60	1,5
3	0,4	25	1,6	$60\cos t$	75	1,6
4	0,5	16	2	$70t^2$	75	1,4
5	0,2	25	0	$40t^2-2$	30	1,3
6	0,2	10	0,8	$20t^2$	45	1,7
7	0,1	8	0	$50\cos 2t$	60	2,0
8	0,8	12	2,4	$20t+3$	75	2,2
9	0,1	16	0,5	$30t^2+1$	15	2,4

Указания к решению задачи. Для решения этой задачи следует найти сумму импульсов сил на участках AB и BC, записать теорему об изменения количества движения на этих участках и определить скорость шарика в указанные моменты времени.

Задача 4. Свободные колебания материальной точки

Груз весом $P = 200H$ прикреплен к системе трех пружин различной жесткости c_1, c_2, c_3, *Н/см* (рис.4.0 – 4.5). На рис.4.6 – 4.9 груз P прикреплен с помощью трех пружин к жесткому невесомому стержню AB. Жесткости пружин таковы, что стержень AB и груз P перемещаются в вертикальной плоскости поступательно. Движение груза начинается из положения статического равновесия с начальной скоростью υ_0, направление которой показано на рисунках.

Найти уравнение, круговую частоту, амплитуду, период и частоту свободных колебаний груза.

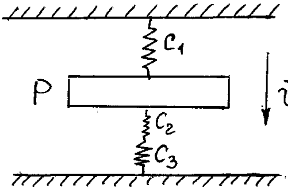

Рис. 4.0

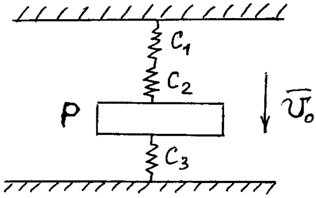

Рис. 4.1

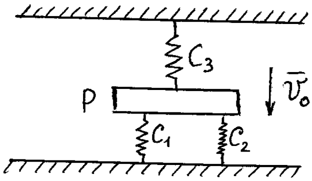

Рис. 4.2

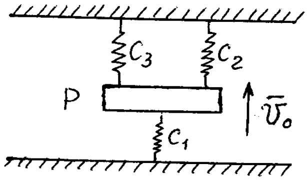

Рис. 4.3

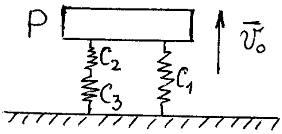

Рис. 4.4

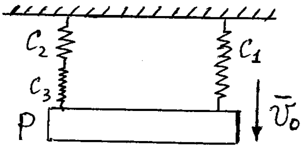

Рис. 4.5

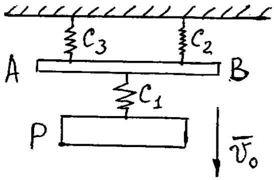

Рис. 4.6

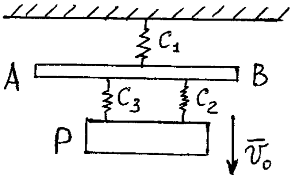

Рис. 4.7

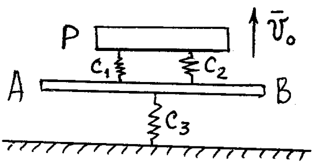

Рис. 4.8

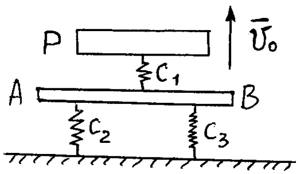

Рис. 4.9

Таблица 4

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
c_1, *Н/см*	3	1,5	2,4	1,2	1,6	1,2	1,6	2,2	4,0	0,8
c_2, *Н/см*	0,8	1,2	0,5	2,0	4,0	1,2	0,8	1,6	1,2	1,6
c_3, *Н/см*	1,2	1,8	2,0	1,6	0,8	2,0	1,0	1,4	1,6	1,6
υ_0, *м/с*	4	6	8	10	12	2	1	5	6	8

