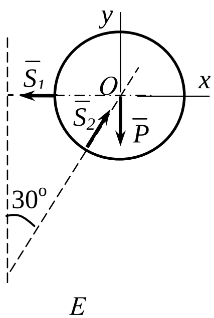
Зональная (II тур Всероссийской) студенческая олимпиада по теоретической механике

Казанский национальный исследовательский технологический университет
4-8 декабря 2013 г.

Решения задач теоретического конкурса

Автор задач:
доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштари Айрат Ильдарович



Решение задачи С1.

Каждая пара стержней *1, 2* поддерживает вес участка трубопровода длины *l*. С учетом формулы объема круглого цилиндра $V = \pi r^2 \cdot l$, этот вес равен:

$$P = Mg = \rho V g = \rho\pi r^2 l g \ .$$

Обозначим через $\overline{S}_1, \overline{S}_2$ силы реакции стержней. По теореме о трех силах $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{P}$ образуют систему сходящихся сил (рис. 1). Уравнения равновесия:

$$\sum_k F_{kx} = -S_1 + S_2 \cos 60^o = 0 \,, \tag{1}$$

$$\sum_k F_{ky} = S_2 \sin 60^o - P = 0 \ . \tag{2}$$

Из (2), а затем из (1) определяем искомые реакции:

$$S_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} P = \frac{2}{\sqrt{3}} \rho\pi r^2 l g \ , \quad S_1 = \frac{S_2}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rho\pi r^2 l g \ .$$

Ответ. $S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \rho\pi r^2 l g$, $S_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \rho\pi r^2 l g$.

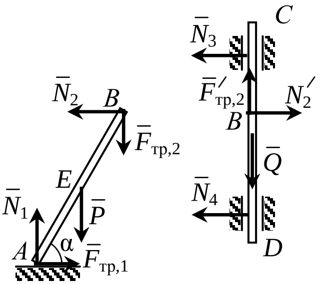


Рис. 2

Решение задачи С2.

Рассмотрим равновесие стержней AB и CD по отдельности. Действующие на них силы указаны на рис. 2. Приложенная к CD сила $\overline{F}'_{тр,2}$, уравновешивающая вес $\overline{Q}$, направлена вверх. Поэтому приложенная к AB в точке B сила $\overline{F}_{тр,2}$ направлена вниз по 3-му закону Ньютона. (Заметим, что если бы AB опирался в точке B на неподвижную стенку, то $\overline{F}_{тр,2}$ была бы направлена вверх.)

Оси x и y направим вправо и вверх. Обозначим $AB = l$. Условия равновесия стержня AB:

$$\sum_k F_{kx} = F_{тр,1} - N_2 = 0\,. \tag{1}$$

$$\sum_k F_{ky} = N_1 - P - F_{тр,2} = 0\,. \tag{2}$$

$$\sum_k M_A(\overline{F}_k) = -P(l/2)\cos\alpha + N_2 l\sin\alpha - F_{тр,2} l\cos\alpha = 0. \tag{3}$$

Достаточно записать одно из условий равновесия стержня CD:

$$\sum_k F_{ky} = F_{тр,2} - Q = 0\,. \tag{4}$$

Заметим, что основную сложность задачи составляет не запись уравнений равновесия, а их анализ.

Выразим реакции N_1, N_2 через P, Q. Получим из (4):

$$F_{тр,2} = Q\,. \tag{5}$$

Из (2): $N_1 = P + F_{тр,2}$. Тогда, с учетом (5):

$$N_1 = P + Q\,. \tag{6}$$

Из (3), с учетом (5):

$$N_2 \sin\alpha = ((P/2) + F_{тр,2})\cos\alpha\,.$$

$$N_2 = ((P/2) + Q)\operatorname{ctg}\alpha\,. \tag{7}$$

Из (1): $F_{\text{тр},1} = N_2$. С другой стороны, при равновесии не должно быть проскальзывания в точке *A*, поэтому $F_{\text{тр},1} \le f_1 N_1$. Отсюда:

$$N_2 \le f_1 N_1 . \qquad (8)$$

Подставим (6), (7) в (8):

$$((P/2)+Q)\operatorname{ctg}\alpha \le f_1(P+Q) .$$

$$(P+2Q) \le 2 f_1 (P+Q)\operatorname{tg}\alpha .$$

$$2Q(1-f_1\operatorname{tg}\alpha) \le P(2f_1\operatorname{tg}\alpha - 1) . \qquad (9)$$

Если $1-f_1\operatorname{tg}\alpha \le 0$, то $f_1\operatorname{tg}\alpha \ge 1$, $2f_1\operatorname{tg}\alpha \ge 2$, $2f_1\operatorname{tg}\alpha - 1 \ge 1 > 0$. Таким образом, в этом случае левая часть (9) неположительна при любом *Q*, а правая часть (9) положительна. Значит, при $1-f_1\operatorname{tg}\alpha \le 0$, то есть при $f_1 \ge \operatorname{ctg}\alpha$, условие (9) выполняется при любом *Q*.

