

Министерство образования Российской Федерации
Казанский государственный технологический университет

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ:
растяжение – сжатие, геометрические
характеристики плоских сечений, изгиб**

Методические указания
к самостоятельной работе студентов

Казань 2004

Составители: проф. А.Х. Валиуллин,
доц. С.Г. Мухамбетжанов

Сопротивление материалов: растяжение – сжатие, геометрические характеристики плоских сечений, изгиб. Методические указания к самостоятельной работе студентов. /Казан. гос. технол. ун-т; Сост. А.Х. Валиуллин, С.Г. Мухамбетжанов, Казань, 2004, 35стр.

Содержатся задания на расчетно-проектировочные работы по первой части дисциплины «Сопротивление материалов» для студентов механических специальностей, даются примеры выполнения заданий.

Подготовлено на кафедре теоретической механики и сопротивления материалов.

Печатается по решению методической комиссии по циклу общепрофессиональных дисциплин.

Рецензенты: проф. В.А. Иванов,
доц. Е.М. Центовский

Общие правила оформления расчетно-проектировочных работ

Задание выполняется в соответствии с шифром, который указывает преподаватель. Выполненное задание оформляется в тетради в клетку (как правило, для выполнения трех заданий первой части достаточно одной тетради в 12 листов). На титульном листе должно быть указано (сверху вниз):

Казанский государственный технологический университет
Кафедра теоретической механики и сопротивления материалов

Расчетно-проектировочные работы

Выполнил студент гр.№ ... Фамилия, имя, отчество

Шифр №

Проверил преподаватель Фамилия, имя, отчество

Дата

Оформление задания надо начинать с полного текста условия, включая схему, числовые данные. На чертеже системы не должно быть никаких дополнительных построений, связанных с решением задачи.

Дальнейшее оформление ведется в соответствии с планом решения конкретной задачи. Чертежи целесообразно выполнять карандашом невысокой твердости, а записи вести чернилами или пастой аккуратно, четко, без помарок и исправлений. Все выкладки должны представлять собой стройную логическую цепочку и сопровождаться кратким пояснительным текстом. При расположении материала надо следить за тем, чтобы все эпюры помещались на одной странице со схемой элемента, к которому они относятся.

При переходе от формул к вычислению следует сначала подставить в формулу все числовые значения в Международной системе единиц (СИ), не производя даже элементарных выкладок, и только после этого упростить (если нужно) полученное выражение и вычислить результат. Все расчеты - подстановку числовых значений и вычисление результатов - надо вести с точностью до трех значащих цифр.

При построении графиков и эпюр, поясняющих решение или иллюстрирующих результаты расчета, студент должен умело выбрать масштабы, с тем чтобы обеспечить наглядность результатов.

Любой расчет теряет смысл, если в нем допускаются ошибки в выкладках или вычислениях. Пренебрежение "арифметикой" со стороны инженера недопустимо.

Конкретная реализация этих требований показана в приведенных в данном руководстве примерах выполнения заданий.

Задание 1

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Содержание задания: для заданной схемы статически неопределимой стержневой системы:

- 1) из расчета по допускаемым напряжениям найти площади сечений стержней;
- 2) из расчета по предельному состоянию найти безопасную допускаемую нагрузку для системы с площадями сечений, найденными в п.1;
- 3) сравнить результаты расчетов по допускаемым напряжениям и предельному состоянию.

Исходные данные. Схемы стержневых систем показаны на рис.1, материалы стержней, соотношения площадей их поперечных сечений, а также значения нагрузок приведены в табл.1.

Общие для всех вариантов данные:

- коэффициент запаса при расчете как по допускаемым напряжениям, так и по предельному состоянию $n = 1,5$;

– пределы текучести: для стали 240 МПа, для медного сплава 120 МПа, для алюминиевого сплава 160 МПа (считаются одинаковыми при растяжении и сжатии);

– модули упругости: для стали $2 \cdot 10^5$ МПа, для медного сплава $1 \cdot 10^5$ МПа, для алюминиевого сплава $0,7 \cdot 10^5$ МПа.

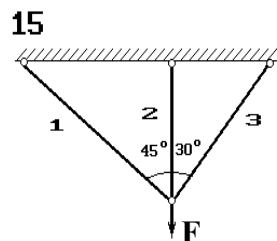
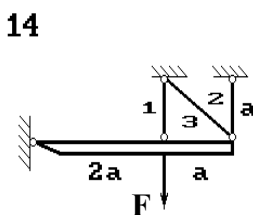
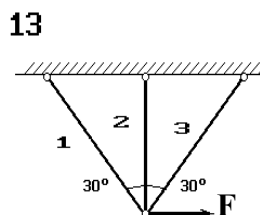
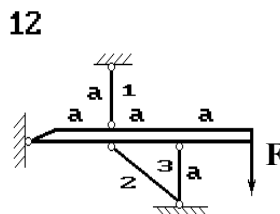
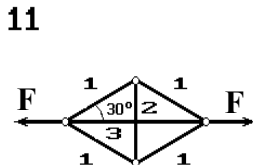
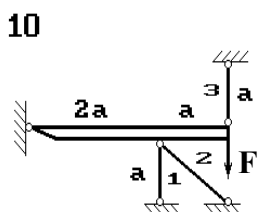
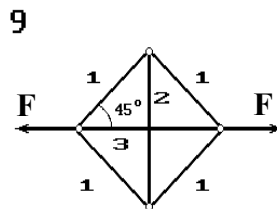
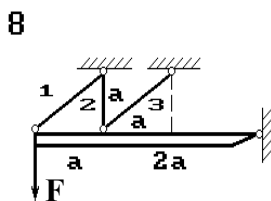
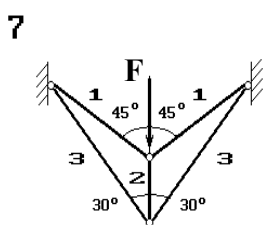
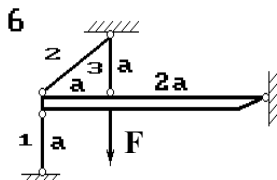
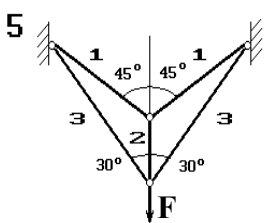
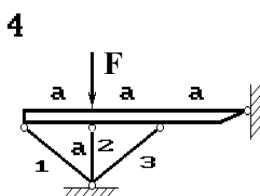
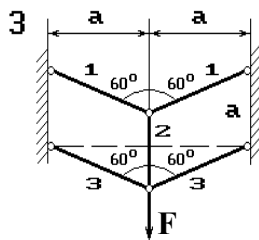
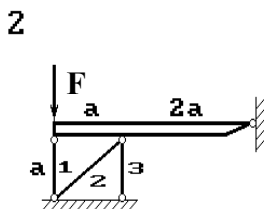
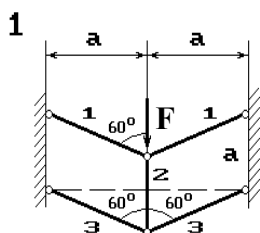
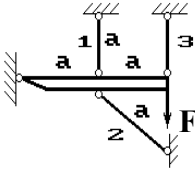
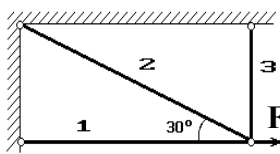


Рис. 1

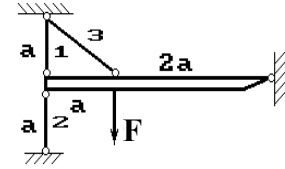
16



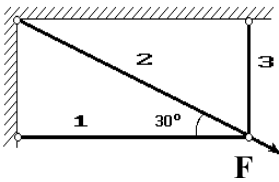
17



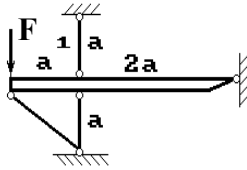
18



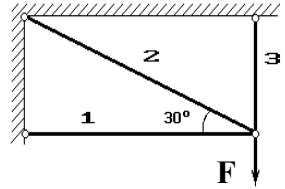
19



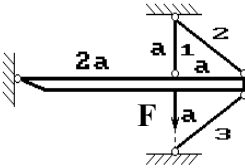
20



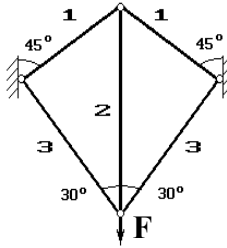
21



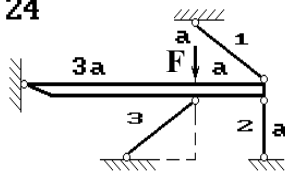
22



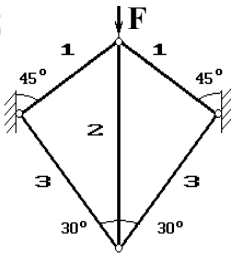
23



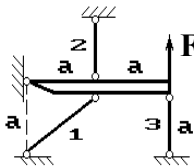
24



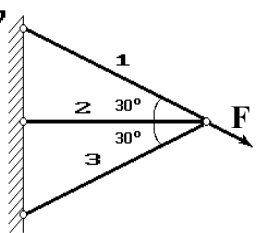
25



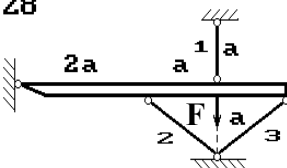
26



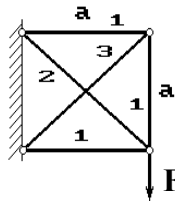
27



28



29



30

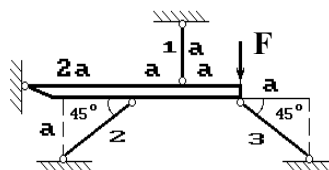


Рис. 1 (продолжение)

