

Министерство образования и науки России
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический
университет»

Х.С.Гумерова, В.М.Котляр, Н.П.Петухов, С.Г.Сидорин

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА
КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

**Учебное пособие
для заочников**

Казань 2013

УДК 531.534

Прикладная механика. Контрольные задания.

Учебное пособие / Х.С.Гумерова, В.М.Котляр, Н.П.Петухов, С.Г.Сидорин: Казан. нац. иссл. технол. ун-т, – Казань: Изд-во КНИТУ, 2013, 140с.

Учебное пособие составлено в соответствии с программой курса прикладной механики, состоящей из основных вопросов теоретической механики и сопротивления материалов. Изложены теоретические вопросы, приведены контрольные задания с примерами решения задач.

Предназначено для студентов – заочников, изучающих дисциплину «Прикладная механика».

Подготовлено на кафедре теоретической механики и сопротивления материалов.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Казанского национального исследовательского технологического университета.

Рецензенты: зав.кафедрой сопротивления материалов и основ теории упругости, д. ф.-м. н., проф. Р.А.Каюмов, ст. научн.сотр. Ин-та механики и машиностроения Каз НЦ РАН, к. ф.-м. н. Д.Ю.Топорков.

ISBN 5-7882-0337-6

© Казанский национальный исследовательский технологический университет, 2013 г.

© Гумерова Х.С., Котляр В.М., Петухов Н.П., Сидорин С.Г.

«Прикладная механика» - учебная дисциплина, изучающая основные методы расчетов элементов конструкций машин, приборов и аппаратов с целью обеспечения их надежной работы. Для выполнения таких расчетов необходимо уметь анализировать возникающие в конструкциях силы, виды механического движения, формулировать условия прочности и долговечности.

В учебном пособии представлены основные сведения, необходимые для изучения теории расчетов и решения контрольных задач по двум разделам дисциплины: *теоретической механике и сопротивлению материалов*.

1 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Теоретическая механика – это наука о механическом движении и механическом взаимодействии материальных тел.

Теоретическая механика делится на три составные части: *статика, кинематика, динамика*.

1.1 Статика

Основные понятия и определения

Статика – раздел теоретической механики, в котором излагается общее учение о силах и изучаются условия равновесия материальных тел, находящихся под действием сил. Основными *задачами статики* являются: 1) приведение данной системы сил к простейшему виду; 2) определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело.

В зависимости от постановки задачи тело рассматривается с учетом или без учета его размеров. В последнем случае тело представляют в виде *материальной точки*, которая обладает массой и способностью

взаимодействовать с другими телами. Тело, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется *свободным*. В противном случае оно является *несвободным*. *Абсолютно твердым* называют тело, в котором расстояние между двумя любыми его точками остается неизменным. В природе, безусловно, таких тел нет, поскольку при действии сил они изменяют свою форму. Однако, например, при составлении условий равновесия данная гипотеза не вносит существенной погрешности.



Рис. 1.1

Сила – является количественной мерой механического взаимодействия материальных тел. Сила – величина векторная и определяется числовым значением (модулем), направлением и точкой приложения. Условимся в дальнейшем все векторы обозначать буквой с чертой над нею.

За единицу силы в системе СИ принимается Ньютон (Н). Сила, величиной 1 Н, приложенная к покоящемуся телу массой 1 кг, вызывает движение тела с ускорением 1 м/с^2 .

Линия, по которой направлена сила, называется *линией действия силы* (рис. 1.1).

Совокупность нескольких сил, действующих на данное тело или систему тел, называется *системой сил*. Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, то такая система сил называется *плоской*, а если линии действия сил не лежат в одной плоскости, – *пространственной*. Силы, линии действия которых пересекаются в одной точке, называются *сходящимися*, а силы, линии действия которых параллельны друг другу, – *параллельными*.

Твердое тело может находиться в состоянии покоя или некоторого движения. Каждое из этих состояний условимся называть *кинемати-*

ческим состоянием тела. Если две системы сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ и $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_m)$ вызывают у одного и того же свободного тела одинаковое кинематическое состояние, то такие две системы сил называются *эквивалентными*: $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_m)$. Если система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim \bar{R}$, то сила $\bar{R}$ называется *равнодействующей* данной системы сил. Систему сил называют *уравновешенной*, если она, будучи приложенной к покоящемуся телу, не изменяет его состояния покоя. Уравновешенная система сил эквивалентна нулю: $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim 0$.

Сила, действующая на тело по малой площадке, называется *сосредоточенной* (условно считают – приложена в точке).

Силы, действующие на части объема, поверхности или линии, называются *распределенными*. Распределенные силы характеризуются интенсивностью q , т.е. значением силы, приходящейся на единицу объема (в случае объемных сил), на единицу площади (в случае поверхностных сил), на единицу длины (в случае действия сил по линии).

Например, если на брус длиной $l = 10$ м действует равномерно распределенная сила интенсивности $q = 0,2$ кН/м (рис. 1.2), то величина равнодействующей силы будет равна $Q = ql = 0,2$ кН/м $\cdot$ 10м = 2 кН.

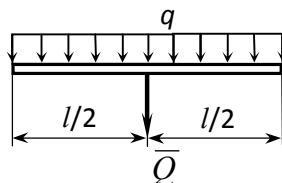


Рис. 1.2

Аксиомы статики

Первая аксиома. Система двух равных по величине, но противоположно направленных сил, приложенных к одному телу, и действующих по одной прямой, эквивалентна нулю. Это утверждение

можно записать следующим образом: $F_1 = F_2$, $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$, $(\bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim 0$. Тело находится в равновесии (рис. 1.3).

