

Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию
Казанский государственный технологический университет

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Методические указания
к самостоятельной работе студентов по темам:
сложное сопротивление, расчет рам,
устойчивость, динамика

Составители: проф. А.Х.Валиуллин,
доц. С.Г.Мухамбетжанов.

Сопротивление материалов. Сложное сопротивление, расчет рам, устойчивость, динамика: Метод. указания к по СРС /Казан. гос. технол. ун-т;
Сост.: А.Х.Валиуллин, С.Г.Мухамбетжанов. Казань, 2002, 40 с.

Содержатся задания на расчетно-проектировочные работы по второй части курса сопротивления материалов для студентов механических специальностей, даются примеры выполнения заданий.

Табл.5. Ил.30. Библ.: 4 назв.

Печатается по решению кафедры сопротивления материалов

Рецензенты: проф. В.А.Иванов,
доц. Е.М.Центовский

Задание 1

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

Содержание работы. В задание входит три задачи сложного сопротивления. В задаче косоугольного изгиба требуется при известных размерах балки, значениях нагрузок и допускаемого напряжения определить коэффициент запаса прочности. В задаче внецентренного сжатия при известных размерах поперечного сечения стержня и значениях допускаемых напряжений на растяжение и сжатие требуется определить величину нагрузки, которую можно приложить к этому стержню. В задаче на изгиб с кручением требуется определить диаметр вала из условия прочности по III теории при заданной схеме вала, передающего заданную мощность при известной скорости вращения.

Задача 1. КОСОЙ ИЗГИБ

Исходные данные. Схему балки и размеры поперечных сечений принять согласно шифру из рис.1 и табл.1. Для всех вариантов принять:

$$M = 5 \text{ кНм}, P = 4 \text{ кН}, q = 3 \text{ кН/м}.$$

Балки прямоугольного сечения - деревянные, $\sigma_{\text{с}} = 20 \text{ МПа}$, для балок из стального проката принять $\sigma_T = 240 \text{ МПа}$. В случае шарнирного опирания балки одну опору считать неподвижной, а другую - подвижной.

Т а б л и ц а 1

№ стр.	Сечение	b см	h см	l м	№ стр.	Сечение	b см	h см	l м
1	двутавр 16	-	-	1,2	6	прямоугол.	15	20	1,4
2	прямоугол.	12	18	1,0	7	двутавр 18	-	-	1,6
3	двутавр 14	-	-	0,9	8	прямоугол.	10	20	1,2
4	прямоугол.	10	15	0,8	9	двутавр 14	-	-	1,0
5	двутавр 12	-	-	0,8	0	прямоугол.	16	24	1,5