Указания к решению задачи. Груз P движется поступательно, поэтому его можно рассматривать как материальную точку. Систему трех пружин следует заменить одной эквивалентной пружиной и необходимо найти ее жесткость. Нужно сначала определить способ соединения пружин. Если, например, две пружины соединены параллельно, то коэффициент жесткости эквивалентной пружины $c_{экв} = c_1 + c_2$. При последовательном соединении двух пружин $c_{экв} = c_1 \cdot c_2 /(c_1 + c_2)$. Рекомендуется ось x направить так, как направлена начальная скорость тела υ_0; начало отсчета координаты x поместить в положение статического равновесия груза. Далее рекомендуется изобразить материальную точку (тело) на расчетной схеме в текущий момент времени (t>0), считая при этом координату x>0, и приложить к точке действующие на нее силы упругости и тяжести. Затем следует составить и проинтегрировать дифференциальное уравнение движения точки. По начальным условиям $x(0) = x_0 = 0$, $\dot{x}(0) = \upsilon_0$ определить постоянные интегрирования.

Тема 2. Динамика механической системы

Перед решением задач 5-8 необходимо изучить теорию на следующие темы:

1. Механическая система. Центр масс системы. Силы внешние и внутренние. Свойства внутренних сил.
2. Момент инерции тела относительно оси. Моменты инерции некоторых однородных тел. Моменты инерции тела относительно параллельных осей.

3. Теорема о движении центра масс. Закон сохранения движения центра масс.
4. Количество движения механической системы. Теорема об изменении количества движения механической системы.
5. Главный момент количества движения (кинетический момент) механической системы и твердого тела. Теорема об изменении главного момента количества движения (кинетического момента) механической системы.
6. Кинетическая энергия тела при различных видах движения. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы.
7. Принцип Даламбера для механической системы. Силы инерции.

Задача 5. Применение теоремы о движении центра масс механической системы и теоремы об изменении количества движения механической системы

Механическая система состоит из прямоугольной вертикальной плиты массой $m_1 = 16 кг$, которая движется поступательно вдоль гладких горизонтальных направляющих с постоянной скоростью $u = 2 м/с$, и груза D массой $m_2 = 6 кг$, который в момент времени $t = t_0 = 0$ под действием внутренних сил движется из положения A в направлении AD по имеющемуся на плите желобу. На рис. 5.0, 5.2, 5.3, 5.5, 5.7, 5.8 желоб прямолинейный и груз движется по нему относительно плиты согласно закону $s = s(t)$. На рис. 5.1, 5.4, 5.6, 5.9 ось желоба направлена по окружности радиуса $R = 0{,}8 м$ и при движении груза угол φ меняется по закону $\varphi = \varphi(t)$.

На всех рисунках груз D показан в положении, при котором $s > 0$ или $\varphi > 0$. Если $s < 0$ или $\varphi < 0$, груз D находится по другую сторону от точки A.

Принимая груз за материальную точку и пренебрегая всеми сопротивлениями, определить величину, указанную в таблице 5, где обозначено: $x_1 -$ перемещение плиты за время от $t_0 = 0$ до $t_1 = 1 с$;

υ_1, a_1 – значения скорости и ускорения плиты в момент времени $t_1 = 1c$.