Вторая аксиома. *Механическое состояние тела не изменится, если к системе сил добавить или изъять из нее систему сил, эквивалентную нулю.* Суть аксиомы в том что, если к телу приложена система сил $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n)$ и имеется уравновешенная система сил $(\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_m) \sim 0$, то $(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim (\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_m)$.

Следствие аксиом 1 и 2. *Не нарушая состояния абсолютно твердого тела, силу можно переносить вдоль линии ее действия в любую точку.*

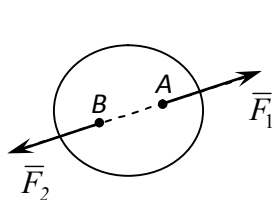


Рис. 1.3

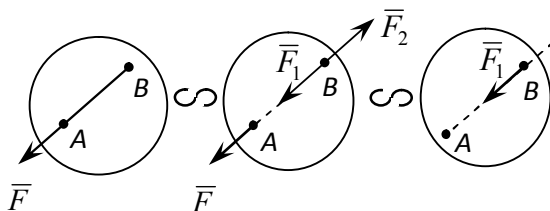


Рис. 1.4

Доказательство. Пусть сила $\bar{F}$ приложена в точке A твердого тела (рис. 1.4). Приложим уравновешенную систему сил $(\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2)$ в точке B, лежащей на линии действия силы $\bar{F}$, причем $\bar{F} = \bar{F}_1 = -\bar{F}_2$. Очевидно, что силы $\bar{F}$ и $\bar{F}_2$ составляют уравновешенную систему сил и ее можно изъять. Тогда $\bar{F} \sim (\bar{F}, \bar{F}_1, \bar{F}_2) \sim \bar{F}_1$. Таким образом, силу можно перемещать по линии ее действия, т.е. она есть вектор скользящий.

Третья аксиома. *При всяком действии одного тела на другое имеет место такое же численно, но противоположное по направ-*

лению противодействие. Эту аксиому в динамике называют *третьим законом Ньютона* о равенстве действия и противодействия.

Допустим тело S (рис. 1.5) оказывает давление в точке A на тело Q силой $\vec{P}$. В свою очередь тело Q действует на тело S в точке A силой $\vec{N}$. В соответствие с аксиомой силы равны по модулю $P = N$, но противоположны по направлению: $\vec{N} = -\vec{P}$.

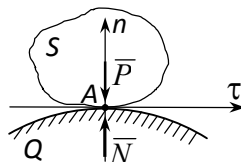


Рис. 1.5

В данном случае силы приложены к разным телам, поэтому здесь нельзя применять первую аксиому статики.

Силы взаимодействия двух тел направлены по одной линии действия и могут зависеть от расстояния между ними. Так, например, любая пара молекулы неона находится в постоянном взаимодействии. Если расстояние между ними $2,5\text{\AA}$ ($1\text{\AA}=10^{-10}\text{ м}$), то возникают силы отталкивания. На расстоянии $3,5\text{\AA}$ действуют уже силы притяжения, а на расстоянии $5\text{\AA}$ силы взаимодействия практически равны нулю.

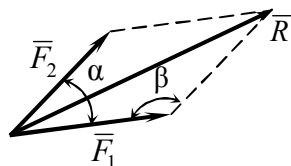


Рис. 1.6

Четвертая аксиома. Система двух сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, приложенных в одной точке

твердого тела, всегда имеет равнодействующую силу $\vec{R}$ (рис. 1.6). Эта равнодействующая равна векторной сумме $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$: $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Все три силы находятся в одной плоскости. Величину равнодействующей можно вычислить по теореме косинусов или найти как модуль диагонали параллелограмма:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \beta} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}.$$

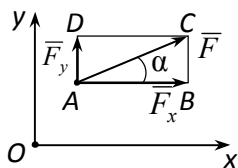


Рис. 1.7

Данная аксиома допускает и обратное утверждение: *силу можно разложить на две силы*. Чаще всего силу $\vec{F}$ раскладывают на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 1.7): горизонтальную $\vec{F}_x$ и вертикальную $\vec{F}_y$. Диагональ AC прямо-

угольника ABCD является равнодействующей $\vec{F}$, а стороны AB и AD – искомыми составляющими. Их модули $F_x = F \cos \alpha$, $F_y = F \sin \alpha$.

Проекция силы на ось

Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между положительным направлением оси и силы:

$$F_x = F \cos(x, \vec{F}), \quad F_y = F \cos(y, \vec{F}).$$

Проекция силы на ось является алгебраической величиной. Если угол между положительным направлением оси и вектором силы заключен в пределах от 0° до 90° , либо от 270° до 360° , то проекция силы на ось положительна. Если он лежит в пределах от 90° до 270° , то проекция силы на ось отрицательна. *Если сила перпендикулярна оси, то ее проекция на эту ось равна нулю.* Например, для сил, изображенных на рис. 1.8, проекциями сил на оси x, y будут:

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha = F_1 \sin \beta, \quad F_{1y} = F_1 \sin \alpha = F_1 \cos \beta,$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha = -F_2 \cos \beta, \quad F_{2y} = F_2 \sin \alpha = F_2 \sin \beta,$$

$$F_{3x} = F_3 \cos \alpha = -F_3 \cos \beta, \quad F_{3y} = F_3 \sin \alpha = -F_3 \sin \beta,$$

$$F_{4x} = 0, \quad F_{4y} = -F_4.$$

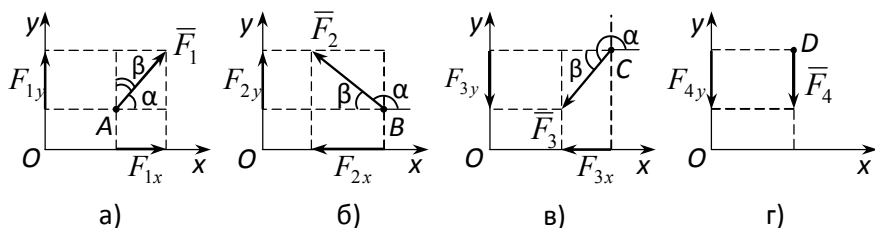


Рис. 1.8

Сложение сходящихся сил. Равновесие сходящихся сил

Изложим на примере четырех сходящихся сил, приложенных в точке O (рис.1.9), два способа сложения сил: векторный и аналитический.