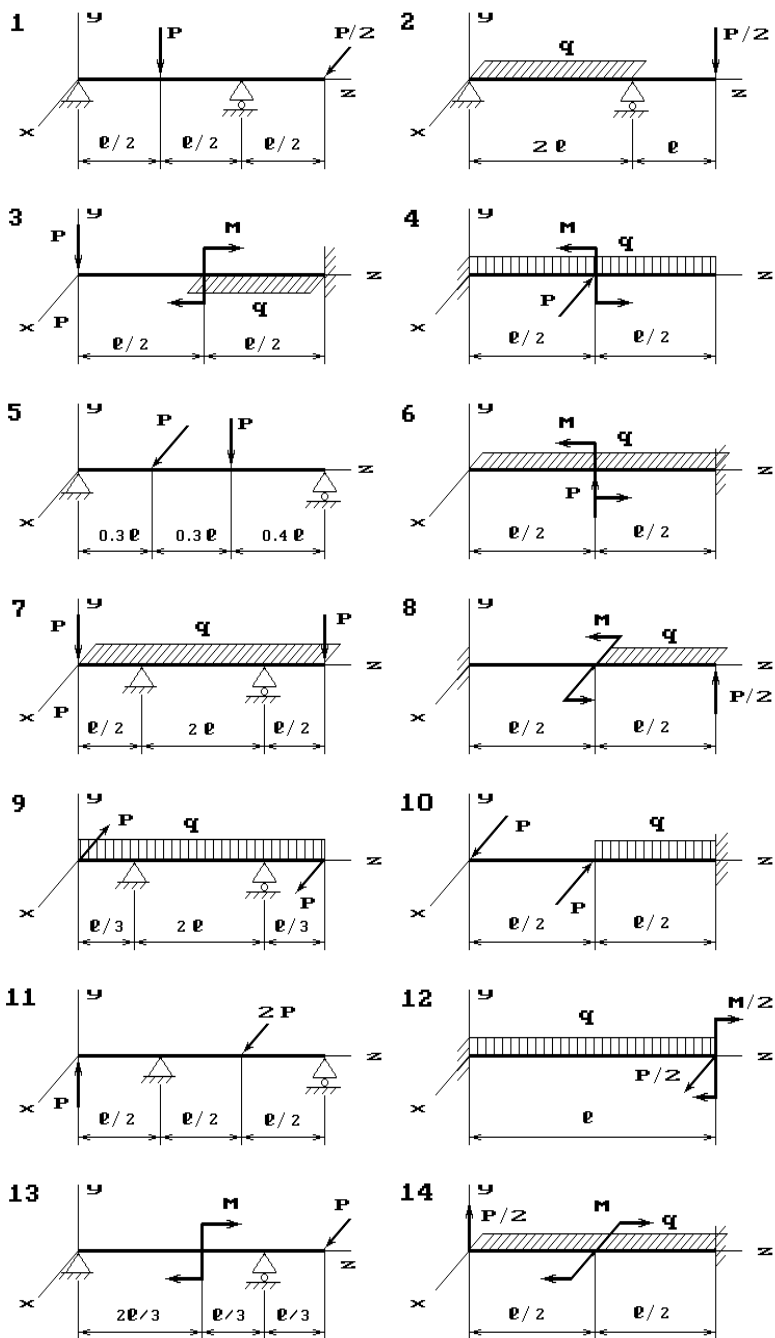


Рис. 1

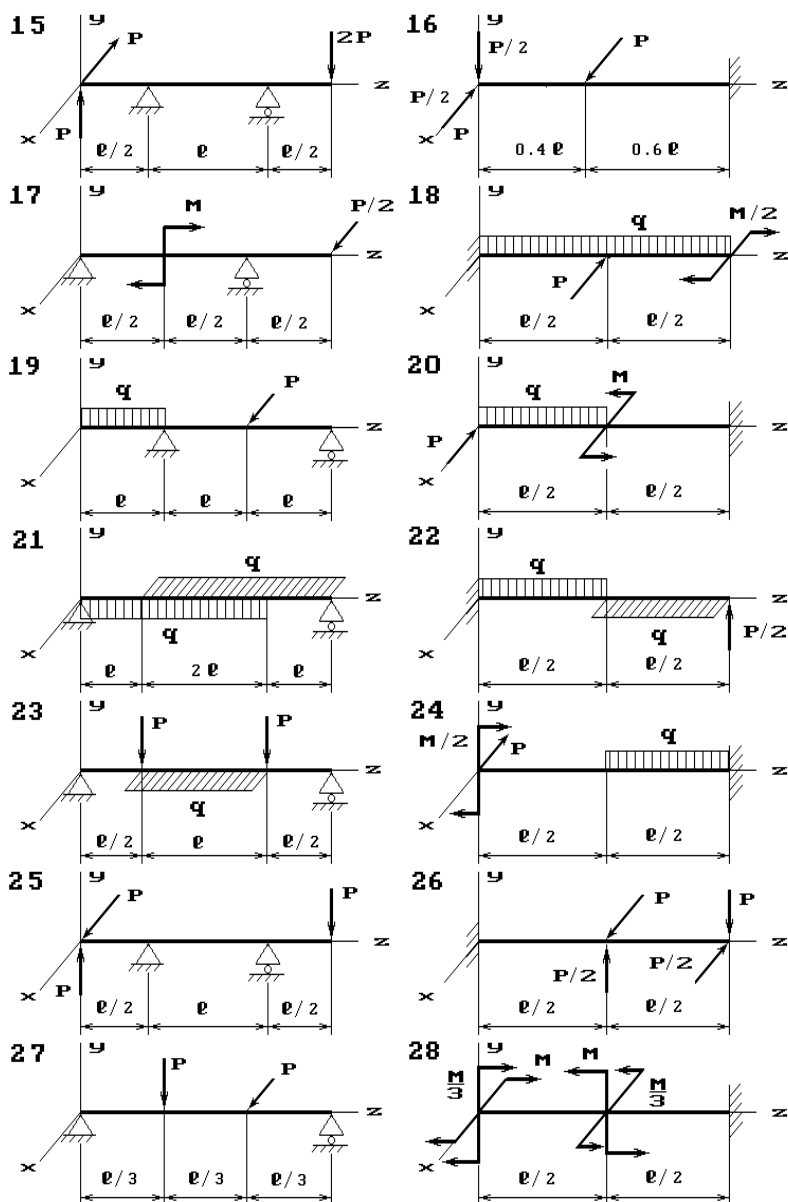


Рис. 1 (продолжение)

Порядок выполнения работы - пример расчета. Деревянная балка прямоугольного сечения (рис.2) нагружена в сечении A вертикальной силой $P = 14 \text{ кН}$ и в сечении B - горизонтальной силой $0,6P$, предел прочности материала 20 МПа , размеры сечения $b = 13 \text{ см}$, $h = 20 \text{ см}$, $l = 1,2 \text{ м}$. Определить коэффициент запаса.

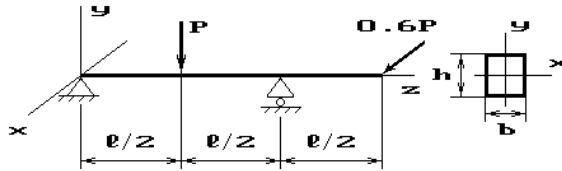


Рис.2

1. Определение опорных реакций и построение эпюр изгибающих моментов. При кромном изгибе реакции опор возникают в обеих главных плоскостях. Определив (при необходимости) реакции опор в вертикальной и горизонтальной плоскостях, строим эпюры изгибающих моментов M_x и M_y . Из эпюр определяем значение максимальных изгибающих моментов в вертикальной плоскости (в сечении A)

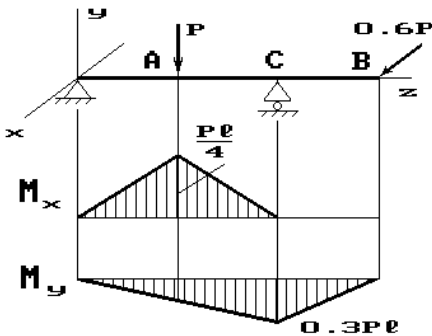


Рис. 3

$$M_{x \max} = \frac{Pl}{4} = 4,2 \text{ кНм},$$

в горизонтальной плоскости (в сечении C)

$$M_{y \max} = 0,3Pl = 5,04 \text{ кНм}.$$

2. Определение коэффициента запаса. Если оба максимальных момента возникают в одном и том же сечении, это сечение и будет опасным. В нашем случае, когда M_x и M_y возникают в различных сечениях, выполняем расчет для обоих этих сечений. В сечении A

$$M_x = 4,2 \text{ кНм}, \quad M_y = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot P \cdot l = \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 14 \cdot 1,2 = 2,52 \text{ кНм}$$

В одной из угловых точек возникает максимальное напряжение

$$\sigma_{\max}^A = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}$$

подставив значения моментов сопротивления

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{13 \cdot 20^2}{6} = 867 \text{ см}^3, \quad W_y = \frac{b^2h}{6} = \frac{13^2 \cdot 20}{6} = 563 \text{ см}^3$$

найдем

$$\sigma_{max}^A = \frac{4,2 \cdot 10^3}{867 \cdot 10^{-6}} + \frac{2,52 \cdot 10^3}{563 \cdot 10^{-6}} = (4,84 + 4,48) \cdot 10^6 \text{ Па} = 9,32 \text{ МПа}.$$

В сечении C

$$M_x = 0, M_y = 5,04 \text{ кНм},$$

$$\sigma_{max}^C = \frac{M_y}{W_y} = \frac{5,04 \cdot 10^3}{563 \cdot 10^{-6}} = 8,96 \cdot 10^6 \text{ Па} = 8,96 \text{ МПа}.$$

Как видно, более опасным является сечение A, для него и определяем коэффициент запаса

$$n = \frac{\sigma_B}{\sigma_{max}} = \frac{20}{9,32} = 2,15.$$

3. Построение эпюры нормальных напряжений в опасном сечении. Напряжения в произвольной точке сечения

$$\sigma^A = -\frac{M_x}{J_x} y - \frac{M_y}{J_y} x.$$

Найдем нейтральную ось сечения ($\sigma = 0$):

$$\frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x = 0,$$

подставим сюда значения изгибающих моментов M_x , M_y и моментов инерции

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = W_x y_{max} = W_x \frac{h}{2} = 863 \cdot 10 = 8630 \text{ см}^4,$$

$$J_y = \frac{b^3 h}{12} = W_y x_{max} = W_y \frac{b}{2} = 563 \cdot 6,5 = 3660 \text{ см}^4,$$

тогда получим

$$\frac{4,2 \cdot 10^3}{8630 \cdot 10^{-8}} y + \frac{2,52 \cdot 10^3}{3660 \cdot 10^{-8}} x = 0 \text{ или } y = -1,414x.$$

По этому уравнению построим нейтральную ось (рис.4). Найдем напряжения в угловых точках:

в точке 1(6,5;10)

$$\begin{aligned} \sigma_{(1)} &= -\frac{M_x}{J_x} y_1 - \frac{M_y}{J_y} x_1 = \\ &= -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = -4,84 - 4,48 = -9,32 \text{ МПа}, \end{aligned}$$

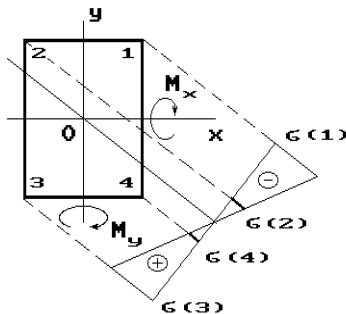


Рис. 4

в точке 3(-6,5;-10)

$$\sigma_{(3)} = -\frac{M_x}{J_x} y_3 - \frac{M_y}{J_y} x_3 = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = 4,84 + 4,48 = 9,32 \text{ МПа.}$$

Найдем для сравнения напряжения в остальных углах:

в точке 2(-6,5;10)

$$\sigma_{(2)} = -\frac{M_x}{J_x} y_2 - \frac{M_y}{J_y} x_2 = -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = -4,84 + 4,48 = -0,36 \text{ МПа,}$$

в точке 4(6,5;-10)

$$\sigma_{(4)} = -\frac{M_x}{J_x} y_4 - \frac{M_y}{J_y} x_4 = \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = 4,84 - 4,48 = 0,36 \text{ МПа.}$$

По полученным точкам (достаточно двух крайних) строим эпюру нормальных напряжений в сечении (рис. 4).

У к а з а н и е. Если коэффициент запаса получается в пределах 1,5 - 2,5, то расчет на этом заканчивается. В противном случае следует пропорционально изменить нагрузки, так чтобы обеспечивался запас прочности: для стали $n = 1,5$, а для дерева - $n = 2$.

Задача 2.

ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Исходные данные. Поперечное сечение, место приложения силы принять из рис.5, размеры сечения, допускаемое напряжение на растяжение $[\sigma]_p$ и на сжатие $[\sigma]_c$ - из табл.2 согласно шифру.

Т а б л и ц а 2

№ стр.	<i>a</i> <i>см</i>	$[\sigma]_p$ <i>МПа</i>	$[\sigma]_c$ <i>МПа</i>
1	2,0	22	120
2	2,5	23	130
3	3,0	24	140
4	2,5	25	150
5	3,0	26	160
6	2,0	27	70
7	3,0	28	80
8	2,5	29	90
9	3,0	30	100
10	2,0	21	60

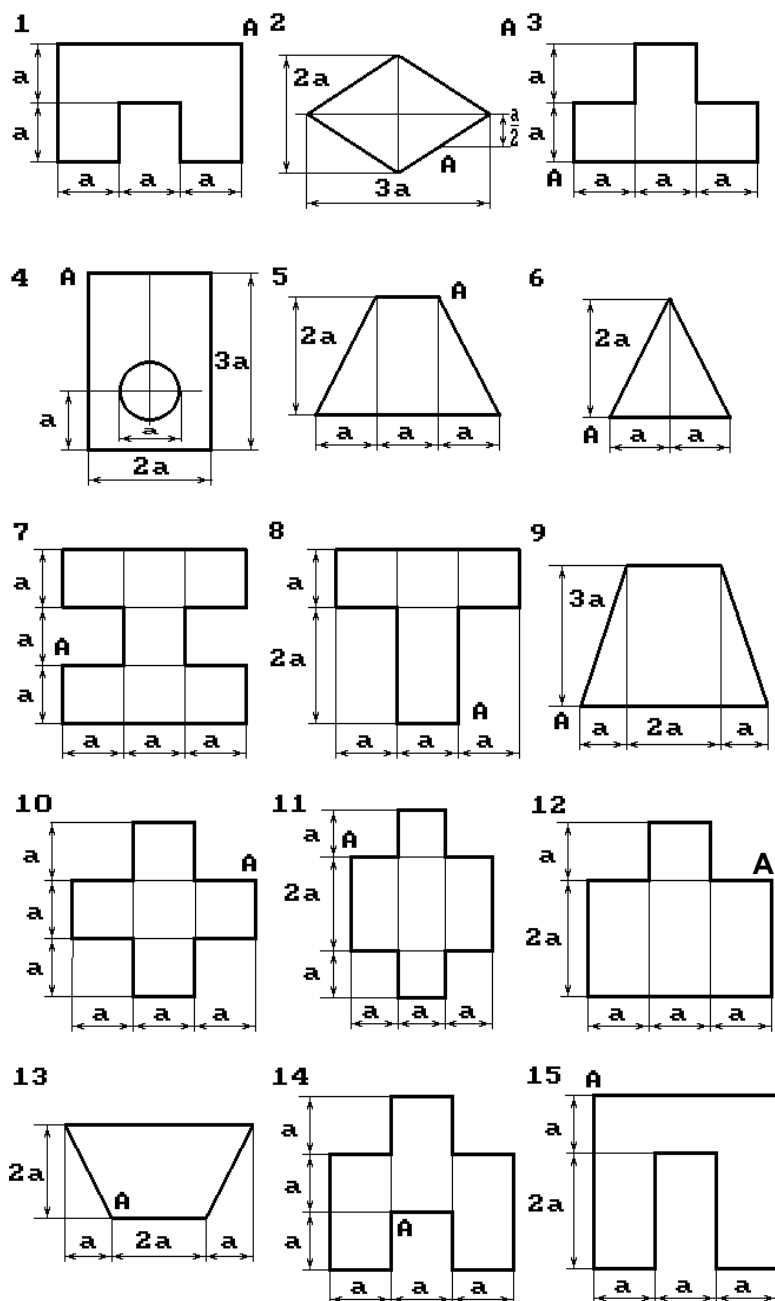


Рис.5

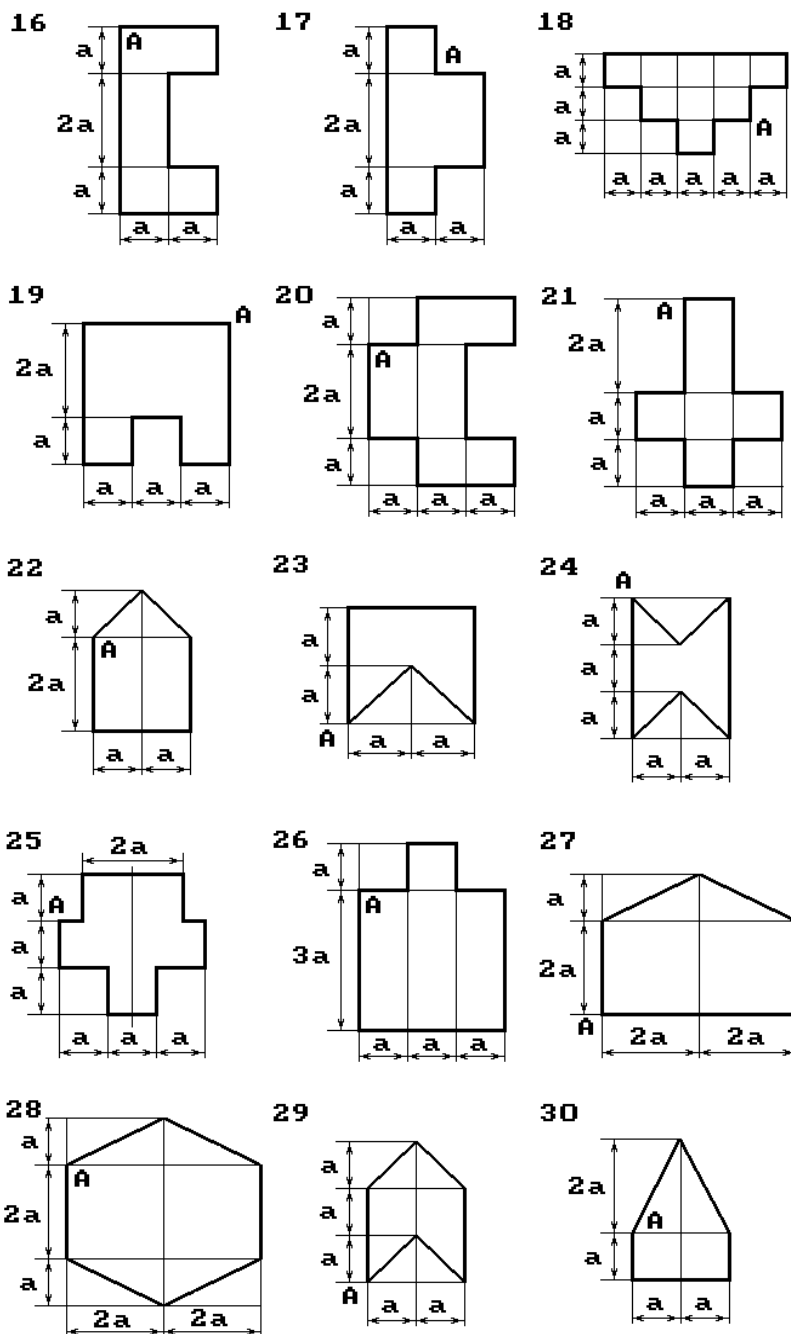


Рис.5 (продолжение)

Порядок выполнения работы - пример расчета. Короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис.6, сжимается силой P , приложенной в точке A . требуется определить допускаемую величину сжимающей силы, если $a = 2 \text{ см}$, $b = 3 \text{ см}$, $[\sigma]_p = 60 \text{ МПа}$, $[\sigma]_c = 120 \text{ МПа}$.