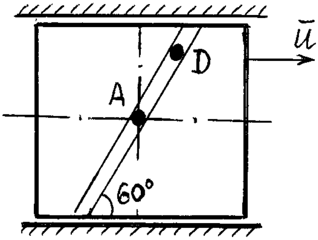

Рис. 5.0

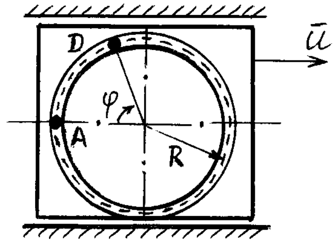

Рис. 5.1

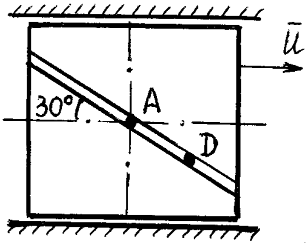

Рис. 5.2

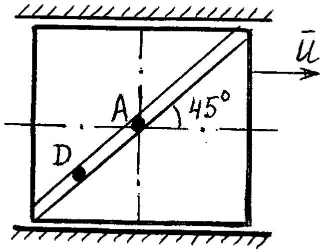

Рис. 5.3

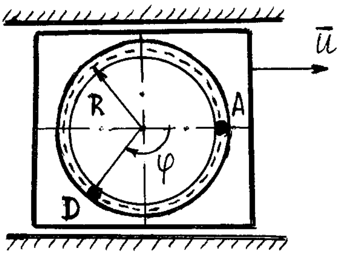

Рис. 5.4

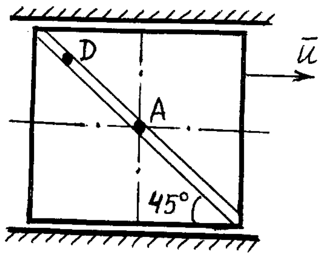

Рис. 5.5

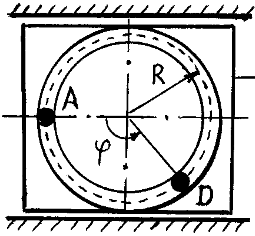

Рис. 5.6

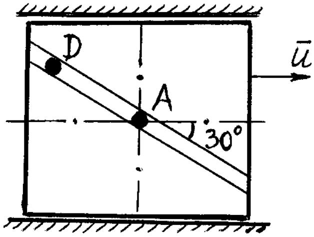

Рис. 5.7

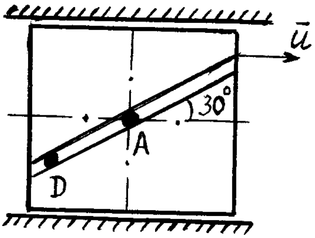

Рис. 5.8

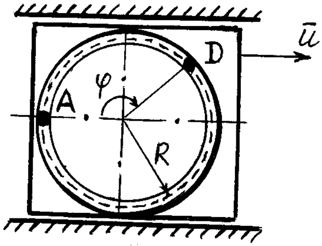

Рис. 5.9

Таблица 5

№	s = s(t), *м* Р и с у н к и 5.0 и 5.2	 5.3 и 5.5	 5.7 и 5.8	φ = φ(t), *рад.* Р и с у н к и 5.1 и 5.4	 5.6 и 5.9	Опр. вел.
0	$0{,}8t^2$	$-0{,}6t^2$	$0{,}5\sin\pi t^2/2$	$2\pi Rt^2$	$0{,}5\pi Rt^2$	x_1
1	$0{,}8\sin\pi t^2/4$	$0{,}4\sin\pi t^2/3$	$-1{,}2t^2$	$-5\pi Rt^2/6$	$-0{,}75\pi Rt^2$	υ_1
2	$0{,}2\sin\pi t^2$	$1{,}8\sin\pi t^2/2$	$0{,}4\sin\pi t^2$	$\pi Rt^2/3$	$-0{,}75\pi Rt^2$	a_1
3	$-1{,}5t^2$	$1{,}8t^2$	$0{,}8\sin\pi t^2/2$	$-\pi Rt^2/3$	$0{,}5\pi Rt^2$	x_1
4	$0{,}9\sin\pi t^2/3$	$0{,}4\sin\pi t^2/2$	$-0{,}9t^2$	$-\pi Rt^2$	$-2\pi Rt^2/3$	υ_1
5	$0{,}6\sin\pi t^2/2$	$1{,}2\sin\pi t^2/6$	$0{,}8\sin\pi t^2/4$	$\pi Rt^2/3$	$-\pi Rt^2/6$	υ_1
6	$-1{,}4t^2$	$-1{,}2t^2$	$0{,}6t^2$	$5\pi Rt^2/6$	$\pi Rt^2/3$	x_1
7	$1{,}8\sin\pi t^2/6$	$0{,}6\sin\pi t^2/2$	$0{,}8t^2$	$\pi Rt^2/3$	$-0{,}75\pi Rt^2$	a_1
8	$0{,}5\sin\pi t^2$	$1{,}2\sin\pi t^2/6$	$0{,}6\sin\pi t^2/2$	$\pi Rt^2/6$	$0{,}25\pi Rt^2$	a_1
9	$0{,}9t^2$	$-1{,}6t^2$	$0{,}5\sin\pi t^2$	$-0{,}5\pi Rt^2$	$-5\pi Rt^2/6$	x_1

