

Задание
на расчетно-графическую работу
по прикладной механике на тему
«Расчет статически определимой балки на
прочность»

Методические указания

Составители: доц. К.А.Абдулхаков,
доц. В.М.Котляр.

Задание на расчетно-графическую работу по теме «Расчет статически определимой балки на прочность»: Методические указания. / Казан. гос. Ун-т; сост. К.А.Абдулхаков, В.М.Котляр. Казань. 2001. 16 с.

Содержит исходные данные, расчетные схемы и пример выполнения расчетно-графической работы «Расчет статически определимой балки на прочность» по дисциплине «Прикладная механика» (раздел «Сопротивление материалов»).

Предназначено для студентов технологических специальностей в качестве одного из разделов СРС.

Разработано на кафедре сопротивления материалов.

Печатается по решению методической комиссии по циклу общеинженерных дисциплин.

Рецензенты: проф. В.А.Иванов,
доц. С.Г.Сидорин.

1. Расчет статически определимой балки на прочность

1.1. Выбор исходных данных и основные требования к оформлению работы

Исходные данные к заданию выбираются из соответствующей таблицы и рисунков 1 и 2 согласно шифру, указанному преподавателем. Шифр задается в виде двух чисел, первое из которых одно- или двузначное, второе – трехзначное. Под первым числом и под каждой цифрой трехзначного числа шифра следует подписать начальные буквы русского алфавита, например:

Шифр	05-196
буквы	а б в г

Число «а» соответствует номеру расчетной схемы из рис.1 или 2, числа «б», «в», «г» используются для определения исходных данных по таблице. Из каждого вертикального столбца таблицы, обозначенного внизу определенной буквой, надо взять только одно число, стоящее в той горизонтальной строке, номер которой совпадает с номером буквы. В данном случае из каждого столбца «б» следует взять числовые данные первой строки, из каждого столбца «в» - девятой, а из столбца «г» - шестой строки.

Расчетно-графическая работа состоит из пояснительной записки (текстовая часть) и графической части (схема балки и эпюры поперечных сил и изгибающих моментов).

Пояснительная записка выполняется на листах белой писчей бумаги формата А4 со стандартным оформлением в соответствии с требованиями ЕСКД ГОСТ 2.105.95. На титульном листе должны быть указаны наименование и номер задания, название дисциплины, номер группы, фамилии и инициалы студента и преподавателя. На первой странице расчетно-пояснительной записки должен быть указан шифр задания, а также все исходные числовые данные и исходные чертежи-схемы с размерами, соответствующими этому шифру. Все результаты расчетов приводятся с точностью до трех значащих цифр.

Графическая часть работы выполняется на стандартных листах ватмана формата А4 с соблюдением масштабов. Она должна содержать расчетную схему, эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, формы поперечных сечений балки.

1.2. Содержание работы

Для заданной статически определимой балки требуется построить эпюры внутренних силовых факторов, подобрать из условия прочности размеры двутаврового поперечного сечения, определить наибольшие касательные напряжения в балке. Сравнить веса балок коробчатого, прямоугольного, квадратного, кольцевого и круглого сечений с весом балки двутаврового сечения.

1.3. Исходные данные

1.3.1. Схема балки выбирается по шифру из рис.1 или 2, формы сечений – из рис.3.

1.3.2. Величины нагрузок и длины участков определяются по шифру из табл. 1 ($P = \alpha qa, M = \beta qa^2$).

Таблица

№ п/п	a, м	q, кН/м	α	β
1	0,8	5	1,2	2,1
2	1,0	6	1,4	1,9
3	1,2	7	1,6	1,7
4	1,4	8	1,8	1,5
5	1,6	9	2,0	1,3
6	0,8	10	1,8	1,1
7	1,0	11	1,6	1,3
8	1,2	12	1,4	1,5
9	1,4	13	1,2	1,7
10	1,6	14	1,0	1,9
	б	в	г	б

1.3.3. Материал балки – сталь Ст.3. Допускаемые напряжения: $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau] = 100 \text{ МПа}$; поперечное сечение балки (исходное) – двутавр.