Если же $1-f_1\operatorname{tg}\alpha > 0$, то и правая часть (9) должна быть положительна. Значит, при $f_1 < \operatorname{ctg}\alpha$ равновесие будет, лишь если также выполняется $2f_1\operatorname{tg}\alpha - 1 > 0$, то есть $f_1 > (\operatorname{ctg}\alpha)/2$. Так как $1-f_1\operatorname{tg}\alpha > 0$, то деля обе части (9) на $(1-f_1\operatorname{tg}\alpha)$, получим:

$$Q \le \frac{2f_1\operatorname{tg}\alpha - 1}{2(1-f_1\operatorname{tg}\alpha)} P . \qquad (10)$$

Таким образом, (10) является необходимым (но не достаточным) условием-неравенством для *Q* при

$$(\operatorname{ctg}\alpha)/2 < f_1 < \operatorname{ctg}\alpha .$$

Значит, при $f_1 \le (\operatorname{ctg}\alpha)/2$ равновесия не будет ни при каком Q.

Далее, при равновесии системы не должно быть проскальзывания в точке *B*, поэтому $F_{\text{тр},2} \le f_2 N_2$. Учтем здесь (5) и (7):

$$Q \le f_2((P/2)+Q)\operatorname{ctg}\alpha .$$

$$Q(1-f_2\operatorname{ctg}\alpha) \le (f_2 P/2)\operatorname{ctg}\alpha . \qquad (11)$$

Если $1-f_2\operatorname{ctg}\alpha \le 0$, то есть $f_2 \ge \operatorname{tg}\alpha$, то (11) выполняется при любом *Q*.

Если $1-f_2\operatorname{ctg}\alpha > 0$, то есть $f_2 < \operatorname{tg}\alpha$, то, деля (11) на $(1-f_2\operatorname{ctg}\alpha)$, получим еще одно необходимое условие-неравенство для *Q*:

$$Q \le \frac{f_2}{2(\mathrm{tg}\alpha - f_2)} P . \tag{12}$$

Обобщаем (10) и (12). Получаем, что при $(\mathrm{ctg}\alpha)/2 < f_1 < \mathrm{ctg}\alpha$, $f_2 < \mathrm{tg}\alpha$ система будет в равновесии при

$$Q \le \min\left[\frac{2f_1\,\mathrm{tg}\alpha - 1}{2(1 - f_1\,\mathrm{tg}\alpha)},\ \frac{f_2}{2(\mathrm{tg}\alpha - f_2)}\right] P .$$

При условии

$$f_1 \ge \mathrm{ctg}\alpha ,\ f_2 \ge \mathrm{tg}\alpha \tag{13}$$

из уравнений равновесия не следует ограничений на величину Q. То есть при условии (13) равновесие системы возможно при любом Q. Так как $\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha = 1$, то либо $\mathrm{tg}\alpha > 1$, либо $\mathrm{ctg}\alpha > 1$, либо $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}\alpha = 1$. Если $\mathrm{tg}\alpha > 1$, то с учетом $f_2 \le 1$ второе условие в (13) не может реализоваться. Если $\mathrm{ctg}\alpha > 1$, то с учетом $f_1 \le 1$ первое условие в (13) не может реализоваться.

Если же $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{ctg}\alpha = 1$, то есть $\alpha = \pi/4$, то в силу $f_1 \le 1$, $f_2 \le 1$ условие (13) выполняется, лишь если $f_1 = f_2 = 1$.