Указания к решению задачи. Теоремой о движении центра масс механической системы целесообразно воспользоваться в задачах, где нужно определить перемещение плиты. Теоремой об изменении количества движения механической системы следует воспользоваться в задачах, где нужно определить скорость или ускорение плиты.

Задача 6. Применение теоремы об изменении момента количества движения механической системы к определению угловой скорости твердого тела

Круглая платформа весом $P_1 = 1200H$ и находящийся в точке A платформы точечный груз весом $P_2 = 600H$ под действием вращающего момента $M_{вр}$ начинают вращаться из состояния покоя вокруг неподвижной вертикальной оси O_1z, отстоящей от центра тяжести C платформы на расстоянии $OC = a$. Радиус платформы $R = 2м$. Платформу считать однородным круглым диском. Через промежуток времени $t = 1c$ действие вращающего момента прекращается. Далее платформа будет вращаться по инерции с постоянной угловой скоростью. Определить эту угловую скорость платформы.

В некоторый момент времени $t = 0$ ($t -$ новое начало отсчета времени) точечный груз начинает относительное движение (как самоходный механизм) от точки A по краю платформы согласно закону $AM = s(t)$.

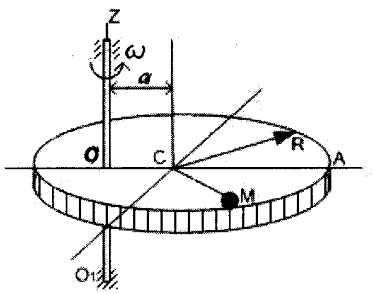

Рис. 6

Найти угловую скорость платформы через промежуток времени $t = \tau$ после начала движения груза относительно платформы.

