

**Зональная (III тур Всероссийской) студенческая олимпиада  
по теоретической механике**

**Казанский национальный исследовательский  
технологический университет  
4-8 декабря 2013 г.**

**Решения задач компьютерного конкурса**

Автор задач:

доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштари Айрат Ильдарович

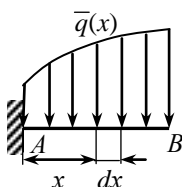


Рис. 1

**Решение задачи 1.** К малому участку стержня длины  $dx$  приложена малая сила  $q(x)dx$  (рис. 1). Этот участок стержня удален от точки  $A$  на расстояние  $x$ . Тогда момент этой силы относительно точки  $A$  равен  $-q(x)dx \cdot x$ . Суммарный момент распределенной силы:  $M_A(\bar{Q}) = -\int_0^l x q(x) dx$ .

Уравнение равновесия стержня  $AB$  для моментов:

$$\sum_k M_A(\bar{F}_k) = M_A + M_A(\bar{Q}) = 0,$$

откуда момент заделки:

$$M_A = -M_A(\bar{Q}) = \int_0^l x q(x) dx = \int_0^l x \sqrt{a + \sin^2 x} dx.$$

Этот интеграл находится численно, например, с помощью квадратурной формулы правых прямоугольников:

$$\int_c^d f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n f(c + kh) \cdot h,$$

где длина малого участка  $h = \frac{d-c}{n}$ , при достаточно большом  $n$  (например,  $n = 1000$ ).

При тестировании программы удобно взять значение  $a$  очень большим, например,  $a = 10000$ . Тогда функцию  $q(x)$  можно с малой относительной погрешностью приближенно заменить постоянной  $q = \sqrt{a}$ . В этом случае эквивалентная сосредоточенная сила по величине равна примерно  $Q \approx ql$ , приложена приблизительно к середине  $AB$  и  $M_A \approx ql \cdot l/2 = 50$ . Программа же выдаст точное значение  $M_A = 50.003$ .

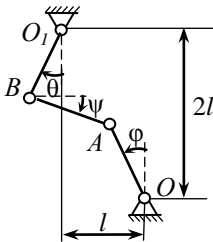


Рис. 2

**Решение задачи 2.** Обозначим через  $l$  длины стержней, а через  $\varphi, \theta$  – углы поворота стержней  $OA, AB, O_1B$ , соответственно (рис. 2). Расстояния между точками  $O$  и  $O_1$  в проекциях на горизонталь и вертикаль равны  $l$  и  $2l$ , соответственно. С другой стороны, каждое из этих расстояний образуется сложением слагаемых, связанных с поворотами стержней:

$$l \sin \varphi + l \cos \varphi - l \sin \theta = l, \quad (1)$$

$$l \cos \varphi + l \sin \varphi + l \cos \theta = 2l. \quad (2)$$

При равномерном вращении стержня  $OA$  имеем  $\varphi = \omega t$ . Промежуток  $0 < t < \pi/2\omega_0$  в условии задачи связан с ограничением на угол  $\varphi$ , который, как следует из геометрии механизма, не может превосходить  $\pi/2$ . При выбранном направлении  $\omega_0$  против часовой стрелки из геометрических соображений получаем следующие условия, которым должны удовлетворять два других угла:  $0 \leq \varphi < \pi/2$ ,  $0 \leq \theta \leq 2 \arctg 2 - \pi/2$ . Здесь максимально возможное значение  $\theta = 2 \arctg 2 - \pi/2 = \pi/2 - 2 \arctg(1/2)$  реализуется, когда  $OA$  и  $AB$  параллельны. При такой области определения  $\varphi$  и  $\theta$  и заданном  $t$  система двух нелинейных алгебраических уравнений (1), (2) имеет единственное решение, которое находится с помощью численного метода.

Можно также выразить  $\varphi$  из (1) и подставить в (2). Тогда получим одно нелинейное уравнение относительно  $\theta$ :

$$\sin(\arccos(1 + \sin\theta - \sin\omega t)) + \cos\theta + \cos\omega t - 2 = 0. \quad (3)$$

Чтобы не выйти за пределы области определения функции  $\arccos$ , должно выполняться  $1 + \sin\theta - \sin\omega t \leq 1$ , то есть  $\theta \leq \omega t$ . Проведя численный эксперимент, можно убедиться, что функция  $f(\theta)$  в левой части (3) монотонно убывает при увеличении  $\theta$  от 0 до  $\omega t$ . Уравнение (3) можно решить, например, методом последовательного деления отрезка пополам.

Далее возможны два способа продолжения решения.