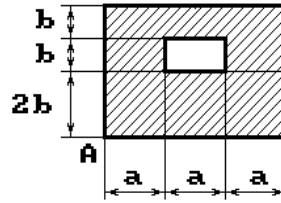


Рис. 6

1. Определение главных центральных осей и главных моментов инерции. В нашем случае одной из главных центральных осей является ось y как ось симметрии, а для определения положения оси x_c найдем ординату центра тяжести сечения в осях x и y ($x_c = 0$, рис.7):

$$y_c = \frac{F_1 \cdot 0 - F_2 \cdot \frac{b}{2}}{F_1 - F_2} = \frac{-a \cdot b \cdot \frac{b}{2}}{12 \cdot ab - a \cdot b} = -\frac{b}{22} = -0,09 \text{ см}.$$

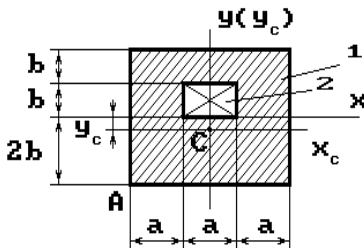


Рис.7

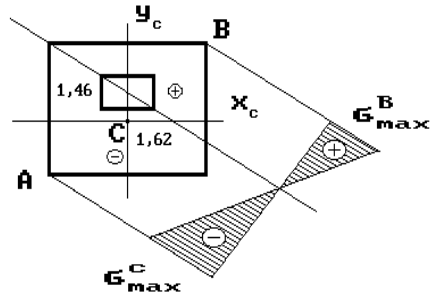


Рис.8

Главные моменты инерции сечения:

$$J_{x_c} = \frac{3a \cdot (4b)^3}{12} + 3a \cdot 4b \cdot y_c^2 - \left(\frac{ab^3}{12} - \left(\frac{b}{2} - y_c \right)^2 \cdot ab \right) =$$

$$= 15,69 \cdot a \cdot b^3 = 376,5 \text{ см}^4.$$

$$J_{y_c} = \frac{(3a)^2 \cdot 4b}{12} - \frac{a^3 \cdot b}{12} = 8,92a^3b = 481,5 \text{ см}^4.$$

Квадраты главных радиусов инерции:

$$i_x^2 = \frac{J_{x_c}}{F} = \frac{376,5}{66} = 5,7 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{J_{y_c}}{F} = \frac{481,5}{66} = 7,29 \text{ см}^2.$$

2. Определение положения нейтральной оси. Уравнение нейтральной оси записывается в виде

$$\frac{x_p x}{i_y^2} + \frac{y_p y}{i_x^2} + 1 = 0;$$

входящие в это уравнение координаты точки приложения силы $x_p = -4,5 \text{ см}$, $y_p = -(4 - 0,09) = -3,91 \text{ см}$. Подставив все числовые значения, получим уравнение нейтральной оси:

$$\frac{x}{1,62} + \frac{y}{1,45} = 1,$$

это прямая, отсекающая на осях и отрезки 1,62 и 1,46 см.

Построив нейтральную ось (рис.8), найдем в сечении точки, наиболее удаленные от нее. В сжатой зоне это точка $A(-4,5; -3,91)$, а в растянутой - точка $B(4,5; 4,09)$.

3. Определение допускаемой величины сжимающей силы. Величина допускаемой сжимающей силы определяется из условий прочности для двух точек сечения: наиболее растянутой (B) и наиболее сжатой (A):

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}^B &= -\frac{P}{F} - \frac{M_x}{J_x} y_B - \frac{M_y}{J_y} x_B = -\frac{P}{F} - \frac{P \cdot y_p \cdot y_B}{J_x} - \frac{P \cdot x_p \cdot x_B}{J_y} = \\ &= -\frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p \cdot y_B}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_B}{i_y^2} \right) \leq [\sigma]_p, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} P^{(B)} &\leq -\frac{[\sigma]_p F}{1 + \frac{y_p \cdot y_B}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_B}{i_y^2}} = \frac{60 \cdot 10^6 \cdot 66 \cdot 10^{-4}}{-1 + \frac{3,91 \cdot 4,09}{5,7} + \frac{4,5 \cdot 4,5}{7,29}} = \\ &= 86,4 \cdot 10^3 \text{ Н} = 86,4 \text{ кН} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\sigma_{\max}^A| &= \left| -\frac{P}{F} - \frac{M_x}{J_x} y_A - \frac{M_y}{J_y} x_A \right| = \left| \frac{P}{F} - \frac{P \cdot y_p \cdot y_A}{J_x} - \frac{P \cdot x_p \cdot x_A}{J_y} \right| = \\ &= \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p \cdot y_A}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_A}{i_y^2} \right) \leq [\sigma]_c, \end{aligned}$$

откуда

$$P^{(A)} \leq \frac{[\sigma]_c F}{1 + \frac{y_p \cdot y_A}{i_x^2} + \frac{x_p \cdot x_A}{i_y^2}} = \frac{120 \cdot 10^6 \cdot 66 \cdot 10^{-4}}{1 - \frac{3,91 \cdot 4,09}{5,7} - \frac{4,5 \cdot 4,5}{7,29}} = 120,3 \cdot 10^3 \text{ Н} = 120,3 \text{ кН}.$$

Из двух значений допускаемой силы выбираем меньшее:

$$[P] = 86,4 \text{ кН}.$$

Задача 3. ИЗГИБ С КРУЧЕНИЕМ

Содержание задания. Шкив диаметром D_1 (ветви ремня горизонтальны) совершает n оборотов в минуту и передает мощность N кВт. Два других шкива с вертикальными ремнями имеют одинаковый диаметр D_2 и передают мощность каждый по $N/2$. Из условия прочности по третьей теории определить диаметр вала d . Принять, что усилие в ведущей ветви ремня вдвое больше, чем в ведомой.

Исходные данные. Линейные размеры вала, диаметры шкивов, значения мощности, скорости вращения принять из рис.9 и табл.3 по шифру, допускаемое нормальное напряжение во всех вариантах $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

Т а б л и ц а 3

№ стр.	N кВт	n об/мин	a	b	c	D_1	D_2
			метры				
1	10	100	1,1	1,2	1,3	1,0	0,8
2	20	150	1,2	1,3	1,4	1,0	0,7
3	30	200	1,3	1,4	1,5	0,9	0,6
4	40	300	1,5	1,4	1,3	0,8	0,5
5	50	400	1,2	1,4	1,2	0,9	0,7
6	50	550	1,0	1,2	1,4	0,8	0,4
7	40	500	1,4	1,2	1,4	0,7	0,4
8	30	250	1,0	1,3	1,2	0,6	0,4
9	20	100	1,2	1,4	1,2	0,8	0,6
10	10	150	1,3	1,0	1,2	0,7	0,3

Порядок выполнения задания - пример расчета. При одновременном изгибе и кручении условие прочности вала круглого сечения записывается так:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \frac{M_{\text{экв}}^{\text{III}}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}}$ - эквивалентное напряжение по III теории прочности,

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} - \text{осевой момент сопротивления сечения вала,}$$

$M_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{и}}^2 + M_{\text{к}}^2}$ - эквивалентный момент; входящий в эту формулу изгибающий момент $M_{\text{и}}$, в свою очередь, определяется как сумма изгибающих моментов в вертикальной и горизонтальной плоскостях:

$$M_{\text{и}} = \sqrt{M_{\text{в}}^2 + M_{\text{г}}^2}$$

Величина эквивалентного момента принимается для опасного сечения, которое находится из эпюр крутящего и изгибающих моментов.