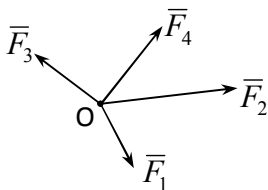


Рис. 1.9

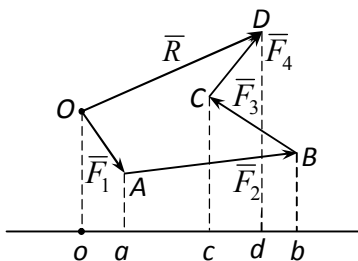


Рис. 1.10

При *векторном способе сложения сходящихся сил* (его называют также геометрическим способом) равнодействующая $\bar{R}$ системы сил приложена в той же точке O и является замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на слагаемых силах (рис.1.10): $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ или $\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4$.

При построении силового многоугольника надо к концу первого слагаемого вектора $\bar{F}_1$ присоединить параллельно перенесенный вектор $\bar{F}_2$, затем присоединить к концу вектора $\bar{F}_2$ параллельно пе-

ренесенный вектор $\overline{F}_3$ и т.д. Векторный способ сложения сходящихся векторов является простым и наглядным. Однако точность определения равнодействующей силы $\overline{R}$ зависит от точности построения силового многоугольника.

На практике чаще применяют *аналитический способ сложения сходящихся сил*, который называют способом проекций. Спроектируем силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ на горизонтальную ось и алгебраически сложим их проекции (рис.1.10):

$$od = oa + ab - bc + cd .$$

Проекцией равнодействующей $\overline{R}$ сходящихся сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ на горизонтальную ось будет отрезок od .

Обобщая эти способы сложения сходящихся сил для плоской системы n сил, и обозначив проекции равнодействующей на оси координат через R_x, R_y , можно написать равенства в векторном виде и в проекциях на оси координат:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^n \overline{F}_k , \quad R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} , \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} . \quad (1.1)$$

Модуль равнодействующей определим через ее проекции на координатные оси: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$. Направление равнодействующей определяется через ее направляющие косинусы:

$$\cos(\hat{x}, \overline{R}) = R_x / R , \quad \cos(\hat{y}, \overline{R}) = R_y / R .$$

В случае равновесия системы сходящихся сил равнодействующая $\overline{R} = 0$. Ее модуль $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 0$, следовательно

$$R_x = 0, \quad R_y = 0. \quad (1.2)$$

Учитывая равенства (1.1) и (1.2), получим *уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил*:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0. \quad (1.3)$$

Таким образом, для *равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проекций всех сил на оси координат*.

Момент силы относительно центра

Точку, относительно которой берется момент, называют центром момента, а момент силы относительно этой точки – моментом относительно центра.

Пусть на тело в точке A действует сила $\vec{F}$ (рис. 1.11). Из некоторого центра O проведем радиус-вектор $\vec{r} = \vec{OA}$. Моментом силы $\vec{F}$ относительно центра O называется вектор, равный векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из центра O в точку A , где приложена сила, на вектор силы $\vec{F}$:

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (1.4)$$

Из определения векторного произведения следует, что вектор $\vec{m}_o(\vec{F})$ направлен перпендикулярно плоскости $\triangle OAB$, образованной векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$, в ту сторону, откуда мы видим силу $\vec{F}$, стремящуюся повернуть тело против хода часовой стрелки. Модуль вектора мо-

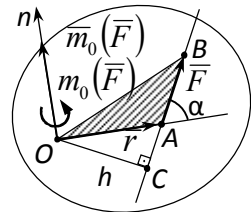


Рис. 1.11

мента равен

$$|\overline{m}_o(\overline{F})| = |\overline{r}| \times |\overline{F}| \cdot \sin \alpha = |\overline{F}| \cdot h,$$

где $h = |\overline{r}| \sin \alpha = OC$ – плечо силы $\overline{F}$ относительно центра O , т.е. кратчайшее расстояние от центра O до линии действия силы $\overline{F}$.

Алгебраический момент силы $\overline{F}$ относительно точки O есть взятое со знаком плюс или минус произведение модуля силы на кратчайшее расстояние h от точки O до линии действия силы:

$$m_o(\overline{F}) = \pm Fh.$$

Момент силы измеряется Ньютон-метрами (Н·м). Алгебраическая величина момента силы $m_o(\overline{F})$ изображается в виде дуговой стрелки (рис. 1.11). Момент является положительным, если сила стремится повернуть тело относительно точки O против хода часовой стрелки. Отметим два свойства момента силы относительно точки. Момент силы относительно точки не изменится, если силу как скользящий вектор перенести вдоль линии действия. Например, если точку приложения A силы $\overline{F}$ перенести в точку C (рис. 1.11). Момент силы относительно точки равняется нулю, если точка лежит на линии действия этой силы. В этом случае плечо h равно нулю.