Т а б л и ц а 1

Материал	Марка	E , МПа	σ_T , МПа
Сталь	Ст.3	$2 \cdot 10^5$	240
Алюминиевый сплав	Д 1	$0,7 \cdot 10^5$	200
Медь прутковая		$1 \cdot 10^5$	120

Т а б л и ц а 2

№	Материал стержня			F кН	Соотношение площадей сечений стержней $A_1:A_2:A_3$
	1	2	3		
1	сталь	алюм.	медь	30	1 : 2 : 3
2	алюм.	медь	сталь	40	1 : 3 : 2
3	медь	сталь	алюм.	50	1 : 1 : 2
4	сталь	алюм.	медь	60	1 : 3 : 1
5	алюм.	медь	сталь	70	1 : 2 : 2
6	медь	сталь	алюм.	80	1 : 2 : 1
7	сталь	медь	алюм.	70	2 : 1 : 1
8	медь	алюм.	сталь	60	2 : 1 : 2
9	алюм.	сталь	медь	50	1 : 1 : 2
0	сталь	медь	алюм.	40	2 : 2 : 1

Сущность работы. Расчетно-проектировочная работа состоит из двух частей.

В первой части выполняется проектировочный расчет стержневой системы по допускаемым напряжениям при заданной нагрузке. Требу-

ется определить площади сечений стержней так, чтобы выполнялись заданные соотношения между ними и условия прочности для каждого из стержней:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \leq [\sigma]_i,$$

где N_i - нормальная сила в i -ом стержне, A_i - площадь сечения i -го стержня, $[\sigma]_i = \frac{\sigma_{Ti}}{n}$ - допускаемое напряжение для i -го стержня, здесь σ_{Ti} - предел текучести материала i -го стержня, n - коэффициент запаса прочности (по текучести).

Решение задачи начинается с определения усилий в стержнях. Задача является статически неопределимой, поэтому для определения нормальных сил, наряду с уравнениями статики, требуется рассмотреть еще условия совместности деформаций стержней с привлечением закона Гука, т.е. рассмотреть последовательно статическую, геометрическую и физическую стороны задачи. В результате решения полученной системы уравнений определяются усилия N_i в стержнях. Далее из условия прочности i -го стержня находится площадь сечения A_i , а по заданному соотношению $A_1 : A_2 : A_3$ - и значения сечений остальных стержней. Из рассмотрения трех вариантов площадей сечений окончательно принимается тот, в котором площади являются наибольшими.

Вторая часть расчета состоит в определении предельной нагрузки, при которой в результате возникновения пластических деформаций в стержнях (во всех трех или только каких-нибудь двух) система превращается в механизм. Условием исчерпания несущей способности каждого стержня является достижение напряжениями величины предела текучести, поэтому предельное усилие в стержне

$$N_{инр.} = \sigma_{Ti} A_i.$$

Определив из условий исчерпания несущей способности предельную силу $F_{np.}$, затем находят безопасную нагрузку, разделив предельную силу на коэффициент запаса:

$$[F_{np.}] = \frac{F_{np.}}{n}.$$

В заключение сравнивают эту безопасную нагрузку с заданной силой F , тем самым определяя выигрыш в случае расчета по предель-

ному состоянию по сравнению с расчетом по допускаемым напряжениям:

$$k = \frac{[F_{np.}] }{F}.$$

Порядок выполнения работы - пример расчета

Исходные данные. Схема стержневой системы приведена на рис.2. Материалы стержней: 1 - сталь, 2 - алюминий, 3 - медь; $\sigma_{T1} = 240$ МПа, $\sigma_{T2} = 160$ МПа, $\sigma_{T3} = 120$ МПа, $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 0,7 \cdot 10^5$ МПа, $E_3 = 1 \cdot 10^5$ МПа, $l_1 = l_2 = l_3$, $A_1 : A_2 : A_3 = 1:1:2$; $F = 60$ кН.

1. Расчет по допускаемым напряжениям

1.1. Допускаемые напряжения:

$$[\sigma]_1 = \frac{\sigma_{T1}}{n} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}$$

$$[\sigma]_2 = \frac{\sigma_{T2}}{n} = \frac{160}{1,5} = 107 \text{ МПа}$$

$$[\sigma]_3 = \frac{\sigma_{T3}}{n} = \frac{120}{1,5} = 80 \text{ МПа}$$

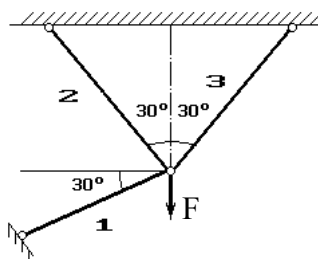


Рис.2

1.2. Определение усилий в стержнях

а) Статическая сторона задачи (рис.3). Применяя метод сечений, получим следующие уравнения равновесия (предполагаем, что первый стержень сжимается, а второй и третий растягиваются):

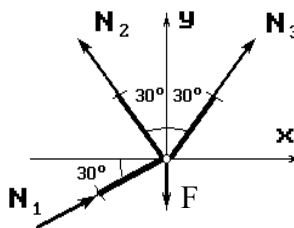


Рис.3

$$\sum X = 0; N_1 \cos 30^\circ - N_2 \sin 30^\circ + N_3 \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum Y = 0; N_1 \sin 30^\circ - N_2 \cos 30^\circ + N_3 \cos 30^\circ - F = 0$$

После некоторых преобразований приходим к двум уравнениям с тремя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{3}N_1 - N_2 + N_3 &= 0, \\ N_1 + \sqrt{3}N_2 + \sqrt{3}N_3 &= 2F. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Задача один раз статически неопределима.

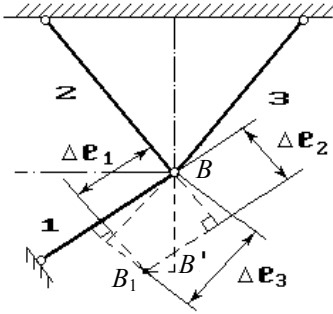


Рис.4

б) Геометрическая сторона задачи (рис.4). Покажем деформированное состояние системы. Пусть шарнир B перемещается в положение B_1 . Здесь важно, чтобы показанное на рисунке деформированное состояние стержней соответствовало их напряженному состоянию, т.е. растянутый стержень нужно изобразить удлиненным, а сжатый - укороченным. Представим перемещение BB_1 как сумму горизонтального

$\delta_{\Gamma} = B_1 B$ и вертикального $\delta_B = BB'$ смещений. Тогда (рис.4) можно получить следующие выражения для удлинений стержней:

$$\Delta l_1 = \delta_B \sin 30^\circ + \delta_{\Gamma} \cos 30^\circ,$$

$$\Delta l_2 = \delta_B \cos 30^\circ - \delta_{\Gamma} \sin 30^\circ,$$

$$\Delta l_3 = \delta_B \cos 30^\circ + \delta_{\Gamma} \sin 30^\circ,$$

Исключая из этих уравнений δ_{Γ} и δ_B , получим уравнение, которое связывает удлинения стержней:

$$\Delta l_1 = 1,155 \Delta l_3 - 0,577 \Delta l_2. \quad (2)$$

в) Физическая сторона задачи. Она выражается законом Гука:

$$\left. \begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} \\ \Delta l_2 &= \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} \\ \Delta l_3 &= \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решая полученную систему уравнений (1)-(3), можно найти усилия в стержнях. Подставляя выражения удлинений Δl_1 (3) в уравне-

ние совместности деформаций (2), получим (учтем, что $A_2 = A_1$, $A_3 = 2A_1$, $l_1 = l_2 = l_3$):

$$N_1 = 1,155N_3 - 1,648N_2.$$

Присоединяя последнее уравнение к системе (1), получим следующую систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} 1,73N_1 - N_2 + N_3 &= 0, \\ N_1 + 1,73N_2 + 1,73N_3 &= 2F, \\ N_1 + 1,648N_2 - 1,155N_3 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая систему (методом Крамера, Гаусса или просто путем последовательного исключения неизвестных), найдем силы в стержнях:

$N_1 = -5,2$ кН, знак минус показывает, что стержень не сжат, как мы предполагали, а растянут; $N_2 = 31,7$ кН; $N_3 = 40,6$ кН.