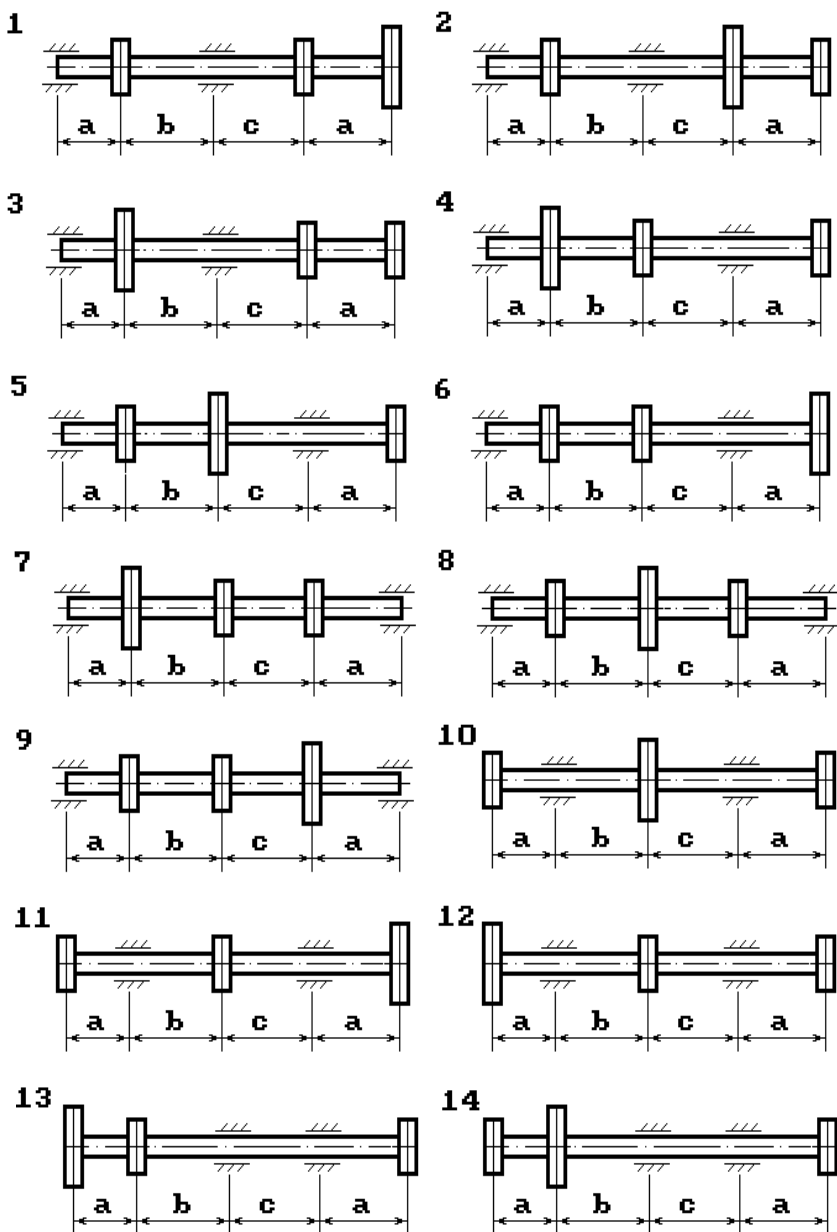


Рис. 9

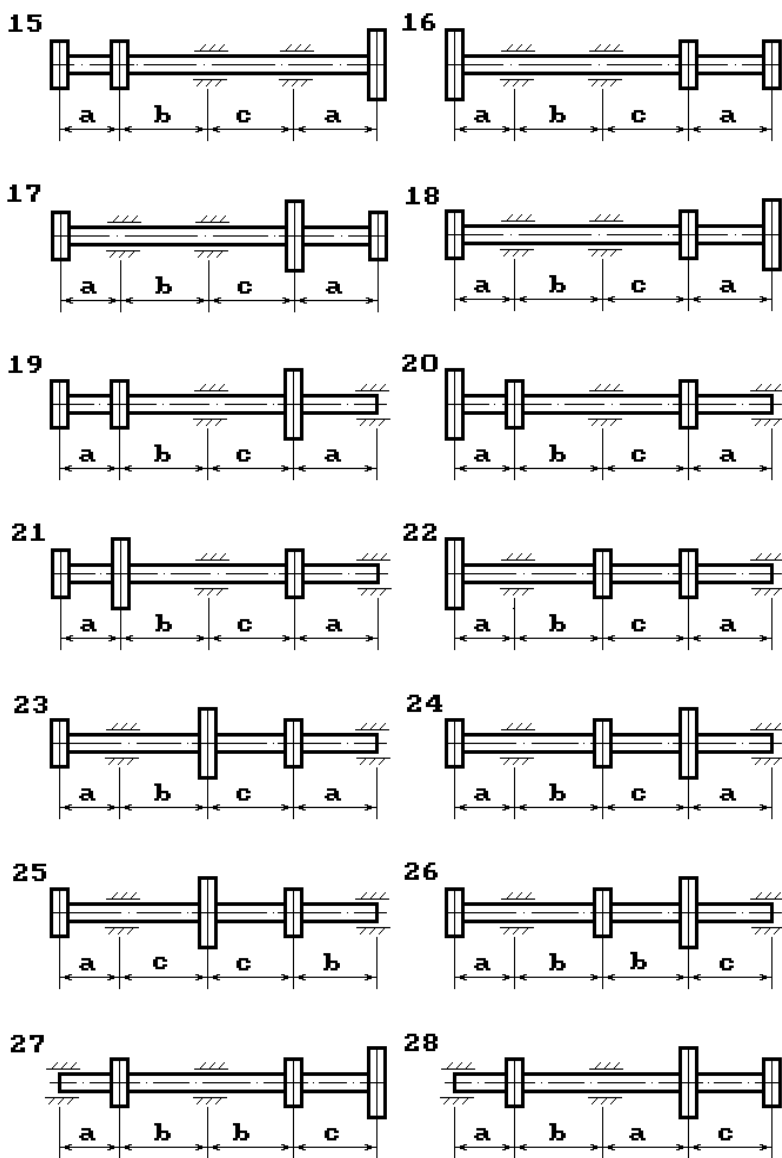


Рис. 9 (продолжение)

Диаметр вала определяется по формуле

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 M_{\text{ЭКВ}}^{\text{III}}}{\pi [\sigma]}}$$

Порядок расчета рассмотрим на следующем примере. Исходные данные (рис.10), $N = 50 \text{ кВт}$, $n = 200 \text{ об/мин}$, $a = 1 \text{ м}$, $b = 1,5 \text{ м}$, $c = 1,2 \text{ м}$, $D_1 = 1,5$

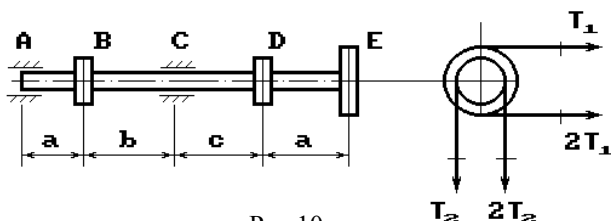


Рис.10

m , $D_2 = 1,2 \text{ м}$, $[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

1. Построение эпюры крутящего момента.

Внешние моменты, передаваемые на вал, определяются по формулам

$$M_1 = \frac{N}{\omega}, M_2 = \frac{N/2}{\omega},$$

где

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} = \frac{200\pi}{30} = 21 \text{ с}^{-1}.$$

Подставив численные значения, найдем

$$M_1 = \frac{50}{21} = 2,38 \text{ кНм},$$

$$M_2 = \frac{25}{21} = 1,19 \text{ кНм}.$$

Вал испытывает кручение на участках между шкивами.

На участке BD

$$M_{k1} = M_2 = 1,19 \text{ кНм}.$$

На участке DE

$$M_{k2} = M_2 + M_1 = 2,38 \text{ кНм}.$$

По найденным значениям строим эпюру крутящего момента (рис.11a).