1.4. Порядок выполнения работы

1.4.1. **Определение опорных реакций.** По виду опор устанавливается, где и какие возможны реакции, и на схему балки наносятся предполагаемые их направления. Для определения реакций для балок с шарнирными опорами используются уравнения статики в виде сумм моментов относительно опор. Если в результате вычислений какая-нибудь реакция получилась отрицательной, то на схеме балки

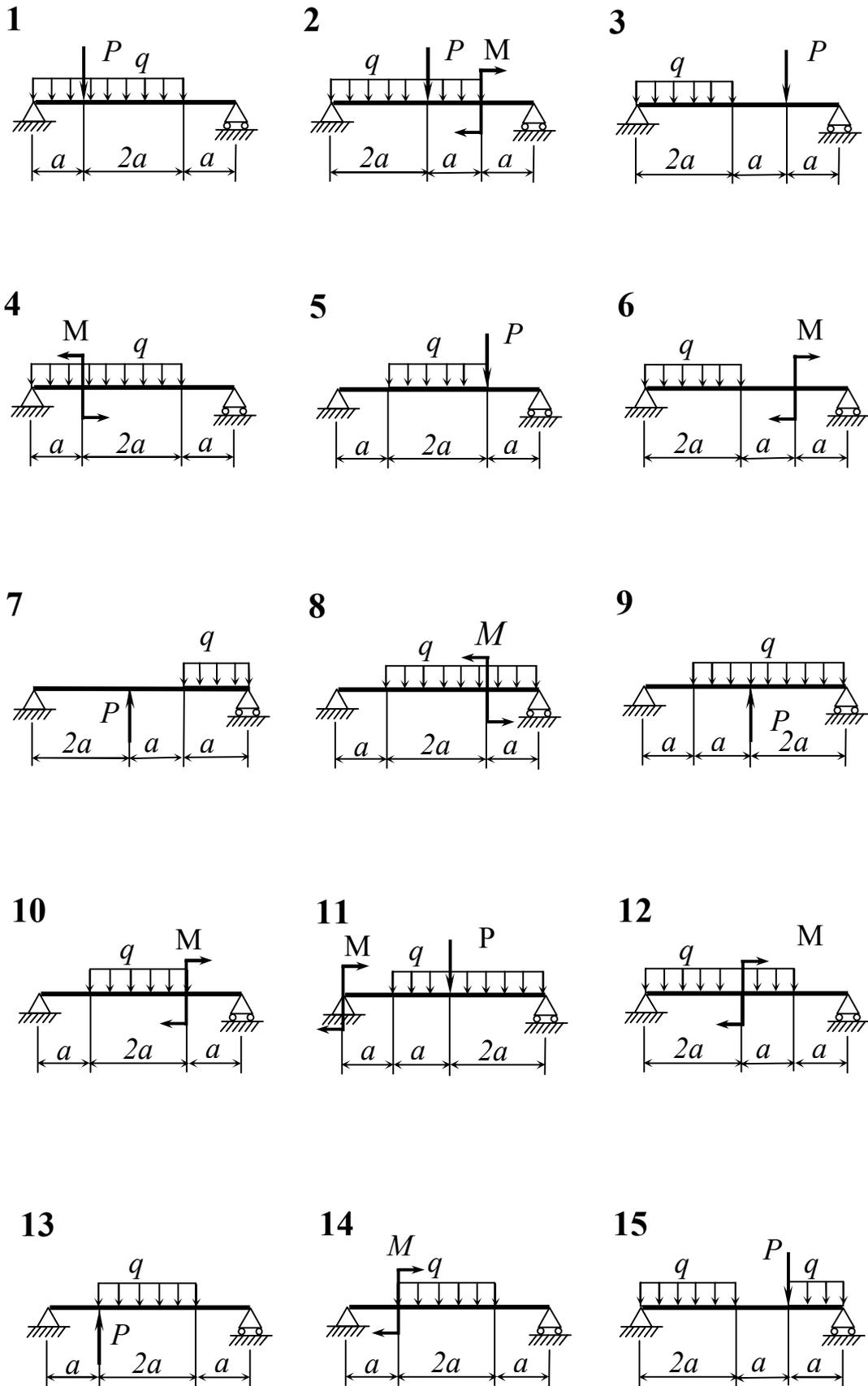