1.3. Определение площадей сечений стержней

Из условия прочности первого стержня

$$\sigma_1 = \frac{|N_1|}{A_1} \leq [\sigma]_1$$

найдем сечение стержня:

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma]_1} = \frac{5,2 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,325 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 0,325 \text{ см}^2,$$

тогда $A_2 = A_1 = 0,325 \text{ см}^2$, $A_3 = 2A_1 = 2 \cdot 0,325 = 0,65 \text{ см}^2$.

Из условия прочности второго стержня

$$\sigma_2 = \frac{|N_2|}{A_2} \leq [\sigma]_2$$

найдем сечение второго стержня:

$$A_2 \geq \frac{|N_2|}{[\sigma]_2} = \frac{31,7 \cdot 10^3}{107 \cdot 10^6} = 2,96 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,96 \text{ см}^2,$$

тогда $A_1 = A_2 = 2,96 \text{ см}^2$, $A_3 = 2A_1 = 2 \cdot 2,96 = 5,92 \text{ см}^2$.

Из условия прочности третьего стержня:

$$\sigma_3 = \frac{|N_3|}{A_3} \leq [\sigma]_3$$

найдем сечение третьего стержня:

$$A_3 \geq \frac{|N_3|}{[\sigma]_3} = \frac{40,6 \cdot 10^3}{80 \cdot 10^6} = 5,075 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 5,08 \text{ см}^2,$$

тогда

$$A_1 = A_2 = \frac{A_3}{2} = \frac{5,08}{2} = 2,54 \text{ см}^2.$$

Сравнивая все три варианта, выбираем тот из них, в котором сечения стержней наибольшие:

$$A_1 = 2,96 \text{ см}^2, \quad A_2 = 2,96 \text{ см}^2, \quad A_3 = 5,92 \text{ см}^2.$$

2. Расчет по предельному состоянию

Определим предельную силу F_{np} , приложение которой к системе превращает систему в механизм. Для превращения данной системы в механизм достаточно того, чтобы достигли предельного состояния ("потекли") какие-нибудь два стержня (в системах с жесткой балкой - все три стержня). Полное число вариантов исчерпания несущей способности в нашем случае равно трем: "потекут" стержни 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3. Число анализируемых вариантов можно уменьшить, если начать с варианта, включающего наиболее нагруженные стержни.

Начнем с варианта, когда "потекут" наиболее нагруженный стержень 2 и несколько менее нагруженный стержень 3. При исчерпании несущей способности системы должны выполняться следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} N_2 &= N_{2np.} = \sigma_{T2} \cdot A_2, \\ N_3 &= N_{3np.} = \sigma_{T3} \cdot A_3. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

$$N_1 < N_{1np.} = \sigma_{T1} \cdot A_1. \quad (б)$$

Подставим значения $N_{2np.}$ и $N_{3np.}$ из (а) в уравнения (1) вместо N_2 и N_3 , при этом учтем, что усилие в стержне 1 оказалось противоположным тому, что мы предположили, поэтому в уравнениях (1) знаки перед N_1 поменяем на противоположные:

$$1,73N_1 - N_{2np.} + N_{3np.} = 0,$$

$$-N_1 + 1,73N_{2np.} + 1,73N_{3np.} = 2F_{np.}.$$

Исключая отсюда N_1 , найдем $F_{np.}$:

$$\begin{aligned} F_{np.} &= \frac{2N_{3np.} + 4N_{2np.}}{3,46} = \frac{2(\sigma_{T3}A_3 + 2\sigma_{T2}A_2)}{3,46} = \\ &= \frac{2(120 \cdot 10^6 \cdot 5,92 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 160 \cdot 10^6 \cdot 2,96 \cdot 10^{-4})}{3,46} = \\ &= 95,8 \cdot 10^3 \text{ Н} = 95,8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверим выполнение условия (б). Из первого уравнения (1)

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{N_{3np.} + N_{2np.}}{1,73} = \frac{\sigma_{T3}A_3 + \sigma_{T2}A_2}{1,73} = \\ &= \frac{120 \cdot 10^6 \cdot 5,92 \cdot 10^{-4} + 160 \cdot 10^6 \cdot 2,96 \cdot 10^{-4}}{1,73} = 13,6 \text{ кН}. \end{aligned}$$

а $N_{1np.} = \sigma_{T1} \cdot A_1 = 160 \cdot 10^6 \cdot 2,96 \cdot 10^{-4} = 47,4 \text{ кН},$

т.е. действительно $N_1 < N_{1np.}$, первый стержень "не течет", "потекут" 2 и 3.

Разделив $F_{np.}$ на коэффициент запаса, получим безопасную силу из расчета по предельному состоянию

$$[F_{np.}] = \frac{F_{np.}}{n} = \frac{95,8}{1,5} = 63,9 \text{ кН}.$$

3. Сравнение результатов двух расчетов

Найдем отношение двух допускаемых нагрузок: одна получена из расчета по предельному состоянию, это $[F_{np.}]$, другая - из расчета по допускаемым напряжениям, это заданная сила P :

$$k = \frac{[F_{np.}]}{P} = \frac{63,9}{60} = 1,055.$$

Задание 2

РАСЧЕТ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКОГО СОСТАВНОГО СЕЧЕНИЯ

Содержание задания: для заданного сечения, состоящего из трех простейших фигур: прямоугольника, уголка и швеллера или двутавра, определить положение главных центральных осей и величины главных моментов инерции.

Исходные данные. Схемы составных сечений приведены на рис.6, а размеры прямоугольника и номера стандартных профилей - в табл.3.

Пример расчета.

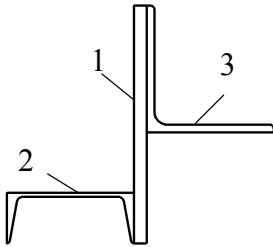


Рис.5

Исходные данные: поперечное сечение (рис.5) состоит из прямоугольника 1, швеллера 2 и равнобокого уголка 3.

1. Геометрические характеристики простейших фигур.

Выпишем и подсчитаем геометрические характеристики каждого элемента сечения отдельно. Заданные сечения вычерчиваются в масштабе 1:2.

Т а б л и ц а 3

№	Прямоуголь- ник		№ двутавра ГОСТ 8239- 72	№ швеллера ГОСТ 8240- 72	№ уголка ГОСТ 8509-57 ГОСТ 8510-57
	b , мм	h , мм			
1	16	300	18	16	16(10)
2	18	310	18a	16a	16(12)
3	16	320	20	18	16(14)
4	16	330	20a	18a	16(16)
5	18	340	22	20	16(20)
6	18	350	22a	20a	16/10(10)
7	18	300	24	22	16/10(14)
8	16	310	24a	22a	16(16)

9	18	300	27	24	18(12)
0	18	320	27a	24a	20(16)