Таблица 6

№	$M_{вр} = M_{вр}(t)$, Н·м	$s = s(t)$, м	a, м	τ, с
0	$4t^3+t$	$0{,}25\pi Rt^2$	0,5R	1
1	$2t^2+4$	$\pi Rt^4/3$	0,5R	1
2	$t^3+0{,}5t^2+t$	$0{,}5\pi Rt^2$	0	1,5
3	$3t^6+2t$	$\pi Rt^2/6$	0,5R	2
4	$5t^4+3t^2$	$\pi Rt^2/12$	0,25R	0,5
5	$6t^3+0{,}5t$	$0{,}25\pi Rt^3$	0,5R	2
6	$4t^4$	$0{,}6\pi Rt^2$	0,25R	1
7	$3t^2+1$	$0{,}1\pi Rt^2$	0	0,5
8	$2t^3$	$0{,}5\pi Rt^3$	0,5R	2
9	$4t^4+t$	$0{,}25\pi Rt^2$	0	0,5
10	$2t^2+3$	$0{,}25\pi Rt^3$	0	1
11	$4t(t-2)$	$0{,}25\pi Rt^2$	0,25R	1
12	$t^3+0{,}5t^2-t$	$0{,}5\pi Rt^4$	0,5R	0,5
13	$2t^6+3t$	$\pi Rt^3/3$	0,5R	1,5
14	$3t^4+5t^2$	$\pi Rt^2/6$	0,25R	2
15	$0{,}5t^3-t$	$2\pi Rt^2/3$	0,25R	2,5
16	$4(t^4-t)$	$0{,}75\pi Rt^2$	0	2
17	$5t(t-1)$	$25\pi Rt^2/6$	0,5R	0,5
18	$8t^2$	$0{,}75\pi Rt^2$	0	1,5
19	$6t(t^3-1)$	$2\pi Rt^2$	0,25R	2
20	$4t^3+t^2+t$	$\pi Rt^2/3$	0	1
21	$2t^4+3t^3+t^2$	$\pi Rt^2/6$	0	1
22	$4t^6+3t^4+t$	$4\pi Rt^2/3$	0,5R	1
23	$10t^4-3t^2-t$	$0{,}75\pi Rt^3$	0,25R	2
24	$2t^6+3t^2-t$	$2{,}5\pi Rt^2$	0,5R	0,5
25	$4t^4-2t^3$	$1{,}5\pi Rt^3$	0,5R	0,25
26	$6t^5+t^3-4t^2$	$10\pi Rt^2/3$	0,25R	2,5
27	$10t^3$	$0{,}5\pi Rt^2$	0	3
28	t^3-2t^2+t	$1{,}5\pi Rt^2$	0,5R	1
29	$6t^4$	$\pi Rt^3/3$	0	1,5

Указания к решению задачи. Рассмотрим первый этап решения задачи, когда груз относительно платформы не движется. Уравнение, выражающее теорему об изменении момента количества движения системы, имеет вид $\frac{dK_z}{dt} = M_{вр}$. Кинетический момент системы $K_z = J_z\omega$, где $J_z = J_z^{пл} + J_z^{гр}$ - постоянный момент инерции системы. Моменты инерции платформы и груза определяются по формулам: $J_z^{пл} = P_1(0{,}5R^2 + a^2)/g$, $J_z^{гр} = P_2(a+R)^2/g$. Разделив переменные, следует проинтегрировать уравнение. Учитывая начальное условие $\omega(0) = 0$, можно найти угловую скорость в момент времени $t = 1c$.

На втором этапе, когда груз движется относительно платформы, ход решения задачи следует изменить. Момент инерции груза будет переменным, а его скорость складывается из относительной и переносной скоростей. При $M_{вр} = 0$ кинетический момент системы становится постоянным. Изменение момента инерции груза вызывает изменение угловой скорости платформы. Кинетический момент системы $K_z = K_z^{пл} + K_z^{гр}$, где $K_z^{пл} = J_z^{пл}\omega$. Кинетический момент груза $K_z^{гр}$ относительно оси вращения определяется как момент количества движения точки относительно оси: $K_z^{гр} = m_z(m\overline{\upsilon}) = m_z(m\overline{\upsilon}_{пер}) + m_z(m\overline{\upsilon}_{отн})$, где $m -$ масса груза, $\overline{\upsilon}, \overline{\upsilon}_{пер}, \overline{\upsilon}_{отн} -$ абсолютная, переносная и относительная скорости груза. Полученное выражение K_z для момента времени $t = \tau$ следует приравнять K_z для момента времени $t = 0$. Отсюда определяется искомая угловая скорость $\omega(\tau)$.

Задача 7. Применение теоремы об изменении кинетической энергии к изучению движения механической системы

Механическая система, расположенная в вертикальной плоскости, состоит из ступенчатых шкивов 1, 2 с радиусами ступеней $r_1 = 0{,}1м$, $R_1 = 0{,}3м$, $r_2 = 0{,}1м$, $R_2 = 0{,}2м$, грузов 3, 4 и сплошного однородного цилиндрического катка 5. Радиусы инерции шкивов $\rho_1 = 0{,}25м$, $\rho_2 = 0{,}15м$. Под действием сил тяжести тел и силы

$F = F(s)$, зависящей от перемещения s точки приложения силы, система приводится в движение из состояния покоя. При движении системы учитываются также силы трения скольжения грузов, постоянные моменты сопротивлений M_1, M_2, приложенных соответственно к шкивам 1, 2. Коэффициент трения скольжения $f = 0{,}2$. Начальное положение механической системы показано на рис. 7.0 – 7.9. Массы тел указаны в столбцах 2 – 6 табл. 7. Считать, что все нити нерастяжимые, каток движется по плоскости без скольжения.