Рис. 1. Схемы балок

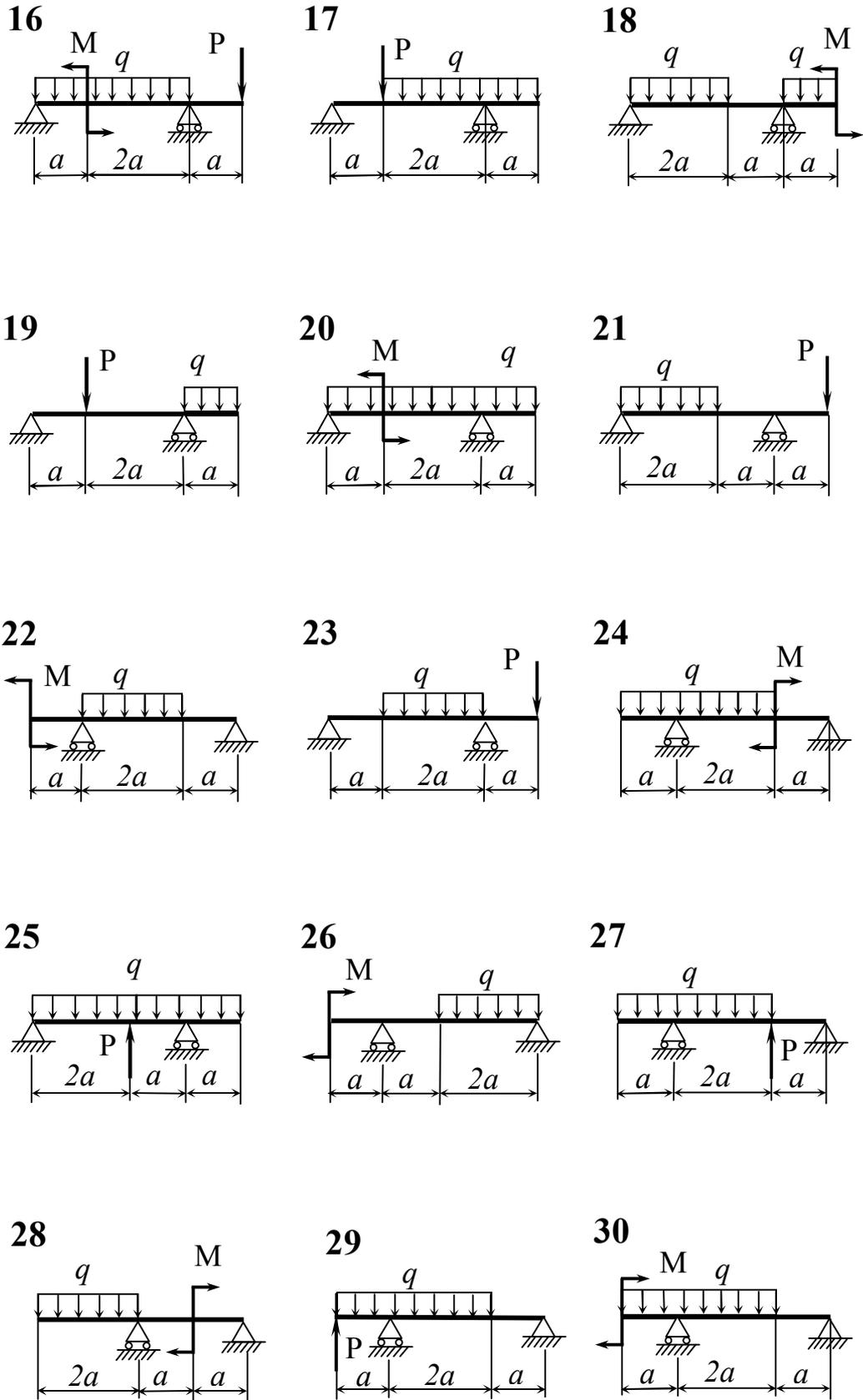


Рис. 2. Схемы балок

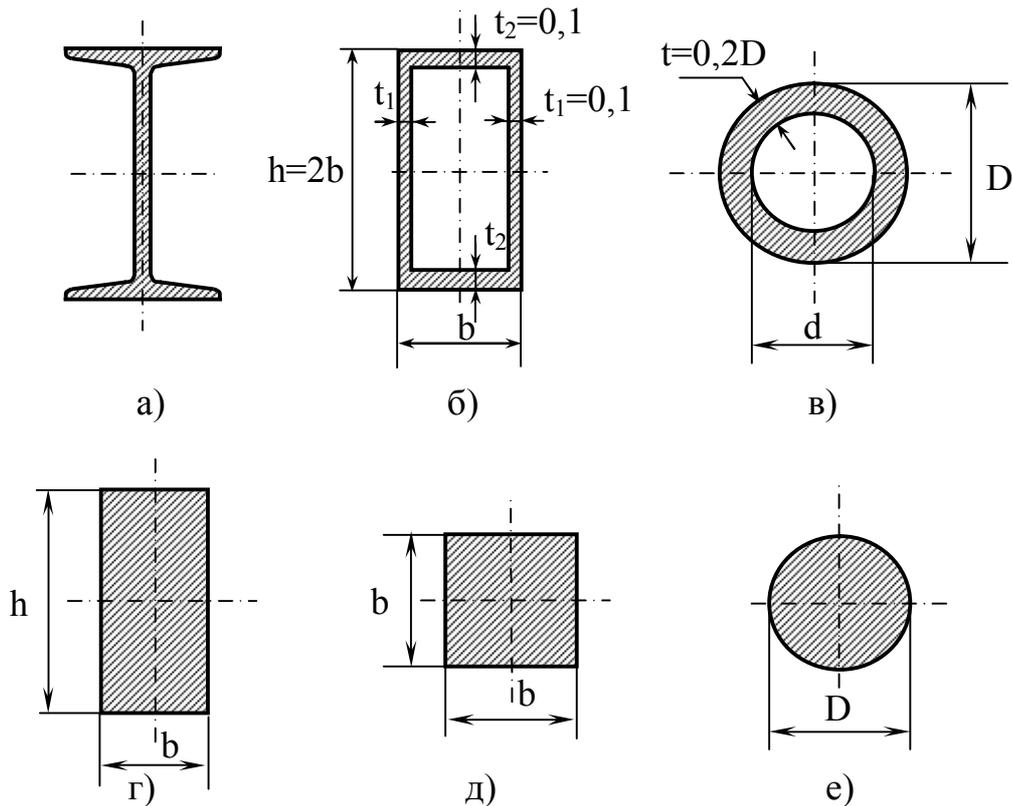


Рис. 3. Формы поперечных сечений балок

нужно изменить ее направление. Проверкой правильности вычисления реакций будет служить равенство нулю алгебраической суммы проекций всех сил, действующих на балку, на плоскость поперечного сечения ($\sum y = 0$).

1.4.2. Составление аналитических выражений поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x для всех участков балки. Выражения для поперечной силы и изгибающего момента записываются на основании метода сечений для каждого из участков балки. Под участком балки понимается такой ее отрезок, на котором вид функций Q_y и M_x остается неизменным. Границами участков являются сечения приложения сосредоточенных сил, моментов, начала или конца распределенных нагрузок.