Пара сил. Момент пары сил

Система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил $\overline{F}$ и $\overline{F}'$, называется парой сил (рис. 1.12). Плоскость, в которой находятся линии действия сил $\overline{F}$ и $\overline{F}'$, называется плоскостью действия пары сил. Кратчайшее расстояние $d = AB$ между линиями действия сил называется плечом пары сил. Пара сил

стремится повернуть тело в плоскости действия сил. *Алгебраический момент пары равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо: $M = \pm Fd$. Знак момента пары определяется так же, как для момента*

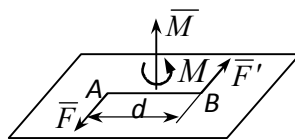


Рис. 1.12

силы. Момент пары можно представить в виде *вектора $\vec{M}$* , направленного перпендикулярно плоскости действия пары сил. *Момент пары – вектор свободный*. Свободный вектор можно переносить в пространстве как угодно, не меняя направление, например, вектор $\vec{M}$ (рис. 1.12) можно направить от точки A или от точки B.

Пара сил не имеет равнодействующей, однако, силы пары не уравновешиваются, так как они не направлены по одной прямой.

Отметим еще одно свойство пары сил: *две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны*.

Связи и их реакции

Тело, которое может совершать любые перемещения в пространстве, называется *свободным*. Тело, перемещения которого ограничены действием других тел, называется *несвободным*. Все то, что ограничивает перемещения данного тела в пространстве, называют *связью*. Такая связь называется *геометрической*. Если связь налагает ограничение еще и на скорость тела, то такая связь называется *кинематической*.

Сила, способная привести покоящееся тело в движение, называется *активной*. Сила, препятствующая со стороны связи тем или иным его перемещениям, называется силой реакции (противодействия) связи или просто *реакцией связи*.

Покажем направление реакций некоторых основных видов геометрических связей.

Гладкая поверхность (рис. 1.13). Поверхность называется гладкой, если можно пренебречь силами трения между взаимодействующими по этой поверхности телами. Гладкая поверхность не позволяет перемещаться телу A по направлению нормали к поверхностям тел в точках их касания. Поэтому реакции $\bar{R}$, $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$, $\bar{R}_3$ будут направлены по нормальям и приложены в точках взаимодействия.

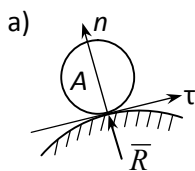


Рис. 1.13

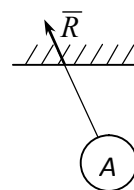
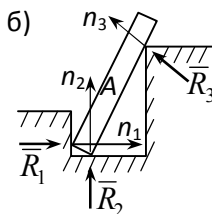


Рис. 1.14

Гибкая нерастяжимая нить (трос, веревка, цепь) (рис. 1.14). Эта связь не дает телу A удаляться от точки подвеса нити, поэтому реакция $\bar{R}$ направлена вдоль нити.

Шарнирно неподвижная опора или цилиндрический шарнир. Часто отдельные части конструкции соединяются друг с другом шарнирами. Шарниры допускают вращение одного тела относительно другого. Если трением в шарнире пренебречь, то он называется гладким. Конструктивно шарнирно неподвижную опору можно представить в виде неподвижного цилиндрического стержня, вставленного в цилиндрическое отверстие тела A (1.15а). Реакция $\bar{R}_B$ будет направлена по нормали к соприкасающимся поверхностям и приложена в точке B . Указать заранее направление реакции $\bar{R}_B$ неподвижной точки B невозможно, поэтому обычно при решении задачи определяют составляющие $\bar{X}_B$, $\bar{Y}_B$ этой реакции (рис. 1.15б), по которым можно опре-

делить величину и направление реакции: $R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$,
 $\cos \alpha = X_B / R_B$.

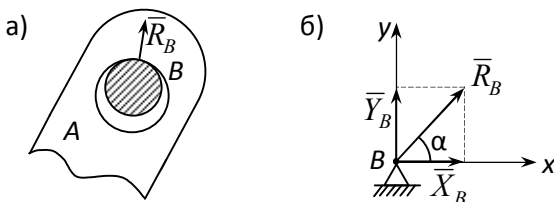


Рис. 1.15

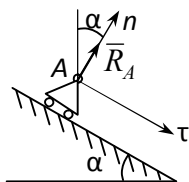


Рис.1.16

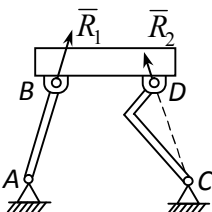


Рис. 1.17

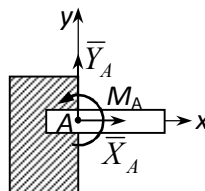


Рис. 1.18

Шарнирно подвижная опора (рис. 1.16). Такая опора может свободно перемещаться параллельно плоскости вдоль касательной τ . Подобно гладкой поверхности реакция $\bar{R}_A$ шарнирно подвижной опоры направлена перпендикулярно плоскости по нормали n .

Невесомый стержень (рис. 1.17). На практике часто встречаются случаи, когда тела соединяются между собой при помощи невесомых стержней с шарнирами на концах. В этих случаях реакции $\bar{R}_1, \bar{R}_2$ направлены вдоль прямой, соединяющей концы стержней (AB и CD).

Заделка (рис. 1.18) – совокупность связей, обеспечивающих неподвижность и отсутствие поворота защемленного тела в точке A . Реак-

циями заделки являются силы $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и момент реактивной пары сил M_A .

Приведенные выше связи являются *идеальными*. Силы реакций идеальных связей полностью ограничивают перемещения точек тел в соответствующих направлениях. Примером неидеальной связи является шероховатая поверхность, для которой перемещения точек тела в направлении линии действия силы трения скольжения, возможны.