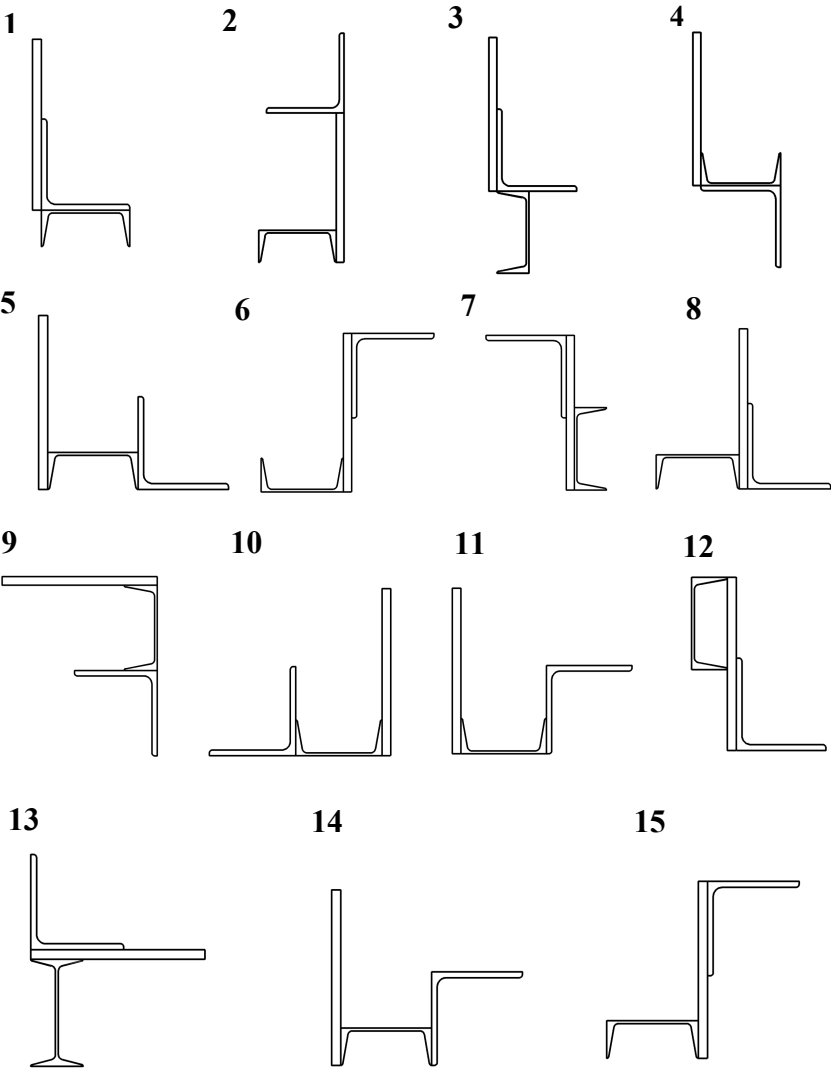


Рис.6

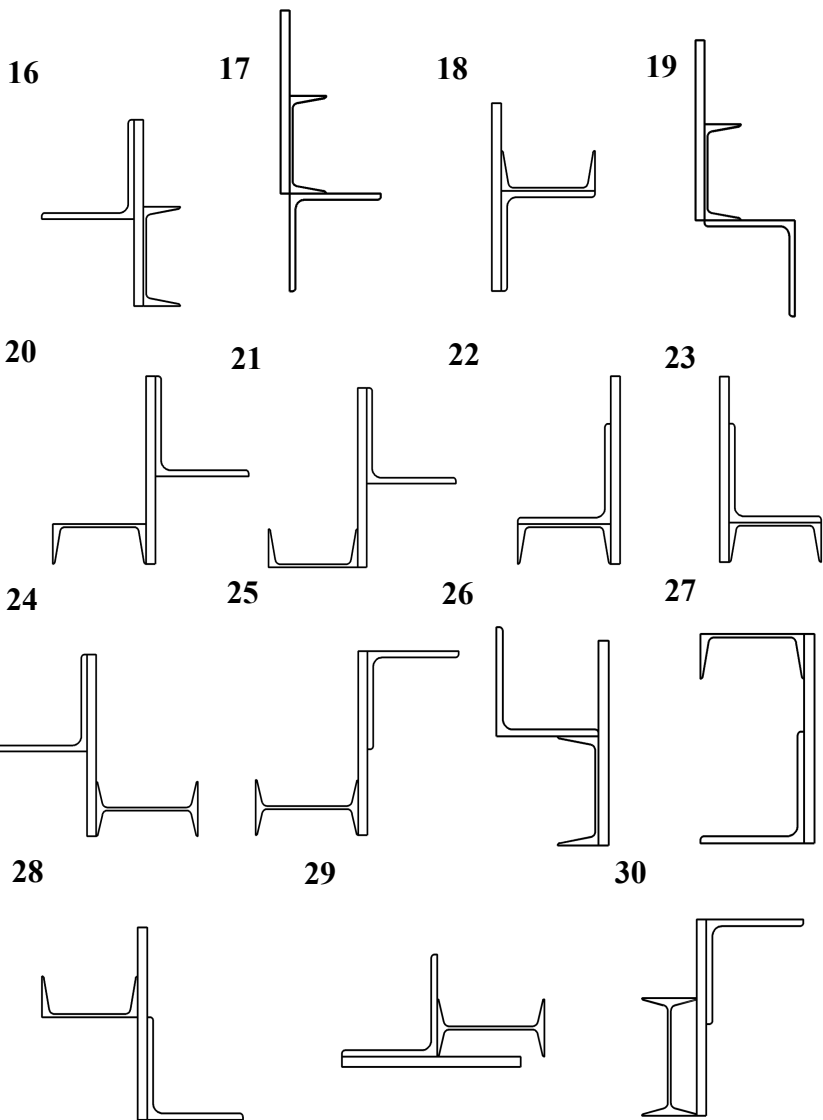


Рис.6 (продолжение)

а) Прямоугольник (рис.7). Вычисления ведем в сантиметрах.

Размеры: $b_1=16 \text{ мм}=1,6 \text{ см}$, $h_1=300 \text{ мм}=30 \text{ см}$.

Площадь: $A_f=b_1 \cdot h_1=1,6 \cdot 30=48 \text{ см}^2$.

Осевые моменты инерции:

$$I_{x_1} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{1,6 \cdot 30^3}{12} = 3600 \text{ см}^2,$$

$$I_{y_1} = \frac{b_1^3 h_1}{12} = \frac{1,6^3 \cdot 30}{12} = 10,24 \text{ см}^2.$$

Центробежный момент инерции $I_{x_1 y_1} = 0$.

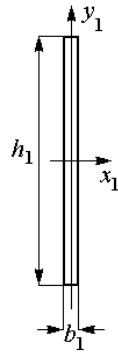


Рис 7

б) Швеллер № 18 (рис.8). Данные выписываем из таблицы сорта-мента прокатной стали:

$b_2=7,4 \text{ см}$, $h_2=18 \text{ см}$, $z_{02}=2,13 \text{ см}$,

$A_2=22,2 \text{ см}^2$, $I_{x2}=I_y^{мбл.}=105 \text{ см}^2$,

$I_{y2}=I_x^{мбл.}=1190 \text{ см}^2$, $I_{x_2 y_2} = 0$.

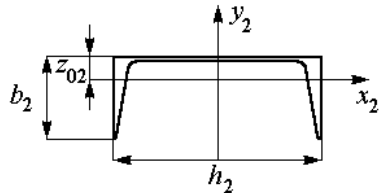


Рис. 8

в) Уголок равнобокий № 16 (10) (рис.9):

$b_3=h_3=16 \text{ см}$, $x_{03}=y_{03}=4,3 \text{ см}$,

$A_3=31,4 \text{ см}^2$, $I_{x3}=I_{y3}=744 \text{ см}^2$,

$I_{x0}=I_{max}=1229 \text{ см}^2$,

$I_{y0}=I_{min}=1229 \text{ см}^2$,

$$I_{x_3 y_3} = \frac{I_{x0} - I_{y0}}{2} \sin 2\alpha = \frac{1229 - 319}{2} \cdot (-1) = -455 \text{ см}^2.$$

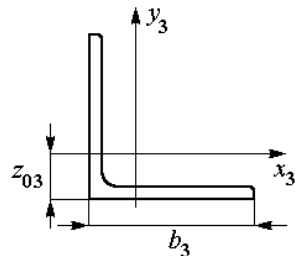


Рис. 9

2. Определение положения центра тяжести составного сечения.

Проведем вспомогательные оси координат x и y так, чтобы сечение располагалось в первом квадранте. Координаты центра тяжести определяются по формулам:

$$x_0 = \frac{S_y}{A}, \quad y_0 = \frac{S_x}{A},$$

где $S_x = \sum_l^3 A_l y_{0l}$, $S_y = \sum_l^3 A_l x_{0l}$ - статические моменты сечения относительно осей x и y , $A = \sum_l^3 A_l$ - площадь составного сечения.

Подсчитаем площадь

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 48 + 22,2 + 31,4 = 101,6 \text{ см}^2,$$

координаты центров тяжести всех простейших фигур в осях x и y :

$$x_{01} = h_2 + \frac{b_1}{2} = 18 + 0,8 = 18,8 \text{ см},$$

$$y_{01} = \frac{h_1}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ см},$$

$$x_{01} = \frac{h_2}{2} = \frac{18}{2} = 9 \text{ см},$$

$$y_{02} = b_2 - z_{02} = 7,4 - 2,13 = 5,27 \text{ см},$$

$$x_{03} = h_2 + b_1 + x_{03} = 18 + 1,6 + 4,3 = 23,9 \text{ см},$$

$$y_{03} = h_1 - h_3 + y_{03} = 30 - 16 + 4,3 = 18,3 \text{ см}.$$

Статические моменты сечения относительно осей x , y :

$$S_x = y_{01}A_1 + y_{02}A_2 + y_{03}A_3 = 15 \cdot 48 + 5,27 \cdot 22,2 + 18,3 \cdot 31,4 = 1412 \text{ см}^3,$$

$$S_y = x_{01}A_1 + x_{02}A_2 + x_{03}A_3 = 18,8 \cdot 48 + 9 \cdot 22,2 + 23,9 \cdot 31,4 = 1853 \text{ см}^3.$$

Вычисляем координаты центра тяжести составного сечения относительно осей x , y :

$$x_0 = \frac{S_y}{A} = \frac{1853}{101,6} = 18,2 \text{ см}, \quad y_0 = \frac{S_x}{A} = \frac{1412}{101,6} = 13,8 \text{ см}.$$

По найденным координатам находим точку C и через нее проводим центральные оси x_c и y_c , параллельные начальным осям x и y .

3. Вычисление моментов инерции сечения относительно центральных осей x_c и y_c .