1.4.3. Вычисление Q_y и M_x в характерных сечениях. По полученным выражениям вычисляются значения Q_y и M_x в характерных сечениях (сечениях на границах участков; сечениях, где M_x имеет экстремум).

1.4.4. Построение эпюр Q_y и M_x . Эпюры строятся с соблюдением масштаба. Положительные значения Q_y и M_x откладываются вверх от оси.

1.4.5. Подбор поперечного сечения балки. Подбор сечения балок производится из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{xmax}}{W_x} \leq [\sigma], \quad W_x \geq \frac{M_{xmax}}{[\sigma]},$$

где $M_{xmax} = \max|M_x|$ - наибольшее по абсолютной величине значение изгибающего момента, определяемое по эпюре M_x . По сортаменту прокатной стали находится двутавр (ГОСТ 8509-72), имеющий момент сопротивления W_x , близкий к вычисленному. Допускается, чтобы момент сопротивления выбранного профиля был до 5% меньше необходимого. Для принятого профиля записываются основные геометрические характеристики (момент сопротивления изгибу W_x , толщина стенки d , максимальный статический момент S_x^* , момент инерции J_x).

1.4.6. Проверка балки на прочность по касательным напряжениям. Условие прочности по касательным напряжениям проверяется в сечении, где $Q_{ymax} = \max|Q_y|$ для точек на нейтральной оси:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{ymax} \cdot S_x^*}{d J_x} \leq [\tau].$$

1.4.7. Сравнение весов балок различных сечений. Исходя из необходимого значения момента сопротивления W_x определяем размеры и площади сечений коробчатой, кольцевой, прямоугольной, квадратной и круглой форм. Поскольку вес балки пропорционален площади ее поперечного сечения, то отношение весов балок равно отношению площадей их сечений. Принимая площадь двутаврового профиля за условную единицу, оцениваем отношение весов балок различных сечений.

2. Пример расчета

2.1. Исходные данные

Схема балки приведена на рис.4.

- Величины действующих нагрузок:
 $P = 10 \text{ кН}$, $M = 20 \text{ кНм}$, $q = 10 \text{ кН/м}$.
- Длина $a = 1 \text{ м}$.
- Формы поперечных сечений приведены на рис.3.
- Материал балки сталь Ст.3.
- Величины допускаемых напряжений
 $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau] = 100 \text{ МПа}$.

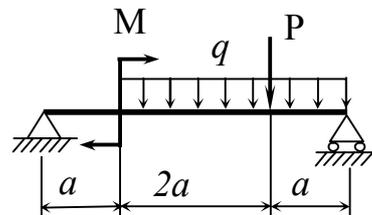


Рис. 4. Схема балки

2.2. Определение опорных реакций

Вместо опор, расположенных в т. A и D балки, вводим реакции опор. В шарнирно-неподвижной опоре A вводим две составляющие реакции R_A и H_A . В шарнирно-подвижной опоре D - одну вертикальную реакцию R_D .

Система сил, действующих на балку, представляет собой плоскую произвольную систему сил. Для такой системы сил можно составить три линейно-независимых уравнения равновесия. Введем систему координат yOz . Ось « z » вдоль оси балки, а ось « y » вертикально вверх. Составим уравнения равновесия.

$$\Sigma Z = 0 : H_A = 0.$$

$$\Sigma M_D = 0 : R_A \cdot 4a + M - 3qa \cdot \frac{3}{2}a - P \cdot a = 0,$$

$$\Sigma M_A = 0 : R_D \cdot 4a - P \cdot 3a - 3qa \left(\frac{3}{2}a + a \right) - M = 0.$$

Решая эти уравнения находим реакции опор:

$$R_A = \frac{-M + 4,5qa^2 - P \cdot a}{4a} = \frac{-20 + 45 + 10}{4 \cdot 1} = 8,75 \text{ кН}.$$

$$R_D = \frac{P \cdot 3a + 3qa \cdot 2,5a + M}{4a} = \frac{30 + 75 + 10}{4 \cdot 1} = 31,25 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность определения реакций. Для этого составим еще одно уравнение равновесия, а именно сумму проекций сил на вертикальную ось « y ».