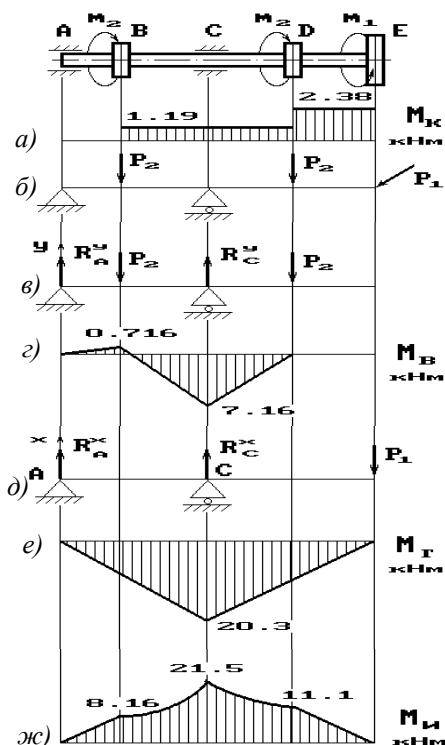


Рис. 11

2. Построение эпюр изгибающего момента.

Вначале определяются силы, действующие на вал. Окружные силы

$$T_1 = \frac{2M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 2,38}{1,5} = 3,08 \text{ кН},$$

$$T_2 = \frac{2M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 1,19}{1,2} = 1,99 \text{ кН}.$$

Так как усилие в ведущей ветви ремня в два раза больше, чем в ведомой, от первого шкива на вал передается сила

$$P_1 = 3T_1 = 3 \cdot 3,08 = 9,24 \text{ кН},$$

а от вторых шкивов - силы

$$P_2 = 3T_2 = 3 \cdot 1,99 = 5,97 \text{ кН}.$$

Сила P_1 горизонтальна, а силы P_2 вертикальны, покажем их на рисунке (б). Рассматривая вертикальные силы (в), построим эпюру изгибающего момента в вертикальной плоскости M_B . Определим вначале опорные реакции:

$$\Sigma M_C = 0; R_A^y(a+b) - P_2b + P_2c = 0.$$

$$R_A^y = \frac{P_2(b-c)}{a+b} = \frac{5,97(1,5-1,2)}{1+1,5} = 0,716 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_A = 0; -R_A^y(a+b) + P_2a + P_2(a+b+c) = 0.$$

$$R_A^y = \frac{P_2(2a+b+c)}{a+b} = \frac{5,97(2 \cdot 1 + 1,5 + 1,2)}{1+1,5} = 11,23 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= R_A^y + R_C^y - 2P_2 = \\ &= 0,716 + 11,23 - 2 \cdot 5,97 = 11,936 - 11,94 \approx 0. \end{aligned}$$

Эпюра M_B состоит из трех прямолинейных участков, найдем ее характерные точки. В сечениях A и D $M_B = 0$, в сечении C

$$M_B^{(C)} = -P_2c = -5,97 \cdot 1,2 = -7,16 \text{ кНм}$$

По этим значениям строим эпюру M_B (рис.11з).

Рассматривая горизонтальные силы (д), построим эпюру изгибающего момента в горизонтальной плоскости (е). Здесь также надо вначале определить опорные реакции в горизонтальной плоскости (R_A^x и R_C^x). Правда, в данном примере эпюру изгибающего момента M_T можно построить и без определения реакций. Эпюра M_T состоит из двух прямолинейных участков AC и CE . В сечениях A и E изгибающий момент равен нулю, а в сечении C он имеет максимальное значение (знак не играет роли):

$$M_r^{(C)} = P_2(c+a) = 9,24(1,2+1) = 20,3 \text{ кНм}.$$

Геометрически складывая значения изгибающего момента в вертикальной и горизонтальной плоскостях для характерных сечений вала, находим значения суммарного изгибающего момента (предварительно найдя значения M_B и M_C для всех сечений B, C, D).

$$M_H^{(A)} = 0;$$

$$M_B^{(B)} = 0,716 \text{ кНм}, \quad M_r^{(B)} = \frac{20,3}{2,5} = 8,12 \text{ кНм},$$

$$M_H^{(B)} = \sqrt{0,716^2 + 8,12^2} = 8,16 \text{ кНм};$$

$$M_H^{(C)} = \sqrt{7,16^2 + 20,3^2} = 21,5 \text{ кНм};$$

$$M_B^{(D)} = 0, \quad M_H^{(D)} = M_r^{(D)} = \frac{20,3 \cdot 1,2}{2,2} = 11,1 \text{ кНм};$$

$$M_H^{(E)} = 0.$$

По найденным значениям строим эпюру M_H (рис. 11ж).

3. Определение эквивалентного момента.

Как видно из эпюр крутящего момента и суммарного изгибающего момента M_H , опасным является сечение C , в котором

$$M_K = 1,19 \text{ кНм}, \quad M_H = 21,5 \text{ кНм}.$$

Эквивалентный момент

$$M_{\text{экв}}^{III} = \sqrt{M_H^2 + M_K^2} = \sqrt{21,5^2 + 1,19^2} = 21,6 \text{ кНм}$$

(Для сравнения в сечении D $M_{\text{экв}}^{III} = \sqrt{11,1^2 + 2,38^2} = 11,4 \text{ кНм}$.)

4. Определение диаметра вала. Диаметр вала найдем по формуле

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 21,6 \cdot 10^3}{\pi 100 \cdot 10^6}} = 10^{-2} \sqrt{2200} = 13,02 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 13,02 \text{ см}.$$

Округляем полученное значение и принимаем окончательно $d = 130 \text{ мм}$.

У к а з а н и е: диаметр вала вычислить в миллиметрах и округлить до числа, кратного пяти.

Задание 2

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ

Исходные данные. Схема рамы и нагрузки (рис.12), значения нагрузок и размеры (табл.4), поперечное сечение состоит из двух швеллеров, материал - Ст. 3, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