Они определяются по формулам параллельного переноса осей:

$$I_{x_c} = \sum_{i=1}^3 (I_{x_i} + a_i^2 A_i), \quad I_{y_c} = \sum_{i=1}^3 (I_{y_i} + d_i^2 A_i),$$

$$I_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^3 (I_{x_i y_i} + a_i d_i A_i),$$

где $I_{x_i}, I_{y_i}, I_{x_i y_i}$ - осевые и центробежный моменты инерции i -ой простейшей фигуры относительно своих центральных осей x_i, y_i ; a_i и d_i - расстояния между осями i -ой фигуры и центральными осями x_c, y_c , точнее - это координаты центра тяжести i -ой фигуры в системе x_c, y_c , поэтому они определяются с учетом знака:

$$a_i = y_{ci} - y_c, \quad d_i = x_{ci} - x_c;$$

$$a_1 = 15 - 13,8 = 1,2 \text{ см}, \quad d_1 = 18,8 - 18,2 = 0,6 \text{ см},$$

$$a_2 = 5,27 - 13,8 = -8,53 \text{ см}, \quad d_2 = 9 - 18,2 = -9,2 \text{ см},$$

$$a_3 = 18,3 - 13,8 = 4,5 \text{ см}, \quad d_3 = 23,9 - 18,2 = 5,7 \text{ см}.$$

$$I_{x_c} = I_{x_1} + a_1^2 A_1 + I_{x_2} + a_2^2 A_2 + I_{x_3} + a_3^2 A_3 =$$

$$= 3600 + 1,2^2 \cdot 48 + 105 + (-8,53)^2 \cdot 22,2 + 744 + 4,5^2 \cdot 31,4 = 6770 \text{ см}^4.$$

$$I_{y_c} = I_{y_1} + d_1^2 A_1 + I_{y_2} + d_2^2 A_2 + I_{y_3} + d_3^2 A_3 =$$

$$= 10,24 + 0,6^2 \cdot 48 + 1190 + (-9,2)^2 \cdot 22,2 + 744 + 5,7^2 \cdot 31,4 = 4860 \text{ см}^4;$$

$$I_{x_c y_c} = I_{x_1 y_1} + a_1 d_1 A_1 + I_{x_2 y_2} + a_2 d_2 A_2 + I_{x_3 y_3} + a_3 d_3 A_3 =$$

$$= 0 + 1,2 \cdot 0,6 \cdot 48 + 0 + (-8,53) \cdot (-9,2) \cdot 22,2 - 455 + 4,5 \cdot 5,7 \cdot 31,4 = 2127 \text{ см}^4.$$

4. Определение положения главных центральных осей и вычисление главных моментов инерции.

Угол наклона α_0 главной центральной оси x_0 к оси x_c находится по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}}.$$

Положительное направление угла α_0 откладывается против часовой стрелки.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} = \frac{2 \cdot 2127}{4860 - 6770} = -2,23,$$

отсюда $2\alpha_0 = -65^\circ 55'$, $\alpha_0 = -32^\circ 57'$, $\sin \alpha_0 = -0,544$, $\cos \alpha_0 = 0,840$, $\sin 2\alpha_0 = -0,912$.

Проводим оси x_0 и y_0 , поворачивая их от осей x_c и y_c по часовой стрелке (рис.10).

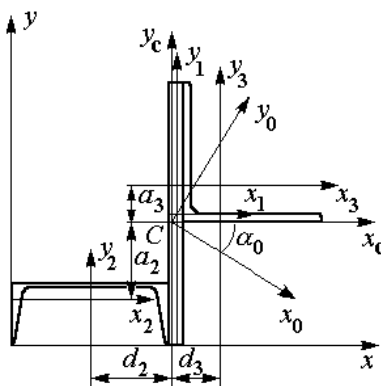


Рис. 10

Затем определяем главные моменты инерции сечения:

$$\begin{aligned} I_{x_0} &= I_{x_c} \cos^2 \alpha_0 + I_{y_c} \sin^2 \alpha_0 - I_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 6770 \cdot 0,84^2 + 4860 \cdot 0,544^2 - 2127 \cdot (-0,912) = 8150 \text{ см}^4; \\ I_{y_0} &= I_{x_c} \sin^2 \alpha_0 + I_{y_c} \cos^2 \alpha_0 - I_{x_c y_c} \sin 2\alpha_0 = \\ &= 6770 \cdot 0,544^2 + 4860 \cdot 0,84^2 - 2127 \cdot (-0,912) = 3480 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

В заключение проверим постоянство суммы осевых моментов относительно взаимно перпендикулярных осей:

$$I_{x_c} + I_{y_c} = I_{x_0} + I_{y_0} = const ;$$

$$6770 + 4860 = 8150 + 3480,$$

$$11630 \text{ см}^4 = 11630 \text{ см}^4$$

Также убеждаемся, что один из главных моментов является наибольшим ($I_{max} = I_{x_0} = 8150 \text{ см}^4$), а другой наименьшим ($I_{min} = I_{y_0} = 3480 \text{ см}^4$) для центральных осей данного сечения.

Задание 3

РАСЧЕТ БАЛКИ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

Исходные данные. Схема балки и величины приложенных нагрузок приведены на рис.11 и в табл. 4. Материал балки – сталь Ст.3, допускаемые напряжения: нормальное $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, касательное $[\tau] = 100 \text{ МПа}$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, сечение балки – двутавр, допускаемый прогиб $[f] = 0,004 l$, где l – длина пролета или консоли, где имеет место максимальный прогиб.

Т а б л и ц а 4

№	a м	q кН/м	F кН	M кНм	№	a м	q кН/м	F кН	M кНм
1	0,6	10	15	16	6	1,4	10	22	18
2	0,8	12	16	18	7	1,2	12	20	16
3	1,0	14	18	20	8	1,0	14	18	14
4	1,2	16	20	22	9	0,8	16	16	12
5	1,4	18	22	20	0	0,6	18	14	10

Содержание задания. Для заданной балки (схема и нагрузки принимаются в соответствии с шифром) требуется подобрать двутавровое поперечное сечение из условия прочности и жесткости.

Первая часть работы – расчет на прочность.

Для определения опасного сечения балки строят эпюры поперечной силы и изгибающего момента. Внутренние силовые факторы определяются по следующим правилам:

1) поперечная сила в данном сечении равна сумме вертикальных проекций всех внешних сил, приложенных по одну сторону от данного сечения.

2) изгибающий момент в данном сечении равен сумме моментов относительно центра тяжести сечения от всех внешних сил, приложенных по одну сторону от данного сечения.

Внешние силы и моменты входят в выражения для Q_y и M_x со своими знаками в соответствии со следующими правилами знаков.