$$\Sigma Y = 0 : R_A - 3qa - P + R_D = 0,$$

$$8,75 - 30 - 10 + 31,25 = 0,$$

$$40 - 40 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2.3. Составление выражений для поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x по участкам

Участок АВ $0 \leq z_1 \leq a = 1 \text{ м}$ (рассматривается часть балки слева от сечения)

$$Q_y(z) = R_A = 8,75 \text{ кН},$$

$$M_x(z) = R_A \cdot z_1 = 8,75 \cdot z_1 \text{ (кНм)}.$$

Q_y является величиной постоянной равной $8,75 \text{ кН}$ и не зависит от z_1 (эпюра-линия параллельная оси « z »).

M_x зависит от z_1 линейно (эпюра-наклонная прямая линия). Вычисляем M_x на границах участка:

$$M_x(0) = 0; \quad M_x(1 \text{ м}) = 8,75 \cdot 1 = 8,75 \text{ кНм}.$$

Участок BC $a = 1\text{ м} \leq z_2 \leq 3a = 3\text{ м}$ (рассматривается часть балки слева от сечения).

$$Q_y(z) = R_A - q(z_2 - a) = 8,75 - 10(z_2 - 1).$$

Q_y является линейной функцией z_2 (эпюра-наклонная прямая).

$$Q_y(1\text{ м}) = 8,75 - 10(1 - 1) = 8,75\text{ кН},$$

$$Q_y(3\text{ м}) = 8,75 - 10(3 - 1) = -11,25\text{ кН}.$$

Так как Q_y имеет разные знаки на границах участка, то обязательно будет точка с абсциссой z_0 , в которой $Q_y(z_0) = 0$. Найдем эту точку. Для этого приравняем выражение для $Q_y(z_0)$ нулю. $Q_y(z_0) = 8,75 - 10(z_0 - 1) = 0$. Решая это уравнение находим z_0 :

$$z_0 = \frac{8,75}{10} + 1 = 1,875\text{ м}.$$

$$M_x(z) = R_A \cdot z_2 + M - q(z_2 - a) \cdot \frac{z_2 - a}{2} = 8,75z_2 + 20 - 5(z_2 - 1)^2.$$

M_x является квадратичной функцией « z_2 » (эпюра-парабола).

$$M_x(1) = 8,75\text{ кНм}; \quad M_x(3) = 8,75 \cdot 3 + 20 - 5 \cdot 2^2 = 26,25\text{ кНм}.$$

Чтобы точно построить параболу необходимо вычислить значение M_x в третьей точке. В качестве такой точки необходимо взять значение $z_0 = 1,875\text{ м}$, т.к. в этой точке M_x будет иметь экстремум.

$$\begin{aligned} M_x(1,875\text{ м}) &= 8,75 \cdot 1,875 + 20 - 5 \cdot 0,875^2 = \\ &= 16,41 + 20 - 3,83 = 32,58\text{ кНм}. \end{aligned}$$

Участок CD $0 \leq z_3 \leq a = 1\text{ м}$ (рассматривается часть балки справа от сечения).

$$Q_y(z) = -R_D + qz_3 = -31,25 + 10z_3$$

Q_y является линейной функцией (эпюра-наклонная прямая).

$$Q_y(0) = -31,25\text{ кН}; \quad Q_y(1) = -21,25\text{ кН}.$$

$$M_x(z_3) = R_D \cdot z_3 - qz_3 \cdot \frac{z_3}{2} = 31,25 \cdot z_3 - 5z_3^2;$$

M_x является квадратичной функцией (эпюра-парабола).

$$M_x(0) = 0; \quad M_x(1) = 26,25\text{ кНм}.$$

На заданном участке параболу можно построить по двум точкам, т.к. она не будет иметь экстремума (Q_y на участке не проходит через значение ноль).