Ответ. 1). При $f_1 \le (\mathrm{ctg}\alpha)/2$ равновесия нет ни при каком Q. При $(\mathrm{ctg}\alpha)/2 < f_1 < \mathrm{ctg}\alpha$, $f_2 < \mathrm{tg}\alpha$ равновесие при $Q \le \min\left[\frac{2f_1\,\mathrm{tg}\alpha - 1}{2(1 - f_1\,\mathrm{tg}\alpha)},\ \frac{f_2}{2(\mathrm{tg}\alpha - f_2)}\right] P$. 2). $f_1 = f_2 = 1$, $\alpha = \pi/4$.

Решение задачи К1.

Проекции ускорения точки M на оси координат:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = b ,\quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = c(2t - 1) .$$

При $t = 1$: $v_x = b$, $v_y = 0$; $a_x = b$, $a_y = c$. Вектор $\overline{v}$ параллелен оси x, величина скорости

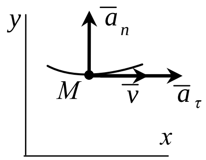


Рис. 3

равна $v = |b|$. Нормальное ускорение $\bar{a}_n$ – составляющая ускорения, перпендикулярная $\bar{v}$. Поэтому $a_n = |a_y| = |c|$. (На рис. 3 рассмотрен случай $b, c > 0$). Радиус кривизны траектории точки M при $t = 1$:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{b^2}{|c|}.$$

Замечание. Найти a_n можно также по формуле: $a_n = \dfrac{|a_x v_y - a_y v_x|}{v}$.

Ответ. $\rho = \dfrac{b^2}{|c|}$.

Решение задачи К2.

1 способ. Будем считать без ограничения общности, что вращение ползунов вокруг точки O и вращение AD относительно AB оба происходят против часовой стрелки. В силу $AB = OA = OB$ угол $\angle DOA = 30^o$, $OD = \sqrt{3}\, l$.

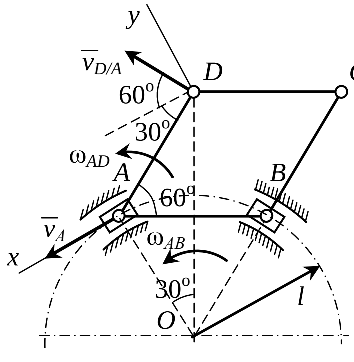


Рис. 4

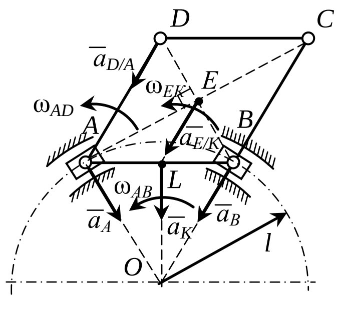


Рис. 5

1). Рассмотрим плоскопараллельное движение звена AB (рис. 4). Его угловая скорость складывается из двух составляющих:

$$\omega_{AD} = \omega_{AB} + \omega_{AD/AB} = \frac{v_A}{l} + \frac{v}{l} = \frac{2v}{l}.$$

По теореме о сложении скоростей при плоскопараллельном движении: $\bar{v}_D = \bar{v}_A + \bar{v}_{D/A}$, где $\bar{v}_{D/A} = AD \cdot \omega_{AD} = 2v$. Проецируем теорему на указанные оси координат *x*, *y*:

$$v_{D,x} = v_A + v_{D/A} \cos 60^o = v + 2v \cdot 0.5 = 2v \,,$$

$$v_{D,y} = v_{D/A} \sin 60^o = 2v \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}\, v \,.$$

$$v_D = \sqrt{v_{D,x}^2 + v_{D,y}^2} = \sqrt{7}\, v \,.$$

2). Так как *ABCD* – ромб, то его диагонали *AC* и *BD* во время движения взаимно перпендикулярны (рис. 5). Обозначим центр масс ромба через *E*. Так как $\angle AEB = 90^o$ в любой момент, то *AB* является диаметром окружности, по которой *E* вращается вокруг *L*, середины *AB*, при своем движении относительно *AB*. Радиус этой окружности: $EL = AD/2 = l/2$. При этом $\omega_{EL} = \omega_{AD} = \dfrac{2v}{l}$. При плоскопараллельном движении EL: $\bar{a}_E = \bar{a}_L + \bar{a}_{E/L} = \bar{a}_L^n + \bar{a}_{E/L}^n$, где

$$a_L^n = OL \cdot \omega_{AB}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} l \cdot \left(\frac{v}{l}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{v^2}{l} \,,$$

$$a_{E/L}^n = EL \cdot \omega_{AD}^2 = \frac{l}{2}\left(\frac{2v}{l}\right)^2 = \frac{2v^2}{l} \,.$$

Так как угол между $\bar{a}_L$ и $\bar{a}_{E/L}$ равен 30^o, то по теореме косинусов получаем:

$$a_E = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot \cos 150^o}\ \frac{v^2}{l} = \frac{\sqrt{31}}{2}\frac{v^2}{l} \,.$$

*2 способ***.** Возможно иначе определить a_E в рамках рассмотрения плоскопараллельного движения (рис. 5).