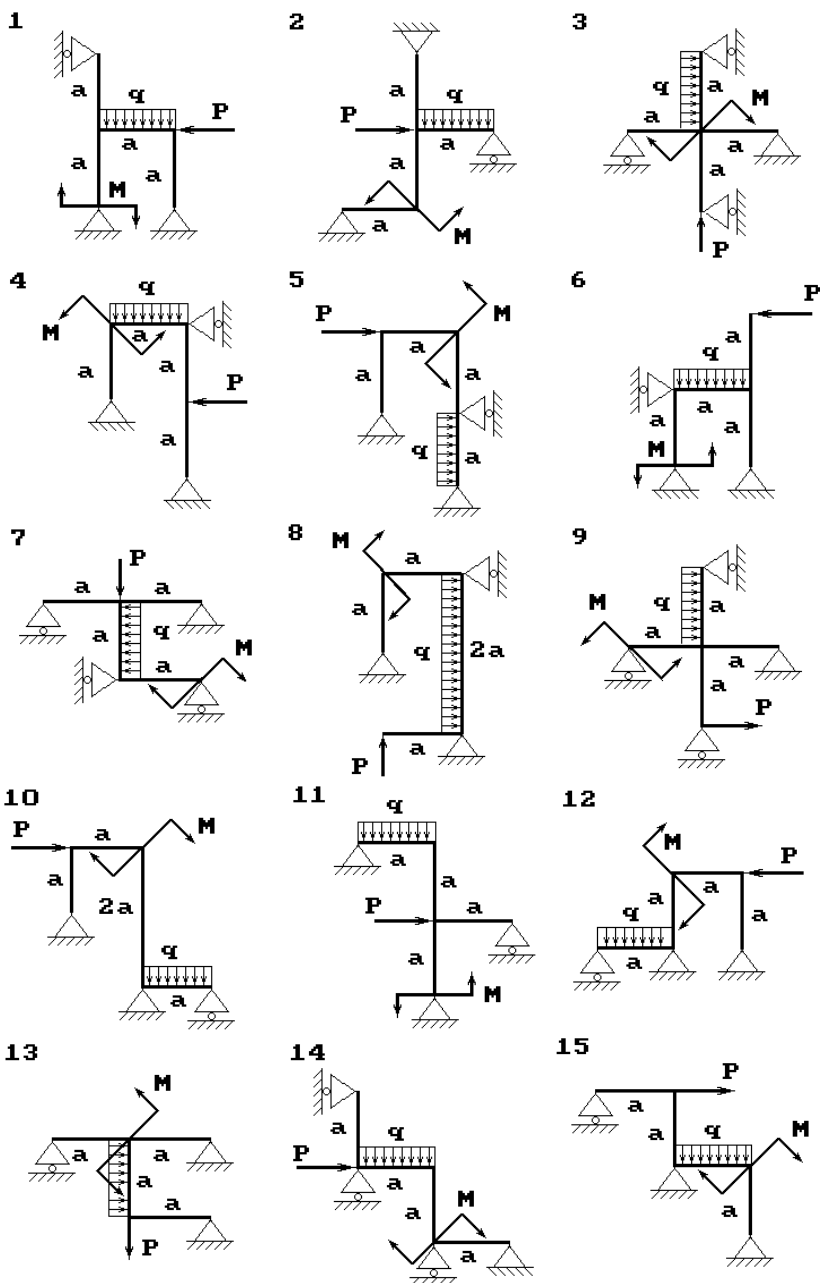


Рис. 12

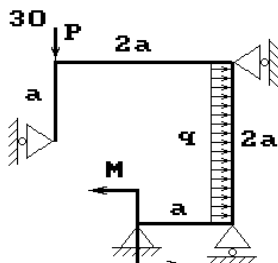
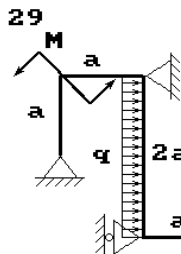
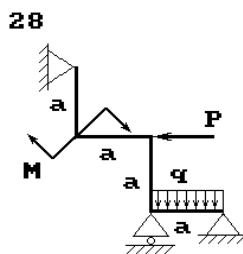
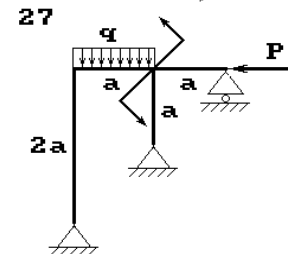
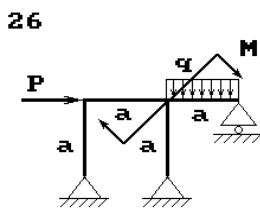
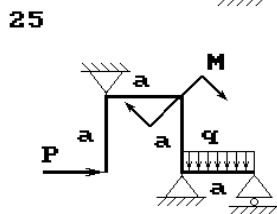
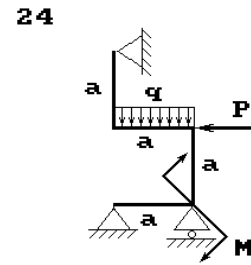
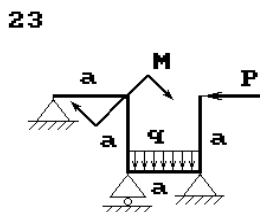
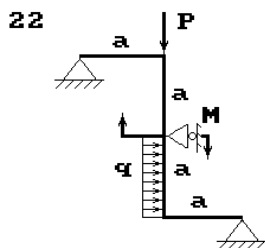
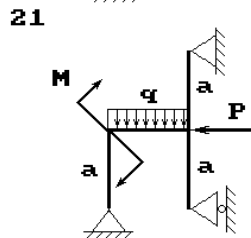
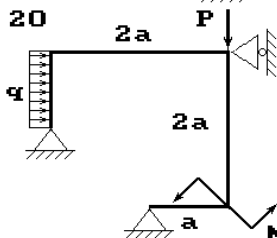
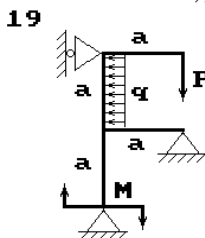
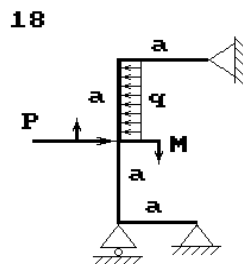
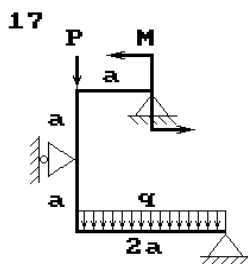
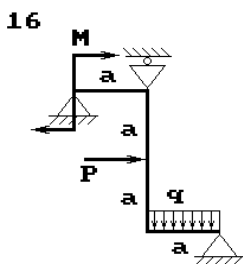


Рис. 12 (продолжение)

Содержание задания:

1. Раскрыть статическую неопределимость и выполнить деформационную проверку.
2. Построить эпюры N , Q , M и подобрать сечение рамы.
3. Найти перемещение данного сечения в указанном направлении.

Т а б л и ц а 4

№ стр.	P кН	q кН/м	M кНм	a	№ стр.	P кН	q кН/м	M кНм	a
1	20	10	20	1,0	6	45	20	20	2,0
2	25	12	30	1,5	7	50	12	30	1,0
3	30	14	40	2,0	8	20	14	40	1,5
4	35	16	50	1,0	9	30	16	50	2,0
5	40	18	60	1,5	10	40	18	60	1,0

Порядок выполнения работы - пример расчета. Выполнить расчет статически неопределимой рамы, схема которой показана на рис.13 при следующих исходных данных:

$M = 30 \text{ кНм}$, $P = 20 \text{ кН}$, $q = 10 \text{ кН/м}$,
 $a = 2 \text{ м}$, $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$,

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $EJ = \text{const}$.

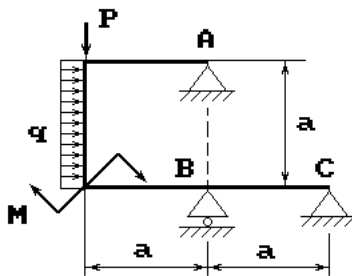


Рис. 13

Раскрытие статической неопределимости

Задача решается методом сил в следующем порядке.

1. Находим степень статической неопределимости s :

$$s = n - 3,$$

где n - число неизвестных опорных реакций; 3 - число уравнений статики, которые можно составить для плоской системы сил, в нашем случае $n = 5$,

$$s = 5 - 3 = 2.$$

2. Выбираем основную систему - статически определимую систему, получаемую из заданной статически неопределимой системы путем отбрасывания "лишних" связей. Отбросим опору A и получим основную систему, которая показана на рис.14. Вариантов отбрасывания двух связей может быть много, поэтому основную систему следует выбирать так, чтобы коэффициенты уравнений определялись наиболее просто. Кроме того, основная система должна быть геометрически неизменяемой. Например, нельзя отбрасывать опору C , так как при этом система превращается в механизм.

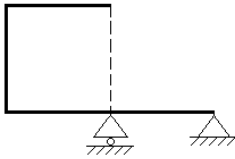


Рис.14

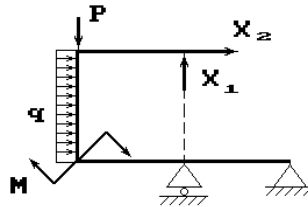


Рис.15

3. К основной системе прикладываем неизвестные реакции отброшенных связей X_1 и X_2 , а также заданные нагрузки M, P, q , в результате чего получается эквивалентная система (рис.15).