По полученным значениям строим эпюры Q_y и M_x для всей балки. Построенные эпюры необходимо проверить, используя правила контроля эпюр.

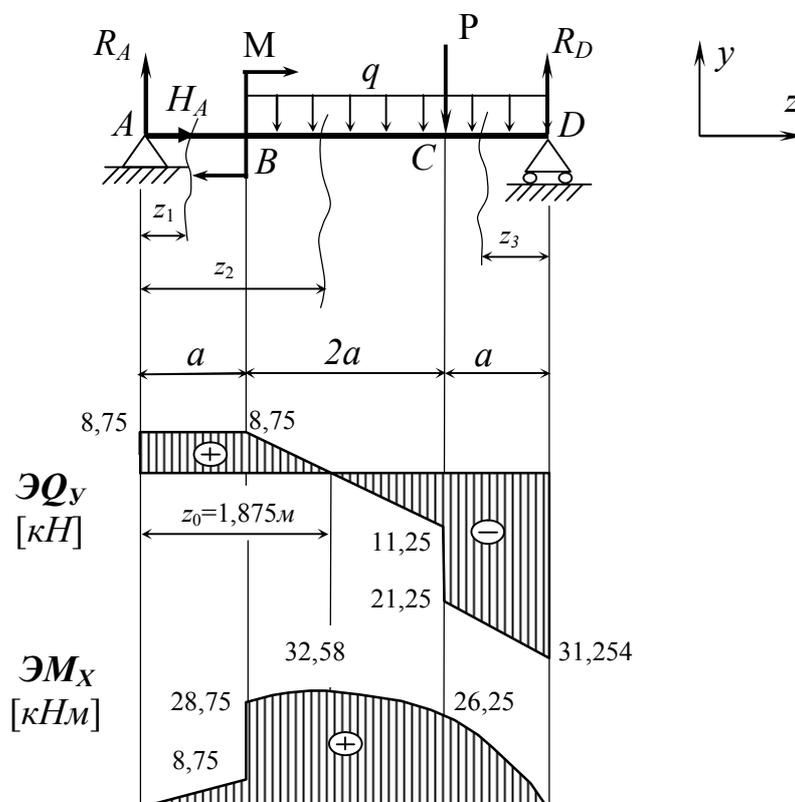


Рис. 5. Эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x

2.4. Подбор размеров поперечного сечения балки двутаврового сечения

По эпюре M_x находим значение изгибающего момента в опасном сечении:

$$M_{x\max} = \max|M_x| = 32,58 \text{ кНм}.$$

Из условия прочности при изгибе $\frac{M_{x\max}}{W_x} \leq [\sigma]$, находим необходимый момент сопротивления двутавра

$$W_x \geq \frac{M_{x\max}}{[\sigma]} = \frac{32,58 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 203,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 203,6 \text{ см}^3.$$

Из таблицы сортамента ГОСТ 8239-72 по величине W_x находим ближайший двутавр у которого $W_x^{\text{табл}} \approx W_x$. В нашем примере это двутавр №20^a $W_x^{\text{табл}} \approx 203,0 \text{ см}^3$.

Так как $W_x^{табл} < W_x$, то наибольшие напряжения σ_{max} будут больше $[\sigma]$. Таким образом двутавр будет перегружен. Допускаемая перегрузка $\Delta\sigma$ должна быть не больше 5%.

В нашем примере:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{xmax}}{W_x^{табл}} = \frac{32,58 \cdot 10^3}{203 \cdot 10^{-6}} = 160,5 \text{ МПа},$$

перегрузка составляет

$$\Delta\sigma = \frac{|\sigma_{max} - [\sigma]|}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{|160 - 160,5|}{160} \cdot 100\% = 0,31\% < 5\%,$$

что допустимо.