В любой момент центр масс ромба *E* находится посередине между точками *B* и *D*. Поэтому $\bar{r}_E = \dfrac{\bar{r}_B + \bar{r}_D}{2}$. Дважды продифференцируем по времени: $\bar{a}_E = \dfrac{\bar{a}_B + \bar{a}_D}{2}$. Здесь, в силу $\omega_{AB} = const$, будет $\bar{a}_B = \bar{a}_B^n$, где $a_B^n = \dfrac{v^2}{l}$. При плоскопараллельном движении *AD*, с учетом $\omega_{AD} = const$, будет: $\bar{a}_D = \bar{a}_A + \bar{a}_{D/A} = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{D/A}^n$, где $a_A^n = \dfrac{v^2}{l}$, $a_{D/A}^n = AD \cdot \omega_{AD}^2 = \dfrac{4v^2}{l}$. В итоге получаем:

$$\bar{a}_E = \frac{1}{2}(\bar{a}_B^n + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{D/A}^n).$$

Учтем, что $\bar{a}_B^n$ и $\bar{a}_{D/A}^n$ сонаправлены, угол между их векторной суммой и вектором $\bar{a}_A^n$ равен 60^o. $a_B^n + a_{D/A}^n = \dfrac{5v^2}{l}$. Тогда по теореме косинусов:

$$a_E = \frac{1}{2}\sqrt{1+5^2-2\cdot 1\cdot 5\cdot \cos 120^o}\ \frac{v^2}{l} = \frac{\sqrt{31}}{2}\frac{v^2}{l}.$$

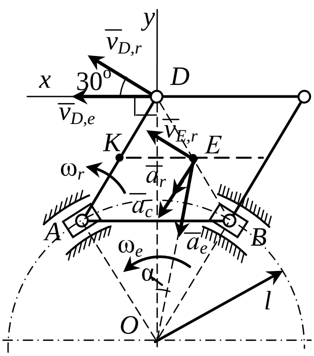


Рис. 6

3 способ. 1). Рассмотрим сложное движение точки *D*, при котором подвижная система координат связана с *AB* и вращается вокруг *O* с переносной угловой скоростью $\omega_e = \dfrac{v_A}{l} = \dfrac{v}{l}$ (рис. 6). Тогда относительное движение *D* связано с вращением *AD* относительно *AB* с относительной угловой скоростью $\omega_r = \omega = \dfrac{v}{l}$. Определим переносную и относительную скорости точки *D*:

$$v_e = OD \cdot \omega_e = \sqrt{3}\, v, \quad v_r = AD \cdot \omega_r = l\omega = v.$$

По теореме о сложении скоростей при сложном движении точки: $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$. Проецируем теорему на оси x, y :

$$v_{a,x} = v_e + v_r \cos 30^o = \frac{3\sqrt{3}}{2} v, \quad v_{a,y} = v_r \sin 30^o = \frac{1}{2} v.$$

$$v_a = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = \sqrt{7}\, v.$$

2). По теореме Кориолиса абсолютное ускорение центра масс ромба E: $\bar{a}_a = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_c$. (Этот способ менее удобен по сравнению с 1-м способом в силу дополнительных тригонометрических вычислений.)

Переносное ускорение точки E, в силу $\omega_e = const$, равно $\bar{a}_e = \bar{a}_e^n$, $a_e^n = OE \cdot \omega_e^2$. Определим OE по теореме косинусов из треугольника OED: $OE = \sqrt{(\sqrt{3}\, l)^2 + (0.5l)^2 - 2 \cdot \sqrt{3}\, l \cdot 0.5l \cos 30^o} = \frac{\sqrt{7}}{2} l$. Острый угол между $\bar{a}_e^n$ и осью y найдем по теореме синусов: $\frac{\sin\alpha}{DE} = \frac{\sin 30^o}{OE}$, откуда $\sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}}$. Тогда $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$.