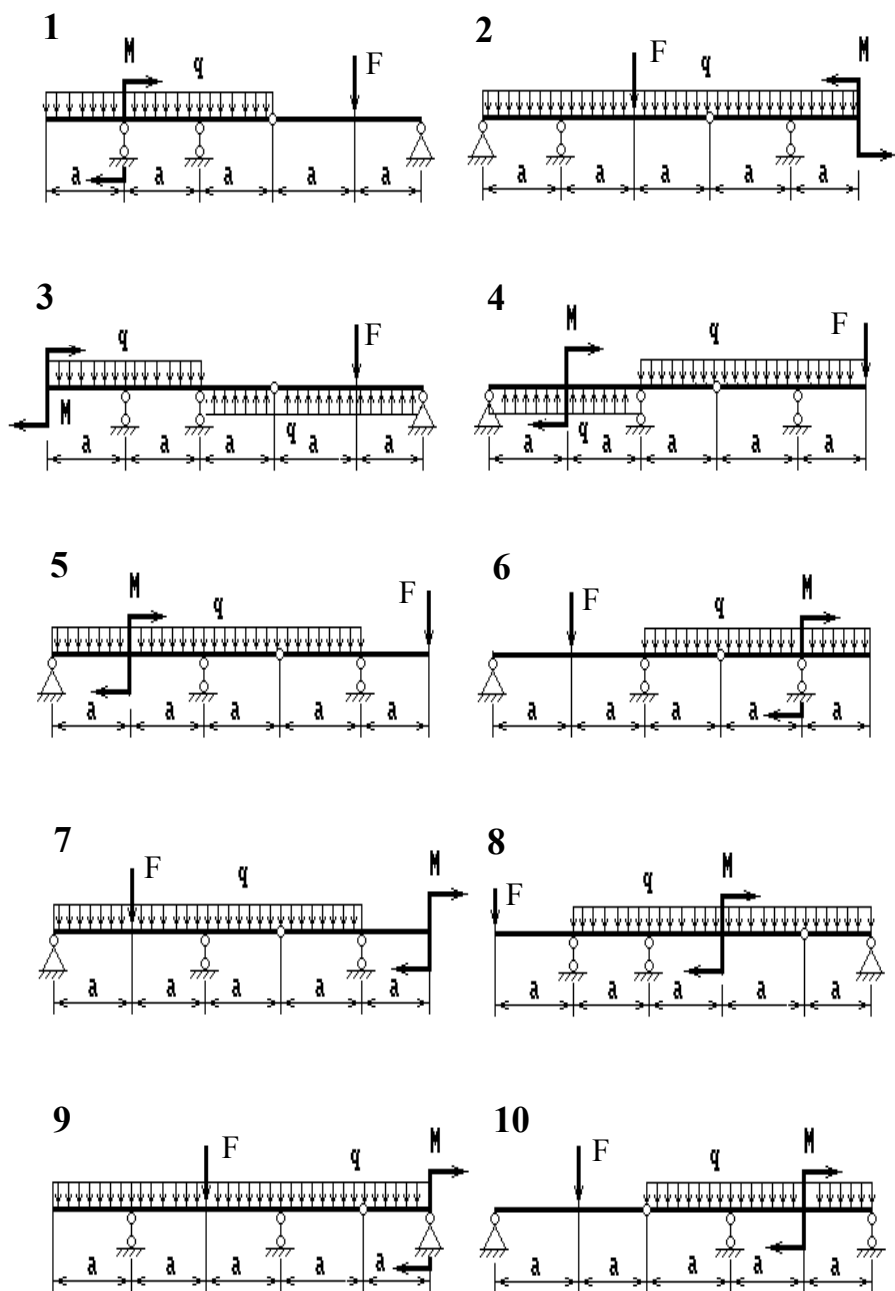


Рис. 11

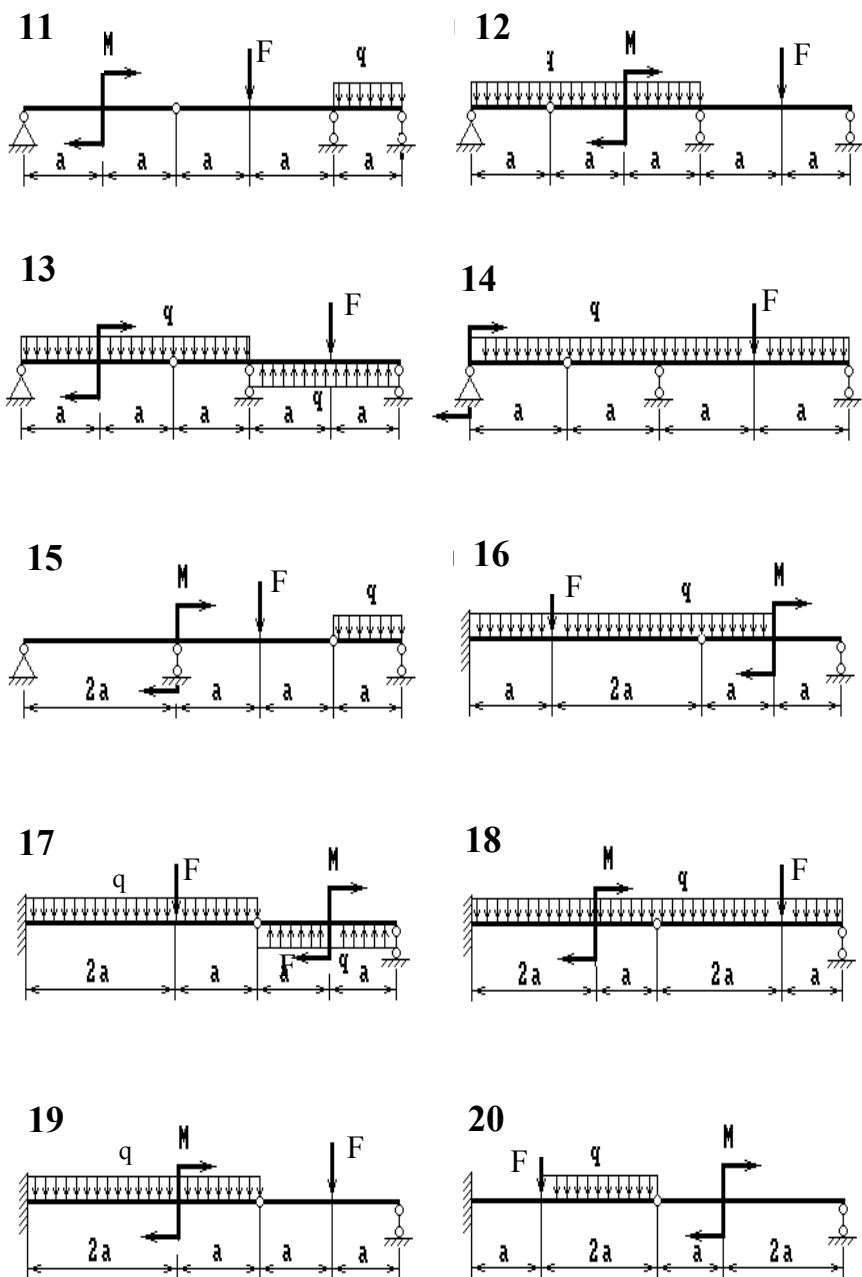
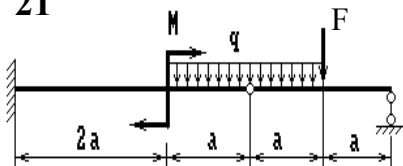
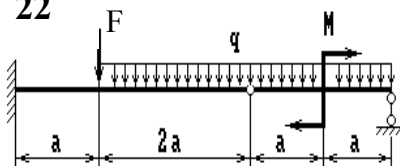


Рис. 11 (продолжение)

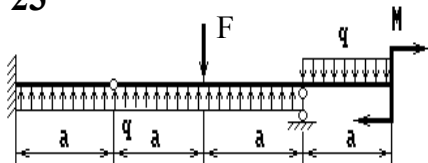
21



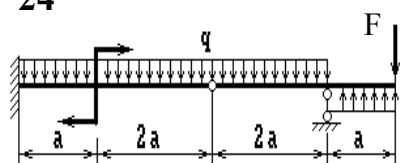
22



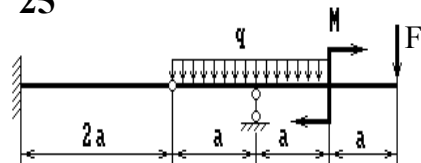
23



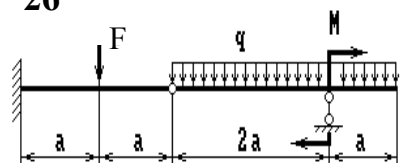
24



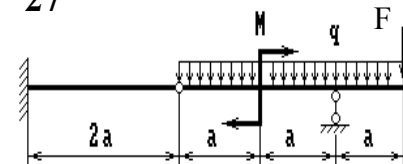
25



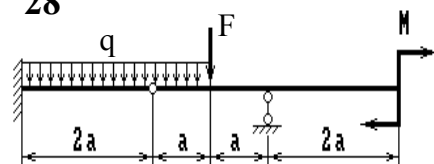
26



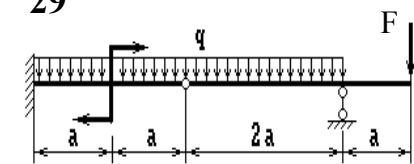
27



28



29



30

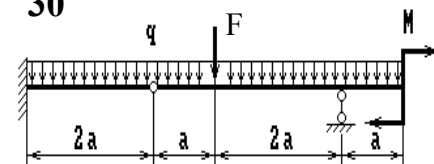


Рис. 11 (окончание)

Внешняя сила, приложенная *слева* от данного сечения, в выражение для Q_y входит со знаком **плюс**, если она направлена **вверх**. Внешний момент, приложенный *слева* от данного сечения, в выражение для M_x входит со знаком **плюс**, если он направлен **по часовой стрелке**.

Эти правила знаков показаны также и на рис.12.

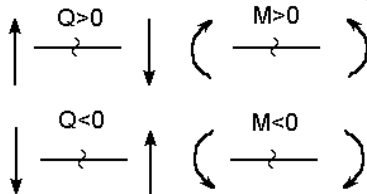


Рис. 12

Из условия прочности по нормальным напряжениям

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

определяется требуемая величина осевого момента сопротивления W_x , а затем из таблицы сортамента прокатной стали выбирается подходящий двутавр – такой, у которого W_x несколько больше требуемого (можно и чуть меньше, в пределах 5%). Для сравнения по массе определяются также размеры квадратного или круглого сечения (по указанию преподавателя).

Далее производится полная проверка прочности балки выбранного двутаврового сечения: по нормальным, касательным и эквивалентным (по IV теории прочности) напряжениям. По нормальным напряжениям проверяются точки сечения, наиболее удаленные от нейтральной оси, по касательным – точки нейтральной оси, по эквивалентным – точки, где полки двутавра сопрягаются со стенкой. Если какое-нибудь условие не выполняется, берется двутавр большего номера и все проверки повторяются.

Вторая часть работы – расчет на жесткость. Определение перемещений балки производится по универсальному уравнению упругой линии. При его записи удобно начало координат поместить в такой крайней точке оси балки, где заранее известны перемещения. Так, в заделке $y_0 = \theta_0 = 0$, на шарнирной опоре $y_0 = 0$.

Эпюры θ и y строятся по значениям перемещений, найденным для характерных сечений с обязательным учетом дифференциальных зависимостей плоского изгиба. Характерными сечениями будут: сече-

ния, где $M_x = 0$ (θ в них принимает экстремальное значение); сечения, где $\theta=0$ (y в них принимает экстремальное значение); концевые сечения.

Направление выпуклости эпюры θ определяется знаком эпюры Q_y , направление выпуклости эпюры y определяется знаком эпюры M_x .

Для того, чтобы соблюдались дифференциальные зависимости плоского изгиба в случае выбора начала координат в крайней правой точке оси балки, необходимо при построении эпюры θ изменить знаки вычисленных величин на обратные.

Условие жесткости балки записывается в виде

$$y_{\max} \leq [f],$$

где $y_{\max}$ – максимальный прогиб, определяемый из эпюры y ;

$[f]$ – допускаемый прогиб, $[f]=0,004l$ (l – длина пролета, т.е. расстояние между опорами или длина консоли, где имеет место максимальный прогиб).