2.5. Проверка прочности по касательным напряжениям

Проверка прочности по касательным напряжениям проводится по формуле Журавского

$$\tau_{max} = \frac{Q_{ymax} \cdot S_x}{d \cdot J_x} \leq [\tau].$$

$$Q_{ymax} = \max|Q_y| = 31,25 \text{ кН}.$$

Для двутавра №20а:

$$S_x = 114 \text{ см}^3 = 114 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3,$$

$$d = 5,2 \text{ мм} = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$J_x = 2030 \text{ см}^4 = 2030 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$\tau_{max} = \frac{31,25 \cdot 10^3 \cdot 114 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 33,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 33,4 \text{ МПа}.$$

Так как $\tau_{max} = 33,4 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа}$, двутавр №20а удовлетворяет условию прочности по касательным напряжениям.

Ответ: двутавр №20а.

2.6.. Весовой анализ различных форм поперечных сечений

1) Двутавровое сечение (рис. 3а)

Для двутавра №20а по таблице сортамента находим $F_1 = 28,9 \text{ см}^2$. $W_{x1} = 203 \text{ см}^3$.

2) Коробчатое сечение (рис. 3б)

$$F_2 = b \cdot h - 0,8b \cdot 0,8h = b \cdot h(1 - 0,64) = 0,36bh = 0,72b^2,$$

$$W_{x2} = \frac{2}{h} \left[\frac{bh^3}{12} - \frac{0,8b(0,8h)^3}{12} \right] = \frac{h^3}{12} (1 - 0,8^4) = 0,394b^3,$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,394}} = \sqrt[3]{\frac{203,6}{0,394}} = \sqrt[3]{517,3} = 8,03 \text{ см},$$

$$F_2 = 0,72b^2 = 0,72 \cdot 8,03^2 = 46,4 \text{ см}^2.$$

3) Кольцевое сечение (рис. 3в)

$$\alpha = \frac{d}{D} = 0,6,$$

$$F_3 = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = \frac{3,14}{4} (1 - 0,6^2) D^2 = 0,5024 D^2,$$

$$W_{x_3} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) = \frac{3,14}{32} (1 - 0,6^4) D^3 = 0,0854 D^3,$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,0854}} = \sqrt[3]{\frac{203,6}{0,0854}} = \sqrt[3]{2383,9} = 13,36 \text{ см},$$

$$F_3 = 0,5024 \cdot 13,36^2 = 89,7 \text{ см}^2.$$

4) Прямоугольное сечение $h=2b$ (рис. 3г)

$$F_4 = bh = 2b^2,$$

$$W_{x_4} = \frac{bh^2}{6} = 0,67b^3,$$

$$b = \sqrt[3]{\frac{W_x}{0,67}} = \sqrt[3]{\frac{203,6}{0,67}} = \sqrt[3]{305,4} = 6,73 \text{ см},$$

$$F_4 = 2 \cdot 6,73^2 = 90,7 \text{ см}^2.$$

5) Квадратное сечение (рис. 3д)

$$F_5 = b^2,$$

$$W_{x_5} = \frac{b^3}{6},$$

$$b = \sqrt[3]{6W_x} = \sqrt[3]{6 \cdot 203,6} = \sqrt[3]{1221,6} = 10,7 \text{ см},$$

$$F_5 = 10,7^2 = 114,3 \text{ см}^2.$$

6) Круглое сечение (рис. 3е)

$$F_6 = \frac{\pi D^2}{4} = 0,785 D^2,$$

$$W_{x_6} = \frac{\pi D^3}{32},$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 203,6}{3,14}} = \sqrt[3]{2074,9} = 12,75 \text{ см},$$

$$F_6 = 0,785 \cdot 12,75^2 = 127,7 \text{ см}^2.$$

$$F_1 : F_2 : F_3 : F_4 : F_5 : F_6 = 1 : 1,61 : 3,10 : 3,33 : 3,95 : 4,42.$$

Таким образом двутавровое сечение при изгибе является самым экономичным.