Трение скольжения

Опыты показывают, что при смещении одного тела по поверхности другого в плоскости соприкосновения тел возникает сила сопротивления их относительному скольжению, называемая *силой трения скольжения*. В одних случаях наличие силы трения скольжения является необходимым, например, при движении автомобиля по скользкой дороге, а в других случаях – нежелательным, например, трение между деталями механизмов. Сила трения является переменной величиной. Например, чтобы сдвинуть с места покоящееся на горизонтальной шероховатой плоскости тело, приложим к нему горизонтальную активную силу. Если эта сила мала, то тело будет находиться в покое: сила трения уравнивает активную силу. При увеличении активной силы будет также возрастать сила трения. В момент начала движения сила трения достигнет предельного значения. По закону Кулона *предельная сила трения численно равна произведению коэффициента трения на нормальную реакцию*:

$$F_{mp} = Nf .$$

Сила трения всегда направлена в сторону, противоположную возможному относительному движению тела.

Коэффициент трения f – величина безразмерная. Он определяется опытным путем и зависит от материала соприкасающихся тел и состояния поверхностей (характер обработки, температура, влажность и т.п.).

Приведение произвольной системы сил к данному центру

Лемма Пуансо. Действие силы $\vec{F}$ на абсолютно твердое тело не изменится, если эту силу перенести параллельно в любую точку тела, добавляя при этом момент пары, равный моменту переносимой силы относительно точки, куда сила переносится.

Пусть сила $\vec{F}$ приложена в точке A абсолютно твердого тела (рис. 1.19,а). Выберем точку B , не лежащую на линии действия силы $\vec{F}$. Приложим в точке B уравновешенную систему сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$, полагая $\vec{F}_1 = \vec{F}$, $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, с одинаковыми модулями $F = F_1 = F_2$ (рис.1.19,б).

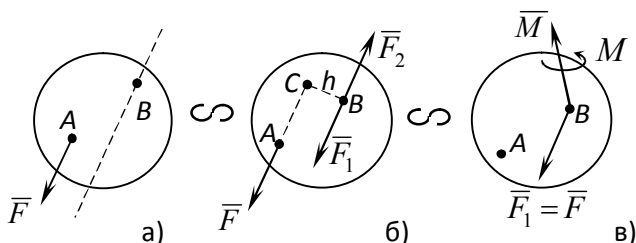


Рис. 1.19

Согласно второй аксиоме статики кинематическое состояние тела не изменилось. Но силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_2$ представляют собой пару сил с моментом $M = F \cdot BC = F \cdot h$. Момент пары можно представить в виде вектора $\vec{M}$, направленного перпендикулярно плоскости действия сил пары. Так как силы $\vec{F}$ и $\vec{F}_1$ одинаковы, то окончательно имеем силу

$\vec{F}$, приложенную в точке B и пару сил с моментом M (рис.1.19,в). Лемма доказана.

Основная теорема статики. Любую систему сил, приложенных к абсолютно твердому телу, можно заменить одной силой $\vec{R}$, равной главному вектору, и одной парой сил с моментом $\vec{M}_o$, равным главному моменту исходной системы сил относительно центра O .

Пусть на абсолютно твердое тело действует произвольная система сил (рис. 1.20). Выберем произвольную точку O , которую назовем *центром приведения*. Перенесем параллельно силы $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ в этот центр.

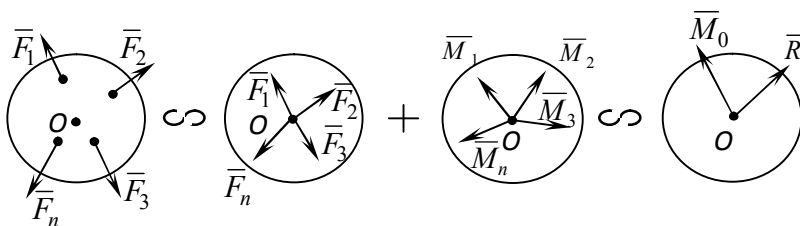


Рис. 1.20

Согласно лемме Пуансо, получим систему сходящихся в центре O сил $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ и систему пар сил $(\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n)$, моменты которых равны моментам исходных сил относительно центра O : $\vec{M}_k = \vec{m}_o(\vec{F}_k)$. Векторную сумму перенесенных в центр O сил назовем *главным вектором*

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k.$$

Векторную сумму системы присоединенных пар сил назовем *главным моментом*

$$\overline{M}_o = \sum_{k=1}^n \overline{m}_o(\overline{F}_k).$$

Таким образом, действие на тело произвольной системы сил эквивалентно заменяется действием главного вектора и главного момента: $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n) \sim (\overline{R}, \overline{M}_o)$.

Заметим, что выбор центра приведения не отражается на модуле и направлении главного вектора $\overline{R}$, но влияет на модуль и направление главного момента $\overline{M}_o$.

Уравнения равновесия системы сил

Если твердое тело находится в равновесии при действии произвольной пространственной системы сил, то главный вектор и главный момент этой системы сил обращаются в ноль:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^n \overline{F}_k = 0, \quad \overline{M}_o = \sum_{k=1}^n \overline{m}_o(\overline{F}_k) = 0.$$

Для равновесия тела эти условия являются необходимыми и достаточными. Если главный вектор и главный момент равны нулю, то равны нулю также их модули:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = 0, \quad M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = 0.$$

Отсюда следует:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0,$$

$$M_x = \sum_{k=1}^n m_x(\overline{F}_k) = 0, \quad M_y = \sum_{k=1}^n m_y(\overline{F}_k) = 0, \quad M_z = \sum_{k=1}^n m_z(\overline{F}_k) = 0. \quad (1.5)$$

Уравнения (1.5) называются *уравнениями равновесия произвольной пространственной системы сил*. Таким образом, при равновесии произвольной пространственной системы сил можно составить шесть независимых уравнений. Произвольная система сил может содержать также пары сил. Любая пара сил не приводится к равнодействующей и, следовательно, не имеет проекций на координатные оси. Поэтому пары сил входят только в уравнения моментов сил относительно осей. Так, например, если линии действия сил пары расположены в плоскости Oxy или ей параллельной, то момент этой пары должен учитываться в последнем уравнении системы (1.5).