Если условие жесткости не выполняется, то определяется момент инерции нового сечения:

$$J_x'' = J_x^I \frac{y_{\max}}{[f]},$$

где J_x'' – момент инерции нового сечения; J_x^I момент инерции сечения, выбранного по условию прочности.

По найденному J_x'' из таблицы сортамента подбирается номер профиля, который и принимается для данной балки.

Пример расчета

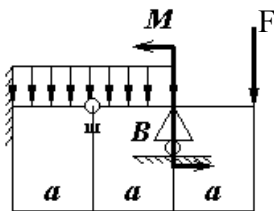


Рис. 13

Исходные данные: схема балки показана на рис.13;

$q = 12$ кН/м, $F = 15$ кН,

$M = 20$ кН·м, $a = 2$ м.

Остальные данные – общие для всех заданий.

1. Расчет на прочность

1.1 *Определение опорных реакций.* Уравнения равновесия будем составлять в таком порядке, чтобы в каждое очередное уравнение входила только одна неизвестная.

$$\sum X = 0, H_A = 0;$$

$$\sum M_{\text{ш}}^{\text{np}} = 0, R_B a + M - 2Fa - qa \frac{a}{2} = 0,$$

$$R_B = \frac{-M + 2Fa + qa^2 / 2}{a} = \frac{-20 + 2 \cdot 15 \cdot 2 + 12 \cdot 2^2 / 2}{2} = 32 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0, -M_A - 2qa^2 + R_B 2a + M - 3Fa = 0;$$

$$\begin{aligned} M_A &= -2qa^2 + R_B 2a + M - 3Fa = \\ &= -2 \cdot 12 \cdot 2^2 + 2 \cdot 32 \cdot 2 + 20 - 3 \cdot 15 \cdot 2 = \\ &= -38 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

$$\sum M_{\text{ш}}^{\text{лев}} = 0,$$

$$-R_A a - M_A + qa^2 / 2 = 0,$$

$$R_A = \frac{-M_A + qa^2 / 2}{a} =$$

$$\frac{38 + 12 \cdot 2^2 / 2}{2} = 31 \text{ кН}.$$

Проверка правильности определения опорных реакций:

$$\sum Y = 0,$$

$$\begin{aligned} R_A + R_B - 2qa - F &= \\ &= 31 + 32 - 2 \cdot 12 \cdot 2 - 15 = 0. \end{aligned}$$

1.2. *Построение эюр Q_y и M_x .*

Балка состоит из двух участков. Составим выражения поперечной силы и изгибающего момента по участкам, вычислим Q_y и M_x в

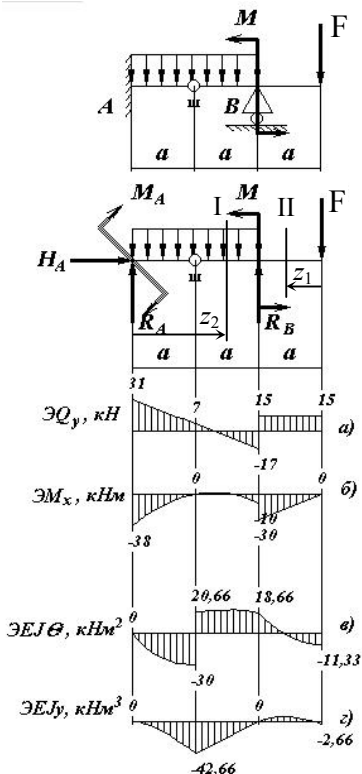


Рис.14

различных сечениях и построим эпюры.

I участок

$$0 \leq z_1 \leq 2a$$

$$Q_y(z_1) = R_A - qz_1 = 31 - 12z_1;$$

$$Q_y(0) = 31 \text{ кН},$$

$$Q_y(2a) = 31 - 2 \cdot 12 \cdot 2 = -17 \text{ кН}.$$

Строим эпюру Q_y на первом участке (рис. 14а). Как видно, эпюра Q_y пересекает ось балки. Найдем место пересечения:

$$Q_y(z_1^*) = 0, \quad R_A - qz_1^* = 0,$$

откуда

$$z_1^* = \frac{R_A}{q} = \frac{31}{12} = 2,58 \text{ м}.$$

$$M_x(z_1) = M_A + R_A z_1 - qz_1^2 / 2 = -38 + 31z_1 - 6z_1^2.$$

Эпюра M_x представляет собой квадратичную параболу. Для ее построения нужно найти не меньше трех точек:

$$M_x(0) = -38 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_x(a) = 0,$$

$$M_x(z_1^*) = 2,04 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

$$M_x(2a) = -10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюру M_x на первом участке (рис.14б).

II участок

$$0 \leq z_2 \leq a$$

$$Q_y(z_2) = F = 15 \text{ кН};$$

Строим эпюру Q_y на втором участке (рис. 14а).

$$M_x(z_2) = -Fz_2 = -15z_2,$$

$$M_x(0) = 0, \quad M_x(a) = -15 \cdot 2 = -30 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Строим эпюру M_x на втором участке (рис.14б). Из эпюры Q_y и M_x находим: опасным является сечение А, где

$$M_{x\max} = 38 \text{ кН}\cdot\text{м}, \quad Q_{y\max} = 31 \text{ кН}.$$

1.3. Подбор сечения балки.

Из условия прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} \leq [\sigma]$$

найдем требуемую величину осевого момента сопротивления

$$W_x \geq \frac{M_{x\max}}{[\sigma]} = \frac{38 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 238 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 238 \text{ см}^3.$$

Из таблицы сортамента прокатной стали выбираем подходящий двутавр, это двутавр №22, у которого $W_x^{\text{табл.}} = 232 \text{ см}^3$. Заметим, что, если строго следовать условию прочности, нужно принимать двутавр с моментом сопротивления, большим 238 см^3 . Однако допускается принимать и ближайший меньший двутавр, если перенапряжение не превышает 5%.

1.4 Полная проверка прочности балки. Для расчета двутавр заменим упрощенным сечением, состоящим из трех прямоугольников (рис. 15).

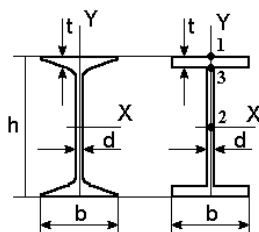


Рис. 15

Проверка по нормальным напряжениям. Опасным сечением является сечение, в котором возникает максимальный изгибающий момент $M_{\max} = 38 \text{ кНм}$, опасной точкой опасного сечения является точка, наиболее удаленная от нейтральной оси – это все верхние точки 1 сечения. Проверим условие прочности

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} = \frac{38 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^6} = 164 \cdot 10^{-6} \text{ Па} = 164 \text{ МПа} \cong [\sigma].$$

Проверка по касательным напряжениям. Опасным сечением является сечение, в котором возникает максимальная поперечная сила $Q_{max} = 31$ кН. Опасными точками опасного сечения являются точки 2 нейтральной оси. Проверим условие прочности

$$\tau_{max} = \frac{Q_{y \max} S_x}{J_x \cdot d} \leq [\tau].$$

Здесь S_x - статический момент половины сечения относительно нейтральной оси, $S_x = 131 \text{ см}^3$, I_x - момент инерции двутавра, $I_x = 2550 \text{ см}^4$, - толщина стенки двутавра, $d = 5.4 \text{ мм}$. Подставив числовые данные, получим

$$\tau_{max} = \frac{31 \cdot 10^3 \cdot 131 \cdot 10^{-6}}{2550 \cdot 10^{-8} \cdot 5,4 \cdot 10^{-3}} = 29,5 \cdot 10^{-6} \text{ Па} = 29,5 \text{ МПа} < [\tau].$$

Проверка по эквивалентным напряжениям (по IV теории прочности). Опасным сечением является сечение, в котором одновременно велики M_x и Q_y , это сечение А, $M_x = 38$ кНм, $Q_y = 31$ кН. Проверяемыми точками опасного сечения являются точки 3 сопряжения полки двутавра со стенкой. Нормальное напряжение в этих точках

$$\sigma_{(3)} = \frac{M_x}{J_x} y(3) = \frac{M_x}{J_x} \left(\frac{h}{2} - t \right),$$

здесь $t = 8,7 \text{ мм}$ - толщина полки, $h = 22 \text{ см}$ - высота двутавра; подставив числовые значения, найдем

$$\sigma_{(3)} = \frac{38 \cdot 10^3}{2550 \cdot 10^{-6}} (11 - 0,87) \cdot 10^{-2} = 151 \cdot 10^6 \text{ Па} = 151 \text{ МПа}.$$

Касательное напряжение:

$$\tau_{(3)} = \frac{Q \cdot S_x^*(3)}{J_x \cdot d},$$

где $S_x^*(3) = b t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 11 \cdot 0,87 (11 - 0,43) = 101,2 \text{ см}^2$ - статический момент относительно оси x для части сечения, расположенной выше точки 3.