Определить величину, указанную в последнем столбце табл. 7, в тот момент, когда перемещение точки приложения силы F равно s_1, где обозначено: $\omega_1, \omega_2 -$ угловые скорости шкивов 1,2; $\upsilon_3 -$ скорость груза 3; $\upsilon_{C_5} -$ скорость центра масс катка 5.

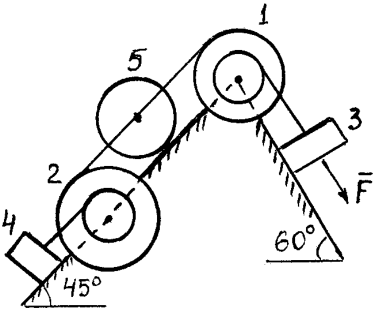

Рис. 7.0

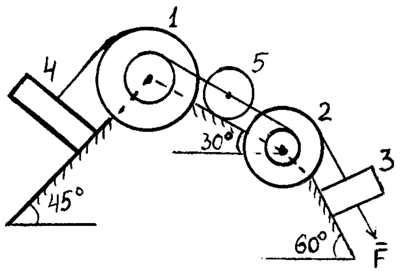

Рис. 7.1

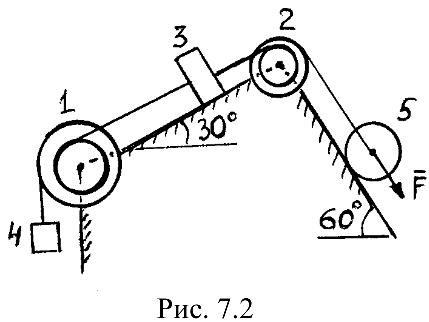

Рис. 7.2

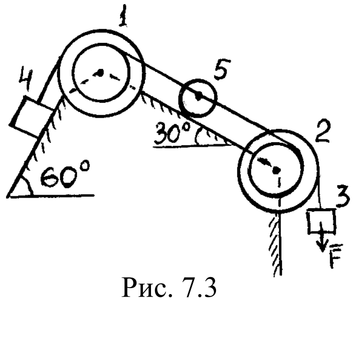

Рис. 7.3

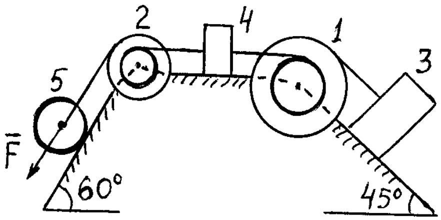

Рис. 7.4

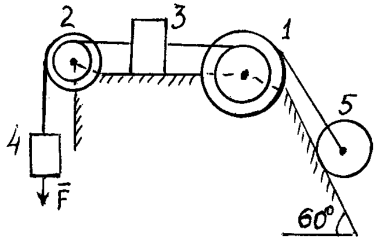

Рис. 7.5

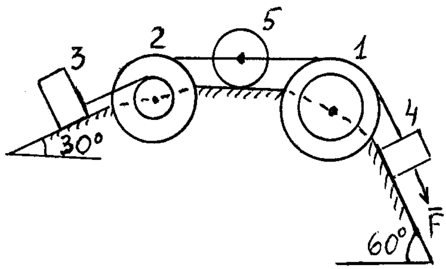

Рис. 7.6

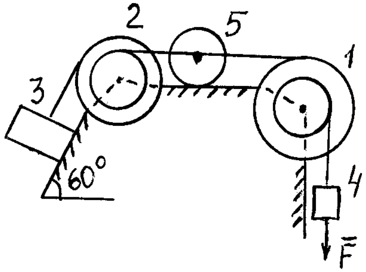

Рис. 7.7

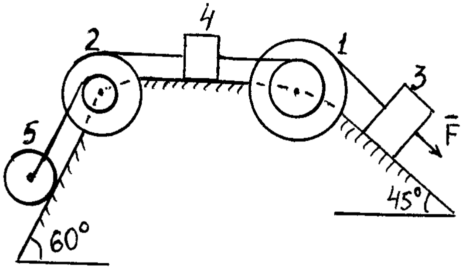

Рис. 7.8

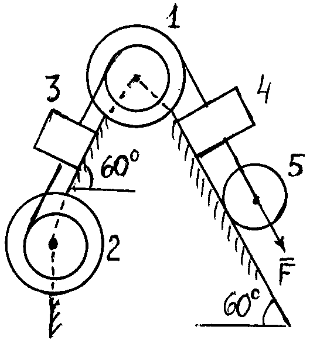

Рис. 7.9

Таблица 7

№	m_1 *кг*	m_2 *кг*	m_3 *кг*	m_4 *кг*	m_5 *кг*	M_1 *Н·м*	M_2 *Н·м*	$F=F(s)$ *Н*	$s=s_1$ *м*	Опр. вел.
0	6	4	2	6	4	0	0,8	$60(1+s)$	1,0	ω_1
1	4	2	6	4	4	0,8	0	$10(6+s)$	1,2	ω_2
2	2	4	2	4	6	0	0,6	$60(3+s)$	0,8	υ_{C_5}
3	8	6	4	2	4	0,6	0	$30(4+s)$	1,0	ω_1
4	6	8	2	4	4	0	1,2	$50(2+3s)$	1,6	ω_1
5	4	8	6	2	2	1,2	0	$20(8+s)$	0,8	υ_{C_5}
6	2	6	8	4	6	0	0,8	$30(2+5s)$	1,6	ω_2
7	8	4	2	4	6	0,8	0	$10(6+s)$	0,8	υ_3
8	4	6	4	8	4	0	0,4	$80(1+s)$	1,4	ω_2
9	6	8	6	6	2	0,3	0	$30(3+s)$	1,6	υ_{C_5}