*Способ 1.* Решая (1), (2) либо (3), последовательно определяем значения  $\theta(t)$ ,  $\theta(t+h)$ ,  $\theta(t+2h)$ . Тогда искомые угловая скорость и ускорения находятся численно через разностные отношения:

$$\omega_1(t) = (\theta(t+h) - \theta(t)) / h, \quad \varepsilon_1(t) = (\omega_1(t+h) - \omega_1(t)) / h.$$

Отметим, что для получения необходимой точности вычислений нужно в программе с высокой точностью определять  $\theta$ .

*Способ 2.* Вначале для заданного  $t$  определяются значения  $\varphi$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ . Затем используется теорема о сложении скоростей при плоском движении для  $AB$ , либо строится МЦС. Отсюда можно определить  $v_B$  и затем  $\omega_1$ . Далее записываются соотношения для ускорений, в том числе при плоском движении  $AB$ . Отсюда можно определить  $a_B^\tau$  и затем  $\varepsilon_1$ . Этот способ трудоемок по сравнению со способом 1.

При тестировании программы удобно сверяться со значениями, которые несложно получить аналитически. При  $t=0$  должно быть  $\omega_1 = \omega_0$ ,  $\varepsilon_1 = 0$ . При  $t = \arctg(1/2) / \omega_0$  будет  $\varphi = \arctg(1/2)$ , что соответствует положению, при котором  $OA$  и  $AB$  параллельны,  $OAB \perp O_1B$ , угол  $\theta$  достигает своего максимума. При этом должно быть  $\omega_1 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 2\omega_0^2$ .

Средне-интегральное значение  $\omega_{cp}$  можно вычислить с помощью любой квадратурной формулы для вычисления интеграла. Для этого нужно запрограммировать суммирование  $\omega_1$  по мере возрастания времени  $\tau$  от 0 до заданного  $t$  и затем умножить на малое приращение времени  $\Delta\tau$ .

Можно найти  $\omega_{\text{ср}}$  проще. Если  $\omega_1$  все время одного знака, то

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{1}{t} \int_0^t |\omega_1(\tau)| d\tau = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d\theta}{d\tau} d\tau = \frac{1}{t} \int_0^{\theta(t)} d\varphi = \frac{\theta(t)}{t},$$

где  $\theta(t)$  – угол поворота в момент  $t$ , определяемый из (3).

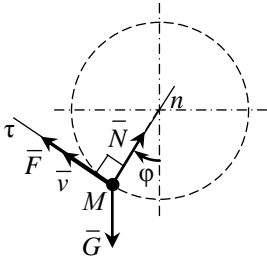


Рис. 3

**Решение задания 3.1.** Будем откладывать угол  $\varphi$ , определяющий положение точки  $M$ , как указано на рис. 3. Дифференциальное уравнение (ДУ) движения точки  $M$  в проекции на касательную ось  $\tau$ :

$$m \frac{dv}{dt} = F - G \sin \varphi.$$

При вращательном движении точки  $M$  её скорость равна:  $v = R\omega = R \frac{d\varphi}{dt}$ . С учетом этого и

$F = kmg$ , получим окончательно ДУ:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{g}{R} (k - \sin \varphi). \quad (1)$$

Задаем также начальные условия:  $\varphi(0) = 0$ ,  $\omega(0) = 0$ .

Обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (1) при указанных начальных условиях решается численно, например, методом Эйлера или Рунге-Кутты. Условием завершения вычислений является условие достижения точкой  $M$  положения  $M_1$  при  $\varphi(T) = \pi/2$ .

*Замечание.* Используя теорему об изменении кинетической энергии, легко проверить, что  $v(T) = 0$  при  $k = \frac{\pi}{2} - 1$ . Поэтому достижение

точкой  $M$  положения  $M_1$  возможно при  $k \geq \frac{\pi}{2} - 1$ .

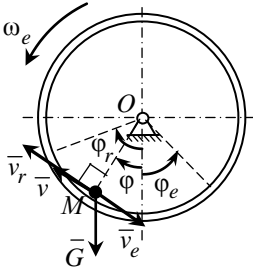


Рис. 4

**Решение задания 3.2.** Движение механизма  $M$  по цилиндру вызывает вращение цилиндра в противоположном направлении. Рассмотрим движение точки  $M$  как сложное движение (рис. 4). Относительное движение точки по цилиндру со скоростью  $v_r = u$  характеризуется углом относительного поворота  $\varphi_r$ , который отсчитывается от начального положения точки по часовой стрелке. Переносное движение точки при вращении цилиндра с угловой скоростью  $\omega_e$  характеризуется углом поворота цилиндра  $\varphi_e$ , который удобнее отсчитывать против часовой стрелки. Тогда положение точки  $M$  (относительно неподвижной системы координат) характеризуется углом  $\varphi = -\varphi_e + \varphi_r$ . Дифференцируем по времени:  $\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}_e + \dot{\varphi}_r$ . Отсюда выражаем угловую скорость цилиндра:

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e = -\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_r. \quad (1)$$

Запишем теорему об изменении кинетического момента системы относительно оси  $Ox$ , проходящей через точку  $O$  перпендикулярно плоскости рисунка:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_k M_x(\bar{F}_k^e). \quad (2)$$

Здесь кинетический момент системы складывается из кинетических моментов для точки и цилиндра:  $K_x = K_{1x} + K_{2x}$ . С учетом  $v = R\dot{\varphi}$ , (1)

и  $\dot{\varphi}_r = \omega_r = \frac{v_r}{R} = \frac{u}{R} = \frac{gt}{R}$ , получим:

$$\begin{aligned} K_{1x} &= M_x(m_1\bar{v}) = -m_1v \cdot R = -m_1R^2\dot{\varphi}. \\ K_{2x} &= J_{2x}\omega_e = m_2R^2(-\dot{\varphi} + \dot{\varphi}_r) = m_2R^2\left(-\dot{\varphi} + \frac{gt}{R}\right). \\ \sum_k M_x(\bar{F}_k^e) &= M_x(\bar{G}) = m_1g \cdot R \sin\varphi. \end{aligned}$$

Подставим в (2):

$$\frac{d}{dt} \left( -m_1 R^2 \dot{\phi} + m_2 R^2 \left( -\dot{\phi} + \frac{gt}{R} \right) \right) = m_1 g R \sin \varphi,$$

$$(m_1 + m_2) R \ddot{\phi} = m_2 g - m_1 g \sin(\varphi).$$

Учтем  $m_2 = km_1$  и придем к окончательному виду ДУ:

$$\ddot{\phi} = \frac{(k - \sin \varphi)g}{(1+k)R}. \quad (3)$$

Начальные условия задачи и конечное условие для определения  $T$  такие же, как и в задании 3.1.

Уравнение (3) можно получить и другим способом. Записываем ДУ движения точки  $M$ , вводя при этом касательную силу сцепления  $\bar{F}_{cy}$  между  $M$  и цилиндром. Затем записываем ДУ вращения цилиндра с учетом  $\bar{F}'_{cy}$ , по 3-му закону Ньютона направленную в противоположную сторону. Исключая  $F_{cy}$  из системы двух ДУ, приходим к (3).

*Замечание.* Из физических соображений понятно, что, если масса точки  $M$  достаточна велика по сравнению с массой цилиндра, то есть коэффициент  $k$  относительно мал, то цилиндр будет легко прокручиваться и точка  $M$  не сможет достичь положения  $M_1$  ни при каком  $t$ . Из численного эксперимента можно установить, что такая ситуация возникает при  $k$ , меньших значения, равного примерно 0,636. Поэтому в условии оговорено, что  $k > 0.7$ .

С другой стороны, при очень больших  $k$  цилиндр, очевидно, почти не будет вращаться. В пределе, при  $k \rightarrow \infty$ , он неподвижен. Тогда придем к простейшей кинематической задаче об определении времени прохождения пути  $s = \frac{\pi}{2} R$  при движении точки с постоянным ускорением  $a = g$ . Решение этой задачи получим из уравнения  $s = aT^2/2$ . Полученное значение можно сверить с ответом, который выдает программа в ходе её тестирования.

**Решение задания 3.3.** Движение системы описывается теми и иными ДУ в зависимости от того, проскальзывает или не проскальзывает точка по цилиндру в данный момент времени.

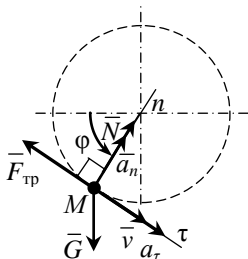


Рис. 5

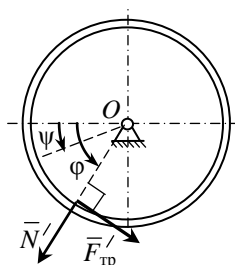


Рис. 6

Система характеризуется двумя степенями свободы. Первая степень свободы связана с углом поворота  $\varphi$  от начального положения точки  $M_0$  (на конце горизонтального диаметра) до положения точки  $M$  в произвольный момент (рис. 5). Вторая степень свободы связана с углом поворота цилиндра  $\psi$  (рис. 6). Цилиндр вращается под действием силы трения со стороны точки  $M$ .