Подставляя числовые значения в формулу для τ , получим

$$\tau(3) = \frac{31 \cdot 10^3 \cdot 101,2 \cdot 10^{-6}}{2550 \cdot 10^{-8} \cdot 5,4 \cdot 10^{-3}} = 22,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 22,8 \text{ МПа}.$$

Найдем эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв.}}^{IV}$ и сравним его с допускаемым:

$$\sigma_{\text{экв.}}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sqrt{151^2 + 3 \cdot 22,8^2} = 156 \text{ МПа} < [\sigma].$$

1.5 Сравнительная оценка тонкостенного прокатного профиля и сплошного круглого сечения.

Найдем размеры круглого сечения, удовлетворяющего условию прочности (момент сопротивления изгибу $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$):

$$d = \sqrt[3]{\frac{32W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 238}{\pi}} = 13,46 \text{ см}.$$

Сравним массы балки сплошного сечения и двутавровой балки:

$$\frac{m_{кр}}{m_{дв}} = \frac{\rho A_{кр} \cdot \ell}{\rho A_{дв} \cdot \ell} = \frac{A_{кр}}{A_{дв}} = \frac{\pi d^2 / 4}{F_{дв}} = \frac{142}{30,6} = 4,64.$$

2. Расчет балки на жесткость

Определим сначала жесткость балки на изгиб:

$$EJ = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2} \cdot 2550 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 5100 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 = 5100 \text{ кН} \cdot \text{м}^2$$

2.1 Универсальное уравнение упругой линии и уравнение углов поворота. Выбираем начало координат в крайней левой точке (сечение А), записываем универсальное уравнение упругой линии. Заметим, что при определении перемещений шарнир всегда считается границей участков. Поэтому число участков не два, как было ранее, а три.

$$EIy = EIy_0 + EI\theta_0 + \frac{M_A z^2}{2!} + \frac{R_A z^3}{3!} - \frac{qz^4}{4!} \Big|_I + EI\theta_{ш}(z-a) \Big|_{II} + \\ + \frac{q(z-2a)^4}{4!} + \frac{R_B(z-2a)^3}{3!} - \frac{M(z-2a)^2}{2!} \Big|_{III}$$

Уравнение углов поворота получим, продифференцировав универсальное уравнение упругой линии по независимой переменной z , не раскрывая скобок

$$EI\theta = EI\theta_0 + M_A z + \frac{R_A z^2}{2!} - \frac{qz^3}{3!} \Big|_I + EI\theta_{ш} \Big|_{II} + \\ + \frac{q(z-2a)^3}{3!} + \frac{R_B(z-2a)^2}{2!} - M(z-2a) \Big|_{III}.$$

Разделительная черта с цифрой внизу означает, что при вычислении прогиба и углов поворота на данном участке следует брать только те члены, которые записаны левее разделителя, т.е. при вычислении прогиба или углов поворота данного сечения нужно учитывать только те нагрузки, которые приложены между началом координат и данным сечением.

В каждое из этих уравнений входят неизвестные величины y_0 – прогиб в сечении $z = 0$, θ_0 – угол поворота в сечении $z = 0$, $\theta_{ш}$ – скачок угла поворота в шарнире. Они определяются из условий на опорах. В рассматриваемом случае при $z = 0$

$$y = 0, \theta = 0.$$

Отсюда получим:

$$EIy_0 = 0, \quad EI\theta_0 = 0.$$

Скачок угла поворота в шарнире $\theta_{ш}$ определим из условия на опоре B : при $z=2a$

$$y=0.$$

Подставляя эти значения в универсальное уравнение упругой линии, получим

$$0 = \frac{M_A(2a)^2}{2} + \frac{R_A(2a)^3}{6} - \frac{q(2a)^4}{24} + EI\theta_{ш}a.$$

Отсюда

$$EI\theta_{ш} = -2M_A a - \frac{4}{3}R_A a^2 + \frac{2}{3}qa^3 = \\ = -2 \cdot (-38) \cdot 2 - \frac{4}{3} \cdot 31 \cdot 4 + \frac{2 \cdot 12 \cdot 2^3}{3} = 50,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Уравнение углов поворота и уравнение упругой линии окончательно записываем в следующем виде:

$$\begin{aligned}
EI\theta &= -38z + 15,5z^2 - 2z^3 \Big|_I + 50,7 \Big|_{II} + \\
&+ 2 \cdot (z-4)^3 + 16 \cdot (z-4)^2 - 20 \cdot (z-4) \Big|_{III} \\
EIy &= -19z^2 + \frac{31}{6}z^3 - 0,5z^4 \Big|_I + 50,7(z-2) \Big|_{II} + \\
&+ 0,5(z-4)^4 + \frac{16}{3}(z-4)^3 - 10(z-4)^2 \Big|_{III}.
\end{aligned}$$

2.2. *Вычисление и построение эпюр углов поворота и прогибов.*
Теперь можно найти углы поворота и прогибы в любом сечении балки.

В сечении $z = 0$:

$$0 = 0, \quad y = 0;$$

В сечении $z = a = 2\text{ м}$:

$$EI\theta^{\text{лев.}} = -38 \cdot 2 + 15,5 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^3 = -76 = 62 - 16 = -30 \text{ кН} \cdot \text{м}^2;$$

$$\theta^{\text{лев.}} = -\frac{30 \text{ кН} \cdot \text{м}^2}{5100 \text{ кН} \cdot \text{м}^2} = -5,88 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

$$EI\theta^{\text{прав.}} = EI\theta^{\text{лев.}} + EI\theta_{\text{изг}} = -30 + 50,7 = 20,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

$$\theta^{\text{прав.}} = \frac{20,7}{5100} = 4,06 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

$$EIy = -19 \cdot 2^2 + \frac{31}{6} \cdot 2^3 - 0,5 \cdot 2^4 = -76 + \frac{124}{3} - 8 = -42,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

$$y = -\frac{42,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{5100 \text{ кН} \cdot \text{м}^2} = -8,37 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -8,37 \text{ мм}.$$

В сечении $z = 2a = 4\text{ м}$:

$$EI\theta = -38 \cdot 4 + 15,5 \cdot 4^2 + 50,7 = -152 + 248 - 128 + 50,7 = 18,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

$$\theta = \frac{18,7}{5100} = 3,67 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$EIy = -19 \cdot 4^2 + \frac{31}{6} \cdot 4^3 - 0,5 \cdot 4^4 + 50,7 \cdot 2 = 0.$$

$$z = 3a = 6 \text{ м},$$

$$EI\theta = -38 \cdot 6 + 15,5 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6^3 = 50,7 + 2 \cdot 2^3 + 16 \cdot 2^2 - 20 \cdot 2 = \\ = -228 + 558 - 432 + 50,7 + 16 + 64 - 40 = -11,3 \text{ кН} \cdot \text{м}^2,$$

$$\theta = -\frac{11,3}{5100} = -2,22 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

$$EIy = -19 \cdot 6^2 + \frac{31}{6} \cdot 6^3 - 0,5 \cdot 6^4 + 50,7 \cdot 4 + 0,5 \cdot 2^4 + \frac{16}{3} \cdot 2^3 - \\ - 10 \cdot 2^2 = -684 + 1116 - 648 + 202,7 + 8 + 42,7 - 40 = -2,7 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

$$y = -\frac{2,7}{5100} = -0,529 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,529 \text{ мм}.$$

По полученным значениям строим эпюры $EJ\theta$ и EJy . Для того, чтобы лучше была видна дифференциальная зависимость, эпюры $EJ\theta$ и EJy строят совместно с ранее построенными эпюрами Q и M . Для полученных величин можно записать следующую цепочку дифференциальных зависимостей

$$\begin{aligned} \theta &= y', \\ M &= EIy'' = EI\theta', \\ Q &= EIy''' = EI\theta'' = M', \\ q &= EIy^{IV} = EI\theta''' = M'' = Q', \end{aligned}$$

2.3. Расчет на жесткость

Максимальный прогиб в пролете равен

$$y_{\max}^{\text{прол}} = 8,37 \text{ мм},$$

а допускаемый прогиб в пролете равен

$$[y]^{\text{прол}} = 0,004 \cdot 2a = 0,004 \cdot 4000 = 16 \text{ мм}.$$

Как видно,

$$y_{\max}^{\text{прол}} < [y]^{\text{прол}},$$

условие жесткости выполняется.

Максимальный прогиб консоли равен

$$y_{\max}^{\kappa} = 0,53 \text{ мм},$$

а допускаемый прогиб консоли

$$[y]^{\kappa} = 0,004 \cdot 2000 = 8 \text{ мм}.$$

И в этом случае условие жесткости выполняется.

Следовательно, двутавр №22 удовлетворяет условиям прочности и жесткости. На этом расчет балки заканчивается.

Библиографический список

1. Ф е о д о с ь е в В. И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986, 512 с..
2. Задания на расчетно-проектировочные работы по курсу сопротивления материалов: Метод. указания / Бриллиантова И.Б., Центовский Е.М., Казань: КХТИ, 1984, 32 с.
3. Расчетно-графические работы по курсу сопротивления материалов. Растяжение и сжатие: Метод. разработка / Газарян А.С. и др. М.: МВТУ, 1980, 42 с.