Указания к решению задачи. Для решения задачи рекомендуется применить теорему об изменении кинетической энергии системы. Сначала нужно определить вид движения каждого тела. Кинетическая энергия системы равняется сумме кинетических энергий тел, входящих в эту систему. Кинетическая энергия системы в начальном положении равна нулю, т.к. начальные скорости тел равны нулю.

Кинетическую энергию тел в конечном положении системы следует выразить через искомую скорость. Затем нужно определить сумму работ внешних сил на перемещениях, выраженных через заданное перемещение s_1, и приравнять ее кинетической энергии системы.

Задача 8. Применение принципа Даламбера к определению реакций связей

Вертикальный вал AK, вращающийся с постоянной угловой скоростью $\omega = 10\,рад/с$, закреплен подпятником в точке A и цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке, указанной в строке 2 таблицы 8. Расстояния $AB = BD = DE = EK = 0{,}2м$. К валу жестко прикреплен невесомый стержень 1 длиной $l_1 = 0{,}6м$ с грузом массой $m_1 = 6кг$ на конце и однородный стержень 2 длиной $l_2 = 0{,}4м$, имеющий массу $m_2 = 4кг$. Оба стержня лежат в одной плоскости. Точки крепления стержней к валу указаны в таблице 8.

Пренебрегая весом вала, определить реакции подпятника и подшипника (рис. 8.0 – 8.9).