Относительное ускорение точки E равно относительному ускорению середины K звена AD в силу того, что относительное движение KE является поступательным: $\bar{a}_r = \bar{a}_{K,r}$, где $a_{K,r} = a_{K,r}^n = AK \cdot \omega_r^2 = \frac{v^2}{2l}$.

Относительная скорость точки E: $v_{E,r} = v_{K,r} = AK \cdot \omega_r = \frac{v}{2l}$. Ускорение Кориолиса точки E по направлению совпадает с $\bar{a}_r$, а по величине равно: $\bar{a}_c = 2\omega_e v_{E,r} = \frac{v^2}{l}$. Проецируем теорему на оси x, y:

$$a_{a,x} = a_e \sin\alpha + (a_r + a_c)\cos 60^o = \frac{\sqrt{7}}{2} l \cdot \frac{v^2}{l^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7}} + \left(\frac{v^2}{2l} + \frac{v^2}{l}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{v^2}{l}.$$

$$a_{a,y} = -a_e \cos\alpha - (a_r + a_c)\sin 60^o =$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{7}}{2} l \cdot \frac{v^2}{l^2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} + \left(\frac{v^2}{2l} + \frac{v^2}{l}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}\, v^2}{2l}.$$

$$a_E = a_a = \sqrt{a_{a,x}^2 + a_{a,y}^2} = \frac{\sqrt{31}}{2} \frac{v^2}{l}.$$

Ответ. $v_D = \sqrt{7}\, v$. $a_E = \dfrac{\sqrt{31}}{2} \dfrac{v^2}{l}$.

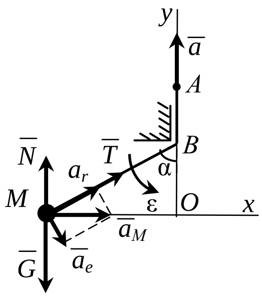


Рис. 7

Решение задачи Д1. Вначале установим условие того, что точка M не отрывается от плоскости. В этом случае ускорение $\overline{a}_M$ направлено вдоль горизонтали (рис. 7). Движение точки M рассмотрим как сложное движение. Относительное движение происходит вдоль BM с ускорением $\overline{a}_r$, $a_r = a$. Переносное движение связано с вращением M вокруг B с ускорением $\overline{a}_e = \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_e^n$. Здесь $\overline{a}_e^\tau \perp BM$, $a_e^n = BM \cdot \omega_{BM}^2 = 0$, так как система в покое. $a_{кор} = 2\omega_{BM} v_r = 0$. Тогда $\overline{a}_M = \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_r$. Проецируем на прямую BM: $a_M \sin\alpha = a_r$, откуда

$$a_M = \frac{a}{\sin\alpha}. \qquad (1)$$

На точку M помимо сил $\overline{G}, \overline{N}$ действует сила натяжения нити $\overline{T}$. Дифференциальные уравнения движения точки M вдоль x и y:

$$m a_M = T \sin\alpha. \qquad (2)$$

$$0 = N - G + T\cos\alpha. \qquad (3)$$

Из (2), с учетом (1): $T = \dfrac{m a_M}{\sin\alpha} = \dfrac{ma}{\sin^2\alpha}$. Тогда из (3):

$$N = G - T\cos\alpha = mg - \frac{ma\cos\alpha}{\sin^2\alpha}. \qquad (4)$$

Условие неотрыва точки M от плоскости: $N \ge 0$. Тогда из (4):

$$mg - \frac{ma\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \geq 0 .$$

$$a \leq \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} g .$$

В противном случае, а именно при $a > \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} g$, точка M оторвется от плоскости.

Замечание. Соотношение (1) можно найти также аналитическим способом. Введем обозначения: высота выступа $OB = h = \mathrm{const}$, длина наклонного участка нити $BM = s$. Так как $x_M < 0$, то расстояние $OM = -x_M$. Запишем уравнение геометрической связи между этими величинами и дважды продифференцируем по времени:

$$x_M^2 + h^2 = s^2 .$$

$$2x_M \dot{x}_M = 2s\dot{s} .$$

$$x_M \ddot{x}_M + \dot{x}_M^2 = s\ddot{s} + \dot{s}^2 . \qquad (5)$$

Здесь $\ddot{x}_M = a_{Mx}$. Далее, $AM = AB + s = \mathrm{const}$. Дважды дифференцируя, получим: $a + \ddot{s} = 0$. Отсюда $\ddot{s} = -a$. Это ускорение, с которым убывает длина наклонного участка нити. Так как в данный момент система находится в покое, то $\dot{x}_M = \dot{s} = 0$. Тогда из (5):

$$-OM \cdot a_{Mx} = s \cdot (-a) .$$

$$a_{Mx} = \frac{s}{OM} a = \frac{a}{\sin\alpha} ,$$

что совпадает с (1).