Рассмотрим частные случаи равновесия системы сил.

Уравнения равновесия *плоской системы сходящихся сил* (1.3) были получены ранее.

Для равновесия произвольной плоской системы сил, приложенной к твердому телу в плоскости Oxy , необходимо и достаточно, чтобы сумма проекций этих сил на оси x , y и сумма моментов относительно произвольного центра O были равны нулю:

$$\sum_{k=1}^n F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_o(\bar{F}_k) = 0. \quad (1.6)$$

Уравнения (1.6) называются *основными уравнениями равновесия произвольной плоской системы сил*.

Можно ограничиться составлением одного уравнения проекций, например на ось y , но при этом составить два уравнения моментов относительно точек A и B :

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0 \quad (1.7)$$

При этом следует иметь в виду, что прямая проходящая через точки A и B не должна быть перпендикулярна оси y , иначе система (1.7) позволит определить только две неизвестные величины вместо трех.

Существует еще одна форма уравнений равновесия – уравнения моментов относительно точек A , B и C :

$$\sum_{k=1}^n m_A(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_B(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^n m_C(\vec{F}_k) = 0. \quad (1.8)$$

Эти три точки не должны лежать на одной прямой, так как иначе одно из уравнений равновесия окажется следствием двух других.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей

Для системы сил приведенной к равнодействующей, момент равнодействующей относительно произвольного центра равен сумме моментов данных сил относительно того же центра.

Пусть сила $F = 20$ Н приложена под углом $\alpha = 60^\circ$ в точке A с координатами $x_A = OB = 0,4$ м, $y_A = OC = 0,3$ м. Требуется определить момент силы $\vec{F}$ относительно точки O . По определению момент силы $\vec{F}$ относительно точки O равен $m_o(\vec{F}) = Fh$. Нахождение плеча h связано с вычислительными трудностями. Разложим силу $\vec{F}$ (на рис. 1.21 она перечеркнута) на составляющие $\vec{F}_x$ и $\vec{F}_y$.

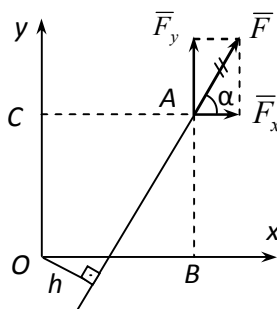


Рис.1.21

Находим модули составляющих:

$$F_x = F \cos \alpha = 10 \text{ Н}, \quad F_y = F \sin \alpha = 17,32 \text{ Н}.$$

По теореме Вариньона

$$\begin{aligned} m_o(\bar{F}) &= m_o(\bar{F}_x) + m_o(\bar{F}_y) = -F_x \cdot OC + F_y \cdot OB = \\ &= -10 \text{ Н} \cdot 0,3 \text{ м} + 17,32 \text{ Н} \cdot 0,4 \text{ м} = 3,93 \text{ Н} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Как видим нахождение момента силы относительно точки в случае, когда сила не параллельна какой-либо оси, проще по теореме Вариньона.

Центр тяжести твердого тела

Если твердое тело находится вблизи земной поверхности, то к ка-

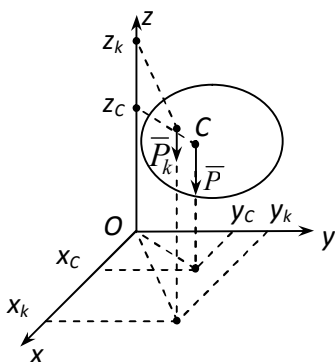


Рис. 1.22

ждой материальной частице этого тела приложена сила тяжести. С достаточной точностью можно считать, что силы тяжести частиц образуют систему параллельных сил. Разобьем однородное тело на n частиц. Сумма сил тяжести всех частиц равна силе тяжести тела: $\sum_{k=1}^n P_k = P$. Координаты этих

частиц обозначим x_k, y_k, z_k , где $k = 1, 2, \dots, n$. Точка C , в которой приложена сила тяжести тела, называется *центром тяжести твердого тела* (рис. 1.22).

Получим формулы, определяющие координаты x_C, y_C, z_C точки C . Применяя теорему Вариньона о моменте равнодействующей сил тяжести относительно оси y , находим

$$m_y(\bar{P}) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) \quad \text{или} \quad Px_C = \sum_{k=1}^n P_k x_k. \quad (1.9)$$

Момент равнодействующей сил тяжести относительно оси x :

$$m_x(\bar{P}) = \sum_{k=1}^n m_x(\bar{P}_k) \quad \text{или} \quad -Py_C = -\sum_{k=1}^n P_k y_k. \quad (1.10)$$

Повернем оси x, z вместе с телом на 90° вокруг оси y и найдем момент равнодействующей сил тяжести относительно оси y :

$$m_y(\bar{P}) = \sum_{k=1}^n m_y(\bar{P}_k) \quad \text{или} \quad Pz_C = \sum_{k=1}^n P_k z_k. \quad (1.11)$$

Из равенств (1.9) – (1.11) следует, что координаты точки приложения силы тяжести тела, являющиеся координатами центра тяжести твердого тела, определяются формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k x_k}{P}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k y_k}{P}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^n P_k z_k}{P}. \quad (1.12)$$