При проскальзывании точки по цилиндру будет выполняться строгое равенство  $F_{\text{тр}} = fN$ . Запишем ДУ движения точки  $M$  в проекциях на касательную и нормальную оси  $\tau$  и  $n$  (рис. 5):

$$m_1 a_\tau = m_1 g \cos \varphi - F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

$$m_1 a_n = N - m_1 g \sin \varphi. \quad (2)$$

С учетом  $a_n = R\dot{\varphi}^2$  при вращательном движении точки  $M$  из (2) получим:  $N = m_1(R\dot{\varphi}^2 + g \sin \varphi)$ . Отсюда при условии проскальзывания:

$$F_{\text{тр}} = f m_1 (R\dot{\varphi}^2 + g \sin \varphi). \quad (3)$$

Учтем также  $a_\tau = R\ddot{\varphi}$ . Тогда из (1) получим:

$$m_1 R\ddot{\varphi} = m_1 g \cos \varphi - f m_1 (R\dot{\varphi}^2 + g \sin \varphi).$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{R} (g(\cos \varphi - f \sin \varphi) - f R \dot{\varphi}^2). \quad (4)$$

Запишем ДУ вращения цилиндра вокруг неподвижной оси  $Ox$  под действием силы  $\bar{F}'_{\text{тр}} = -\bar{F}_{\text{тр}}$  (рис. 6), с последующим учетом (3):

$$\begin{aligned}
 J_{2x} \ddot{\Psi} &= F'_{\text{тр}} R, \\
 m_2 R^2 \ddot{\Psi} &= f m_1 (R \dot{\varphi}^2 + g \sin \varphi) R, \\
 \ddot{\Psi} &= \frac{f (R \dot{\varphi}^2 + g \sin \varphi)}{k R}.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Итак, при проскальзывании точки по цилиндру движение системы описывается двумя ДУ (4), (5).

Рассмотрим теперь случай непроскальзывания точки по цилиндру, когда точка  $M$  как бы прилипает к цилиндру. Система движется как единое твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, с моментом инерции  $J_x = J_{1x} + J_{2x} = m_1 R^2 + m_2 R^2$ . Его ДУ вращения имеет вид (рис. 7):

$$\begin{aligned}
 J_x \ddot{\Psi} &= m_1 g R \cos \varphi, \\
 (m_1 + m_2) R \ddot{\Psi} &= m_1 g \cos \varphi, \\
 \ddot{\Psi} &= \frac{g \cos \varphi}{(1 + k) R}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

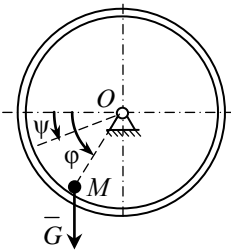


Рис. 7

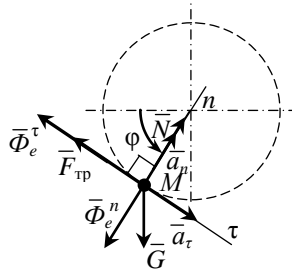


Рис. 8

Теперь установим условие непроскальзывания точки по цилиндру (условие относительного покоя точки). Введем неинерциальную систему отсчета, связанную с цилиндром. Кроме активных сил на точку действует переносная сила инерции (рис. 8):

$$\overline{\Phi}_e = -m_1 \overline{a}_e = -m_1 \overline{a}_e^\tau - m_1 \overline{a}_e^n = \overline{\Phi}_e^\tau + \overline{\Phi}_e^n.$$



При относительном покое  $v_r = 0$ , поэтому её ускорение Кориолиса  $a_{\text{кор}} = 0$  и сила инерции  $\bar{\Phi}_{\text{кор}} = 0$ . Уравнения относительного покоя точки  $M$  в проекциях на оси  $\tau$  и  $n$ :

$$\sum_k F_{k\tau} = G \cos\varphi - F_{\text{тр}} - \Phi_e^\tau = 0, \quad (7)$$

$$\sum_k F_{kn} = N - G \sin\varphi - \Phi_e^n = 0. \quad (8)$$

Выражаем из (7) и (8):

$$F_{\text{тр}} = m_1 g \cos\varphi - m_1 a_e^\tau = m_1 (g \cos\varphi - R\ddot{\Psi}). \quad (9)$$

$$N = m_1 g \sin\varphi + m_1 a_e^n = m_1 (g \sin\varphi + R\dot{\Psi}^2). \quad (10)$$

Подставив (9), (10) в условие непроскальзывания  $F_{\text{тр}} \leq fN$ , получим окончательно условие относительного покоя точки  $M$ :

$$g \cos\varphi - R\ddot{\Psi} \leq f(g \sin\varphi + R\dot{\Psi}^2). \quad (11)$$