Ответ. $a > \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} g$.

Решение задачи Д2.

Рассмотрим равновесие, например, левого рычага колодочного тормоза. Со стороны вала на колодку действуют силы нормальной реакции $\overline{N}_1$ и трения $\overline{F}_{\text{тр},1}$. При проскальзывании между колодкой и валом: $F_{\text{тр},1} = fN_1$. Допустим, ротор вращается против часовой стрелки. Это определяет направление $\overline{F}_{\text{тр},1}$ (рис. 8). Достаточно записать лишь одно уравнение равновесия рычага – уравнение моментов относительно шарнирной опоры рычага O_1. Из рисунка в условии следует, что линия действия $\overline{F}_{\text{тр},1}$ проходит через O_1.

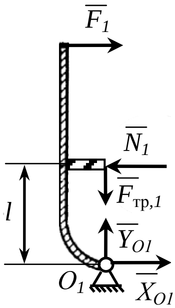


Рис. 8

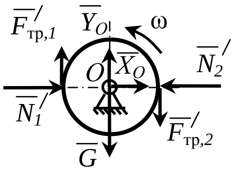


Рис. 9

$$\sum_k M_{O_1}(\overline{F}_k) = -F_1 L + N_1 l = 0 \,,$$

откуда $N_1 = \dfrac{L}{l}F$, $F_{\text{тр},1} = \dfrac{L}{l} fF$. В силу симметрии, $F_{\text{тр},2} = F_{\text{тр},1}$.

Со стороны колодок на вал действуют силы $\overline{N}_1^{/}$, $\overline{F}^{/}_{\text{тр},1}$, $\overline{N}_2^{/}$, $\overline{F}^{/}_{\text{тр},2}$, направления которых определяются третьим законом Ньютона. Дифференциальное уравнение вращение вала относительно оси O (рис. 9):

$$J\frac{d\omega}{dt} = -F_{\text{тр},1} r - F_{\text{тр},2} r \,,$$

$$J\frac{d\omega}{dt} = -\frac{2LrfF}{l} \,,$$

$$J\int_{\omega_0}^{0} d\omega = -\frac{2LrfF}{l}\int_0^T dt \,,$$

$$-J\omega_0 = -\frac{2LrfF}{l} T \,,$$

$$T = \frac{J\,l\omega_0}{2Lr\,f\,F} \,.$$

Ответ. $T = \dfrac{J\,l\omega_0}{2Lr\,f\,F}$.

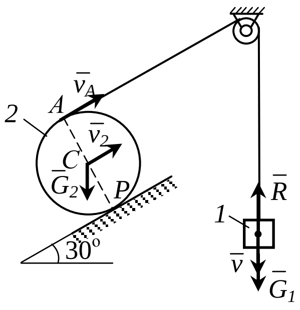


Рис. 10

Решение задачи Д3.

1 способ. Мгновенный центр скоростей кольца при его плоском движении находится в точке P (рис. 10). Угловая скорость кольца: $\omega = v_2 / r$, где r – радиус кольца. $v_A = 2r\omega = 2v_2$, $v_A = v$, откуда $v_2 = v/2$.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии механической системы: $T - T_0 = \sum_k A_k^e$. Здесь кинетические энергии вначале и при произвольном перемещении системы T_0 и T:

$$T_0 = 0\,,\;\; T_1 = \frac{mv^2}{2}\,,\quad J_{2,Cz} = mr^2\,,\; T_2 = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{J_{2,Cz}\omega^2}{2} = mv_2^2 = \frac{1}{4}mv^2\,.$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{3}{4}mv^2\,. \tag{1}$$