Вес однородной пластинки, расположенной в плоскости Oxy (рис.1.23), можно выразить через плотность материала γ , площадь A и толщину h : $P = \gamma Ah$. Вес k -го элемента пластинки равен $P_k = \gamma A_k h$. Координаты центра тяжести площади фигуры в этом случае определяются по формулам:

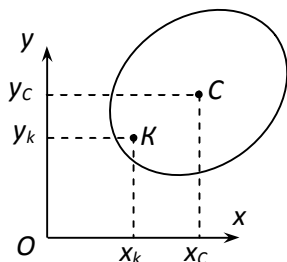


Рис. 1.23

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^n A_k x_k}{A}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^n A_k y_k}{A}.$$

Если твердое тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на оси симметрии. Например, центр тяжести однородного шара находится в геометрическом центре шара. Центр тяжести однородного прямоугольного параллелепипеда находится в точке пересечения диагоналей.

Вопросы для самоконтроля

1. Какое тело называется абсолютно твердым?
2. Чем определяется сила?
3. Сформулируйте основные аксиомы статики.
4. Как, не изменяя кинематическое состояние тела, можно перенести силу?
5. Как определяется проекция силы на ось?
6. Как определяются величина и точка приложения равнодействующей равномерно распределенной силы по линии?
7. Сформулируйте два способа сложения сходящихся сил.
8. Можно ли силу величиной 10 Н разложить на две составляющие величиной по 100 Н?
9. На какие составляющие чаще всего раскладывают силу?
10. При каком условии сходящаяся система сил находится в равновесии?
11. Как определяются знак и величина момента силы относительно точки?
12. В каком случае момент силы относительно точки равен нулю?
13. Какие две силы являются парой сил и чему равен момент пары сил?
14. Имеет ли пара сил равнодействующую?
15. Как направлен вектор момента пары сил?
16. Какое тело называется свободным?
17. Что называют связью?
18. Перечислите основные типы связей, для которых линии действия реакций известны.
19. Как, не изменяя кинематическое состояние тела, можно параллельно перенести силу?
20. Что называют главным вектором и главным моментом системы сил?
21. Каковы условия и уравнения равновесия произвольной плоской системы сил?
22. В каких случаях рекомендуется применять теорему Вариньона?
23. Как по закону Кулона определяется сила трения скольжения?

1.2 Кинематика

Кинематика точки

В кинематике изучаются геометрические законы механического движения материальных тел без учета их масс и причин, вызывающих это движение. Изучение кинематики начинают с рассмотрения дви-

жения точки (кинематика точки). *Основная задача кинематики точки* состоит в том, чтобы по заданному закону движения точки *найти* ее основные кинематические характеристики: *траекторию, скорость и ускорение*. Непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка, называется *траекторией* точки. Если траекторией является прямая линия, движение точки называется *прямолинейным*, а если кривая – *криволинейным*. Движение тел совершается в пространстве с течением времени. За единицу длины при изменении расстояний принимается 1 м. За единицу времени принята 1 с. В задачах кинематики время t принимают за независимое переменное (аргумент). Все другие переменные (расстояния, скорости, ускорения) рассматриваются как функции времени t . Основы, на которых строится кинематика, дают аксиомы геометрии. Никаких дополнительных законов или аксиом для изучения движения тел не требуется. В зависимости от выбора системы отсчета существует три способа задания движения точки: *векторный, координатный и естественный*.

Векторный способ задания движения точки. Положение точки в пространстве однозначно определяется заданием радиус-вектора $\vec{r}$, проведенного из некоторого неподвижного центра O в данную точку M (рис. 1.24). Для определения движения точки нужно знать, как из-

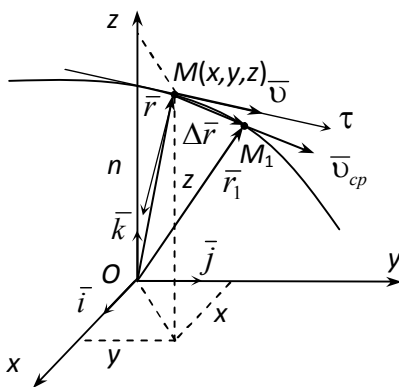


Рис. 1.24

меняется с течением времени радиус-вектор $\vec{r}$, т.е. должна быть задана вектор-функция $\vec{r}$ аргумента t :

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.13)$$

Траектория точки является геометрическим местом концов радиус-вектора $\vec{r}$ движущейся точки.

Пусть в момент времени t точка занимает положение M , определяемое радиус-вектором $\vec{r}$, а в момент $t_1 = t + \Delta t$ – положение M_1 , определяемое радиус-вектором $\vec{r}_1 = \vec{r} + \overline{MM}_1 = \vec{r} + \Delta\vec{r}$. Отношение приращения радиус-вектора $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt , в течение которого произошло это перемещение, равно вектору средней скорости движения точки по секущей MM_1 : $\overline{v}_{cp} = \Delta\vec{r} / \Delta t$.

Предел этого отношения при $\Delta t \rightarrow 0$ является величиной векторной и называется *вектором скорости точки в момент времени t* :

$$\overline{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.14)$$

Таким образом, *вектор скорости точки в данный момент равен производной от радиус-вектора точки по времени*. Вектор $\overline{v}_{cp}$ направлен по секущей MM_1 в сторону движения точки (рис. 1.24). При $\Delta t \rightarrow 0$ точка M_1 стремится к точке M , а предельным положением секущей является касательная. Из этого следует, что *вектор скорости точки $\overline{v}$ направлен по касательной к траектории в сторону движения точки*.