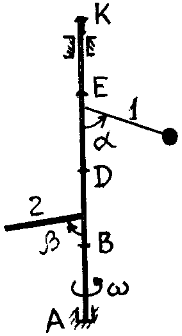

Рис. 8.0

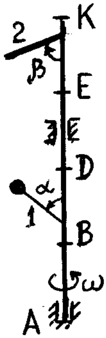

Рис. 8.1

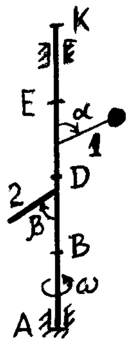

Рис. 8.2

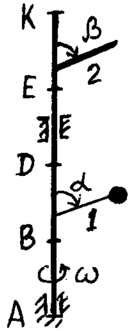

Рис. 8.3

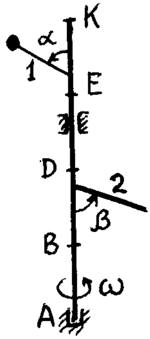

Рис. 8.4

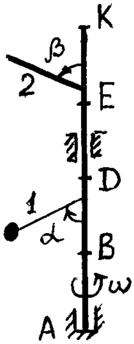

Рис. 8.5

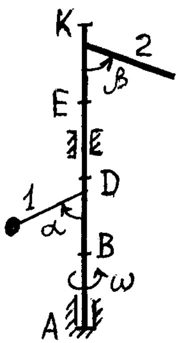

Рис. 8.6

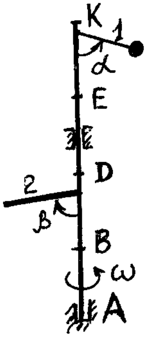

Рис. 8.7

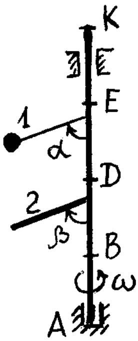

Рис. 8.8

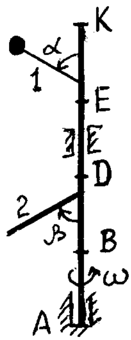

Рис. 8.9

Таблица 8

№	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Подшипник в точке	*B*	*D*	*E*	*K*	*B*	*D*	*E*	*K*	*D*	*E*
Стержень 1 в точке	*D*	*B*	*D*	*D*	*E*	*K*	*B*	*E*	*E*	*K*
Стержень 2 в точке	*K*	*E*	*B*	*E*	*D*	*B*	*K*	*B*	*K*	*D*
α^0	30	45	60	90	60	30	45	30	60	90
β^0	45	60	90	30	90	45	30	90	90	45

Указания к решению задачи. Данная задача решается с применением принципа Даламбера. Необходимо составить уравнений равновесия для плоской системы активных сил, сил реакций связей и сил инерции. Активными силами являются силы тяжести точечного груза и стержня 2. Прежде чем определить силы инерции, необходимо найти ускорение груза и ускорение центра масс стержня 2. Силы инерции тел равны произведению масс тел на ускорения их центров масс. Направления сил инерции противоположны направлениям ускорений тел. Точкой приложения силы инерции точечного груза является точка крепления груза к стержню 1. Равнодействующая сил инерции стержня 2, расположенного перпендикулярно оси вала

($\beta = 90^0$), направлена вдоль стержня. Если угол $0 < \beta < 90^0$, то равнодействующая сил инерции приложена в центре тяжести эпюры интенсивности распределенных сил инерции, т.е. на расстоянии $2l_2/3$ от точки крепления к валу AK стержня 2.

Библиографический список

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов. – 12-е изд.,стер. – М.: Высш. школа, 2001. – 416 с.
2. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах, т. 2. М.: Наука, 1972, 624с.
3. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. Под общей редакцией проф. А. А. Яблонского. 10-е изд., стер. – М.: Интеграл-Пресс, 2003. – 384с.
4. Ахметшин М.Г., Гумерова Х.С., Петухов Н.П. Теоретическая механика: учебное пособие. – Казань: Изд-во Казан. гос. технол. ун-та, 2009. – 120 с.