Интегрируя по времени $v_2 = v_1/2$, получим аналогичное соотношение для перемещений центра кольца *2* и точки *1*: $s_2 = s/2$. Сумма работ внешних сил (с учетом силы сопротивления $\bar{R}$): $\sum_k A_k^e = A_{G_1} + A_{G_2} + A_R$, где

$$A_{G_1} = mgs\,,\quad A_{G_2} = -mgH_2 = -mgs_2 \sin 30^o = -\frac{1}{4}mgs\,, \tag{2}$$

$$A_R = \int_0^s R\cos(\bar{R},\bar{v})ds = -\int_0^s \mu v^2\, ds\,. \tag{3}$$

В случае 1, при $R = 0$, учитывая (1), (2) в теореме, сразу придем к ответу:

$$\frac{3}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mgs\,.$$

$$v = \sqrt{gs}\,.$$

В более общем случае 2, учитывая (1), (2), (3) в теореме, получим:

$$\frac{3}{4}mv^2 = \frac{3}{4}mgs - \frac{3}{4}\alpha mg\int_0^s v^2\,ds\,.$$

$$v^2 = g\left(s - \alpha\int_0^s v^2\,ds\right). \tag{4}$$

Интеграл $\int_0^s v^2\,ds$ вычислить явно нельзя, так как неизвестна зависимость $v = v(s)$. Поэтому продифференцируем (4) по s и затем разделим переменные v и s:

$$2v\frac{dv}{ds} = g(1 - \alpha v^2)\,. \tag{5}$$

$$\frac{d(v^2)}{1 - \alpha v^2} = g ds\,.$$

Сделаем замену переменной $y = v^2$ и проинтегрируем:

$$\frac{dy}{1 - \alpha y} = g ds\,.$$

$$-\frac{1}{\alpha}\int_0^y \frac{dy}{y - (1/\alpha)} = g\int_0^s ds\,.$$

$$\ln\left|\frac{y - (1/\alpha)}{-(1/\alpha)}\right| = -\alpha g s\,.$$

$$1 - \alpha y = e^{-\alpha g s}\,.$$

Подставляя сюда $y = v^2$, получим ответ на второй вопрос задачи:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha g s})}\,. \tag{6}$$

2 способ. Запишем ДУ движения тел *1* и *2* по отдельности, введя силу натяжения нити $\overline{T}$ (рис. 11). Для точки *1*:

$$ma = G_1 - T - R\,. \tag{7}$$

Для кольца *2* при его плоском движении:

$$ma_2 = -G_2\sin 30^o + T + F_{тр}\,, \tag{8}$$

$$J_{2,Cz}\varepsilon_z = -Tr + F_{тр}r\,. \tag{9}$$

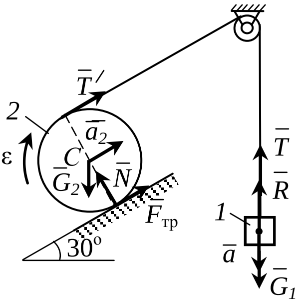


Рис. 11

где $a_2 = \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{dv}{2dt} = \dfrac{a}{2}$, $\varepsilon_z = -|\varepsilon|$, $|\varepsilon| = \dfrac{a_2}{r} = \dfrac{a}{2r}$.

В системе (7), (8), (9) последовательно выражаем и исключаем из числа неизвестных силы $T, F_{тр}$. При этом можно получить из (9): $F_{тр} = T - \dfrac{ma}{2}$, затем из (8): $T = \dfrac{ma}{2} + \dfrac{mg}{4}$. Подставляя в (7), получаем одно уравнение:

$$2a = g(1 - \alpha v^2)\,.$$

С учетом $a = \dfrac{dv}{dt} = v\dfrac{dv}{ds}$, приходим к (5). Далее решение как в 1-м способе приводит ко второму ответу (6).

Ответ. 1) $v = \sqrt{gs}$, 2) $v = \sqrt{\dfrac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha gs})}$.

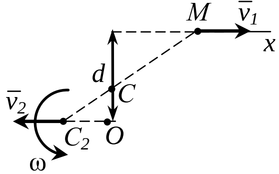


Рис. 12

Решение задачи Д4.

Обозначим через M и C_2 пулю и центр тяжести пистолета (без учета пули), соответственно, а их скорости после выстрела через v_1, v_2 (рис. 12). Так как внешних сил в горизонтальной плоскости нет, то $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ постоянны по закону сохранения количества движения, записанному для каждого из этих тел. По той же причине угловая скорость пистолета после выстрела ω постоянна по закону сохранения кинетического момента относительно центра масс пистолета.