4. Составляем канонические уравнения - условия равенства нулю перемещений в направлениях отброшенных связей. Число уравнений равно степени статической неопределимости:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_1 = 0,$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_2 = 0.$$

С целью определения коэффициентов δ_{ik} и грузовых членов Δ_i способом Верещагина строим по отдельности эпюры изгибающего момента для основной системы от приложенных к ней единичных сил $X_1=1$, $X_2=1$ и заданных нагрузок M, P, q (рис.16).

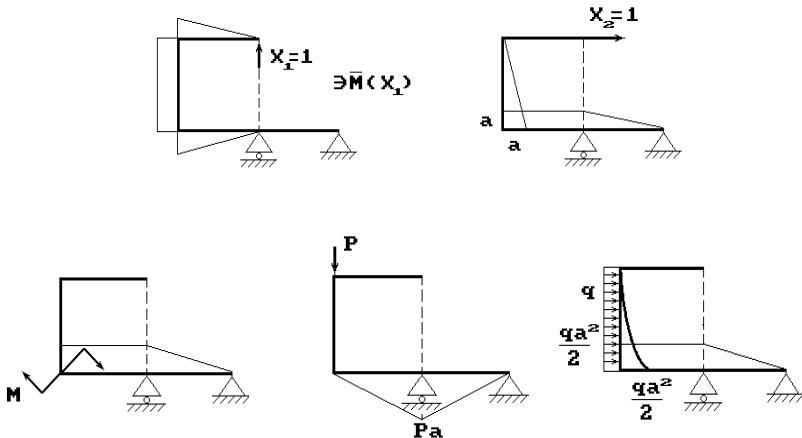


Рис.16

Далее определяем коэффициенты канонических уравнений:

$$EJ\delta_{11} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a + a \cdot a \cdot a = \frac{5}{3}a^3 = \frac{40}{3} M^3,$$

$$EJ\delta_{22} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a + a \cdot a \cdot a = \frac{5}{3}a^3 = \frac{40}{3} \text{ м}^3,$$

$$EJ\delta_{12} = EJ\delta_{21} = -a \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a - \frac{1}{2}a \cdot a \cdot a = -a^3 = -8 \text{ м}^3;$$

$$\Delta_1 = \Delta_{1M} + \Delta_{1P} + \Delta_{1q};$$

$$EJ\Delta_{1M} = -M \cdot a \cdot \frac{1}{2} \cdot a = -\frac{Ma^2}{2} = -60 \text{ кНм}^3,$$

$$EJ\Delta_{1P} = \frac{1}{2} \cdot P \cdot a \cdot a \cdot \frac{1}{3} \cdot a = \frac{Pa^3}{6} = \frac{80}{3} \text{ кНм}^3,$$

$$EJ\Delta_{1q} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} a \cdot a - \frac{qa^2}{2} a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{5}{12}qa^4 = -\frac{200}{3} \text{ кНм}^3,$$

$$EJ\Delta_1 = -60 + \frac{80}{3} - \frac{200}{3} = -100 \text{ кНм}^3;$$

$$\Delta_2 = \Delta_{2M} + \Delta_{2P} + \Delta_{2q};$$

$$EJ\Delta_{2M} = M \cdot a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot M \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a = \frac{4Ma^2}{3} = 160 \text{ кНм}^3,$$

$$EJ\Delta_{2P} = -\frac{1}{2} \cdot P \cdot a \cdot a \cdot a - \frac{1}{2} \cdot P \cdot a \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot a = -\frac{5Pa^3}{6} = -\frac{400}{3} \text{ кНм}^3,$$

$$EJ\Delta_{2q} = \frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{2} a \cdot \frac{4}{3} \cdot a + \frac{qa^2}{2} a \cdot a + \frac{1}{2} \cdot \frac{qa^2}{2} a \cdot \frac{2}{3} \cdot a = \frac{19}{24}qa^4 = \frac{380}{3} \text{ кНм}^3,$$

$$EJ\Delta_2 = 160 - \frac{400}{3} + \frac{380}{3} = \frac{460}{3} \text{ кНм}^3;$$

5. Решаем систему канонических уравнений и определяем неизвестные X_1 и X_2 :

$$\frac{40}{3} \cdot X_1 - 8 \cdot X_2 - 100 = 0,$$

$$-8 \cdot X_1 + \frac{40}{3} \cdot X_2 + \frac{460}{3} = 0.$$

$$\text{Решение этой системы } X_1 = \frac{15}{16} = 0,9375 \text{ кН}, \quad X_2 = -\frac{175}{16} = -10,94 \text{ кН}.$$

6. Выполняем деформационную проверку правильности раскрытия статической неопределимости. Сущность ее состоит в том, что при правильном решении перемещение в направлении любой наложенной на систему связи равно нулю. Канонические уравнения выражают условия равенства нулю перемещений в точке A . Проверим, что горизонтальное перемещение точки C равно нулю.

Для этого возьмем новую основную систему, при этом эпюра изгибающего момента от единичной силы, приложенной в направлении искомого перемещения, не должна совпадать (и не быть подобной) ни с одной из единичных эпюр, использованных при раскрытии неопределенности.

Возьмем следующую основную систему (рис.17а) и, приложив к ней в точке C горизонтальную единичную силу, построим эпюру изгибающего момента (рис.17б). Далее умножим окончательную эпюру изгибающего момента на эту единичную эпюру. Однако окончательную эпюру изгибающего момента строить пока не будем (ведь проверка еще не выполнена!, а перемножение произведем по частям: на единичную эпюру (рис.17б) поочередно умножим эпюры от M , от P , от q , от D_1 и X_2 . Суммируя результаты этих перемножений, получим тот же итог, что и при умножении окончательной эпюры M на единичную. Итак, определим горизонтальное перемещение точки C :

$$\begin{aligned}
 EJ\Delta_{\text{гор}}^C = & -Ma \cdot \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} \cdot Ma \cdot \frac{2}{3}a + \frac{1}{2} \cdot Pa \cdot 2a \cdot a - \frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{2}a \cdot \frac{7}{4}a - \\
 & - \frac{qa^2}{2}a \cdot \frac{3}{2}a - \frac{1}{2} \cdot \frac{qa^2}{2}a \cdot \frac{2}{3}a + X_1 \left(\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{2}{3}a + a^2 \cdot \frac{3}{2}a + \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{5}{6}2a \right) + \\
 & + X_2 \left(-\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{5}{3}a - a^2 \cdot \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{2}{3}a \right).
 \end{aligned}$$

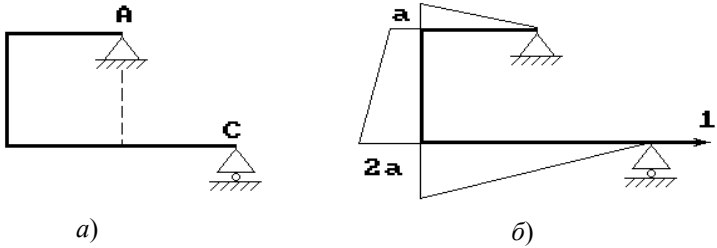


Рис. 17

В скобках при X_1 и X_2 произведено перемножение соответствующих единичных эпюр (от $X_1=1$, и $X_2=1$) на единичную эпюру, показанную на рис.17б. Подставляя числовые значения, получим

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\text{гор}}^C = & \frac{1}{EJ} \left(-\frac{11}{6} Ma^2 + Pa^3 - \frac{29}{24} qa^4 + \frac{8}{3} X_1 a^3 - \frac{8}{3} X_2 a^3 \right) = \\
 = & \frac{1}{EJ} \left(-220 + 160 - \frac{580}{3} + \frac{60}{3} + \frac{700}{3} \right) = 0.
 \end{aligned}$$

что подтверждает правильность решения.