Теперь выясним, будет ли проскальзывание в самом начале движения. Так как при этом  $\varphi = 0$ ,  $\dot{\Psi} = 0$ , то из (10):  $N = 0$ , а значит и  $F_{\text{тр}} = 0$ . Из ДУ цилиндра  $J_{2x}\ddot{\Psi} = F_{\text{тр}}'R$  следует  $\ddot{\Psi} = 0$ . Условие (11) принимает вид  $g \leq 0$ , что неверно! Значит при  $t = 0$  относительного покоя нет, то есть будет проскальзывание. Поэтому в программе нужно численно решать систему (5) до тех, пока не возникнет ситуация относительного покоя («прилипания»). Условие этого таково:  $v_r = 0$ , то есть «абсолютное вращение» точки и вращение цилиндра происходят с одинаковыми угловыми скоростями:  $\dot{\phi} = \dot{\Psi}$ . Очевидно, на начальном этапе движения  $\dot{\phi} > \dot{\Psi}$ . Поэтому при нарушении этого условия в программе следует переход к решению ДУ совместного движения (6). При этом на каждом шаге численного метода необходимо проверять выполнение условия непроскальзывания (11).

Вообще говоря, из численного эксперимента следует, что для всех значений  $k$ , при которых произошла ситуация «прилипания» точки к цилиндру до момента опускания  $M$  в нижнее положение  $M_0$ , условие (11) будет выполняться вплоть до окончания вычислений при

$\varphi = \pi/2$ . Это ожидаемо и из физических соображений. Проверка (11) нужна для строгости решения задачи.

Результаты вычислений показывают следующее. При относительно больших значениях  $k$  вплоть до достижения точкой  $M$  положения  $M_1$  «прилипания» не происходит. Это вполне объяснимо: тяжелый цилиндр еле поворачивается, а легкая материальная точка быстро проскальзывает по нему вниз. Заметим, что в этом случае движение  $M$  полностью описывается уравнением (4), где  $k$  вообще не фигурирует.

Если же  $k$  относительно мал, то тяжелая материальная точка за счет трения увлекает за собой легкий цилиндр. Хотя вначале происходит проскальзывание, но вскоре возникает «прилипание» точки к цилиндру.

При фиксированном значении  $k$  чем больше коэффициент трения, тем меньше значение угла  $\varphi$  при котором происходит «прилипание».

Отметим, что в примере для отладки значения  $k$  и  $f$  таковы, что движение вплоть до достижения  $M_1$  происходит без прилипания. А в тестах эти значения таковы, что «прилипание» происходит. При проверке ответов, которые дают участники, в случае неверного ответа происходит также сравнение со значением, который получался бы без учета «прилипания». При совпадении этих значений, решение оценивается в 6 баллов. (Хотя данный участниками итоговый ответ неверен, однако для участка проскальзывания составленная участниками программа верна.)

### Таблица соответствия погрешностей и баллов

В задаче 1

Абсолютные погрешности	$\pm 0.0001$	$\pm 0.0002$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.002$	$\pm 0.01$
Баллы	7	5	3	2	1

В задаче 2,  $\omega_1 = \dots$

Абсолютные погрешности	$\pm 0.001$	$\pm 0.002$	$\pm 0.005$	$\pm 0.02$	$\pm 0.1$
Баллы	8	7	5	3	1

В задаче 2,  $\varepsilon_1 = \dots$

Абсолютные погрешности	$\pm 0.01$	$\pm 0.02$	$\pm 0.05$	$\pm 0.2$	$\pm 1$
Баллы	5	4	3	2	1

В задаче 2,  $\omega_{cp} = \dots$

Абсолютные погрешности	$\pm 0.001$	$\pm 0.002$	$\pm 0.005$	$\pm 0.02$	$\pm 0.1$
Баллы	5	4	3	2	1

В задании 3.1

Абсолютные погрешности	$\pm 0.0001$	$\pm 0.0002$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.002$	$\pm 0.01$
Баллы	4	3	2	1	1

В задании 3.2

Абсолютные погрешности	$\pm 0.0001$	$\pm 0.0002$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.002$	$\pm 0.01$
Баллы	8	6	4	2	1

В задании 3.3

Абсолютные погрешности	$\pm 0.0001$	$\pm 0.0002$	$\pm 0.0005$	$\pm 0.002$	$\pm 0.01$
Баллы	13	11	7	3	1

При совпадении со значением без учета «прилипания»:

Баллы	6	4	3	2	1
-------	---	---	---	---	---