Запишем закон сохранения количества движения для всей системы в проекции на ось *x*, вдоль которой движется пуля: $Q_{1x} = Q_{0x}$. Так как система вначале была в покое, то $Q_{0x} = 0$. Во время движения: $Q_{1x} = mv_1 - Mv_2$. Отсюда получаем соотношение между скоростями:

$$v_1 = \frac{M}{m} v_2 . \tag{1}$$

Перемещение C_2 при его равномерном движении к моменту $t = \tau$: $l = v_2 \tau$. Угол поворота пистолета при его равномерном вращении к моменту $t = \tau$: $2\pi = \omega\tau$. Отсюда

$$v_2 = \frac{l}{\tau}, \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau} . \tag{2}$$

Из (1), (2):

$$v_1 = \frac{Ml}{m\tau} = \frac{Ml\omega}{2\pi m} . \tag{3}$$

Обозначим через *O* точку, в которой находилась точка C_2 до выстрела. Запишем закон сохранения кинетического момента системы относительно неподвижной вертикальной оси *z*, проходящей через точки *O*: $K_z = K_{0z}$. Здесь $K_{0z} = 0$, $K_z = K_{1z} + K_{2z}$.

По условию длина ствола револьвера пренебрежимо мала по сравнению с перемещением пули *l* (при котором пистолет повернулся на конечный угол 2π). Поэтому за малое время Δt, за которое пуля достигает конца ствола, угол поворота пистолета $\Delta\varphi$ пренебрежимо мал. Значит, можно приближенно считать, что траектория точки *M* при $t \geq 0$ является прямой линией. (Без условия малости длины ствола движение точки *M* надо было бы рассматривать как сложное, по загибающейся спиральной траектории.) С другой стороны, центр масс всей системы *C* со временем остается на месте. Поэтому отношение

$\dfrac{CM}{CC_2}$ является постоянной величиной. Кроме того, точка C все время принадлежит отрезку C_2M. Отсюда из геометрических соображений следует, что траекторию точки C_2 также можно считать прямой при $t \geq 0$. Поэтому получаем с пренебрежимо малой погрешностью, что линия действия вектора $M\bar{v}_2$ проходит через точку O.

Кинетический момент при плоскопараллельном движении пистолета: $K_{2z} = M_z(M\bar{v}_2) + K_{2,C_2z} = Mv_2 \cdot 0 + J\omega$, где J – момент инерции пистолета относительно оси C_2z. (Пистолет считаем твердым телом, так как по условию массой подвижной части спускового механизма пренебрегаем.) Для пули: $K_{1z} = -mv_1 \cdot d$. Учитываем это в законе сохранения кинетического момента

$$-mv_1 \cdot d + J\omega = 0,$$

откуда выражаем с последующей подстановкой (3):

$$J = \frac{mv_1 d}{\omega} = \frac{Md\,l}{2\pi}. \tag{4}$$

Теорема об изменении кинетической энергии системы: $T - T_0 = A^i$, где $T_0 = 0$, A^i – искомая работа внутренних сил (спускового механизма и пороховых газов) системы, а кинетическая энергия системы в момент τ равна с учетом (2), (3), (4):

$$T = T_1 + T_2 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{Ml}{m\tau}\right)^2 + \frac{M}{2}\left(\frac{l}{\tau}\right)^2 + \frac{Mdl}{2\cdot 2\pi}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 =$$

$$\frac{M^2l^2}{2m\tau^2} + \frac{Ml^2}{2\tau^2} + \frac{\pi Md\,l}{\tau^2} == \frac{Ml}{2m\tau^2}((M+m)l + 2\pi md). \tag{5}$$

Тогда $A^i = T$ по формуле (5).

Замечание. К (4) можно прийти более длинным путем, записав закон сохранения кинетического момента относительно оси z, проходящей через центр масс всей системы C. При этом надо ввести расстояния d_1 и d_2 от точки C до линий действия векторов $m\bar{v}_1$ и $M\bar{v}_2$. Закон сохранения тогда имеет вид:

$$-mv_1 \cdot d_1 - Mv_2 \cdot d_2 + J\omega = 0\,.$$

Учтя здесь $d_1 = \dfrac{M}{M+m}d$, $d_2 = \dfrac{m}{M+m}d$, а также (2), (3) после алгебраических преобразований получим (4).

Ответ. $A^i = \dfrac{Ml}{2m\tau^2}(lm + 2\pi dm + Ml)$.