При неравномерном криволинейном движении точки изменяются модуль и направление ее скорости. *Величина, характеризующая изменение скорости точки, называется ускорением точки*. Ускорение,

так же как и скорость, величина векторная. Если за промежуток времени Δt скорость изменилась на величину $\Delta \vec{v}$, то отношение $\vec{a}_{cp} = \Delta \vec{v} / \Delta t$ называется средним ускорением точки за промежуток времени Δt . Предел, к которому стремится вектор среднего ускорения $\vec{a}_{cp}$, когда $\Delta t \rightarrow 0$, является вектором ускорения точки в данный момент времени: $\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$. Учитывая равенство (1.14), имеем

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (1.15)$$

Следовательно, *вектор ускорения точки равен первой производной от скорости или второй производной от радиус-вектора точки по времени.*

Координатный способ задания движения точки. Положение точки M в системе отсчета *Охуз* определяется тремя координатами точки x , y , z . Так как радиус-вектор точки M можно выразить через координаты

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.16)$$

то вместо движения точки в векторной форме (1.13) можно представить параметрические *уравнения движения точки в координатной форме*:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (1.17)$$

Чтобы получить *уравнение траектории* в координатной форме, надо из них исключить параметр t . Следует отметить, что в процессе движения точка может описывать не всю кривую, а только ее часть. Поэтому для определения траектории точки M необходимо задать пределы изменения ее координат в интервале времени движения.

Если этот интервал не определен, то параметр времени изменяется в интервале $0 \leq t < \infty$.

Учитывая (1.14) и (1.16), получаем

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \bar{i} + \frac{dy}{dt} \bar{j} + \frac{dz}{dt} \bar{k} \quad \text{или} \quad \bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}.$$

Здесь

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

– проекции вектора скорости на оси координат. Точку над буквой будем считать символом дифференцирования по времени. Таким образом, *проекции скорости точки на координатные оси равны первым производным по времени от соответствующих переменных координат точки.*

Зная проекции скорости, найдем ее модуль и направление (т.е. углы α , β , γ , которые вектор $\bar{v}$ образует с координатными осями) по формулам

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

$$\cos \alpha = v_x / v, \quad \cos \beta = v_y / v, \quad \cos \gamma = v_z / v. \quad (1.18)$$

Вектор ускорения точки $\bar{a} = d\bar{v} / dt$. Отсюда на основании формул (1.15) и (1.16) получаем:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2}$$

$$\text{или} \quad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}.$$

Проекции ускорения точки на координатные оси равны первым производным от проекций скорости или вторым производным от соответствующих координат точки по времени. Модуль и направление ускорения точки определяются по формулам

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta_1 = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{a_z}{a},$$

где $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ – углы, образуемые вектором ускорения с координатными осями.

В случае прямолинейного движения, которое задается одним уравнением $x = f(t)$, скорость и ускорение точки будут

$$v = dx / dt, \quad a = dv / dt = d^2 x / dt^2.$$

Естественный способ задания движения. Этим способом удобно пользоваться в тех случаях, когда траектория движущейся точки известна. Пусть точка M движется по некоторой криволинейной траектории (рис. 1.25). Выберем произвольный центр O за начало отсчета, а также положительное направление отсчета криволинейной координаты s . Положение точки M на траектории в любой момент времени можно определить, если задан *закон движения точки в естественной форме*, т.е. задан закон изменения координаты

$$s = f(t). \quad (1.19)$$

Установим связь между естественным и координатным способами задания движения точки. В курсе дифференциальной геометрии доказано равенство $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, где ds – элементарное перемещение точки вдоль дуги траектории за время dt , а dx, dy, dz – проекции элементарного перемещения на оси x, y, z . Разделим обе части равенства на dt :

$$ds/dt = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = v,$$

где v – алгебраическая скорость точки:

$$ds/dt = \dot{s} = v. \quad (1.20)$$

Первая производная по времени от криволинейной координаты называется алгебраической скоростью точки.

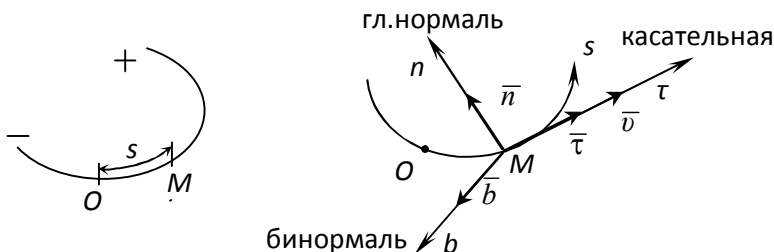


Рис. 1.25

Рис. 1.26

Так как всегда $dt > 0$, то знак v совпадает со знаком ds . Если $v > 0$, то скорость направлена в сторону положительного отсчета координаты s , а если $v < 0$, то – в противоположную сторону.

Естественными осями называют подвижную прямоугольную систему осей, направленных по касательной, главной нормали и би-нормали к траектории. Эти оси, называемые осями естественного трехгранника, направлены следующим образом: ось $M\tau$ – по касательной к траектории в сторону положительного отсчета координаты s ; ось Mn – по нормали к траектории, лежащей в соприкасающейся плоскости $M\tau n$ и направленной в сторону вогнутости траектории; ось Mb – перпендикулярно к первым двум так, чтобы она образовала с ними правую систему осей (рис. 1.26). Орты $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ являются ортами касательной τ , главной нормали n и биномали b . Они перемещаются вместе с точкой M по траектории, изменяя свои направления.

Определение ускорения при естественном способе задания движения. Вектор скорости $\vec{v}$ направлен по касательной (рис. 1.26). Подставляя выражение вектора скорости в виде $\vec{v} = v\vec{\tau} = \dot{s}\vec{\tau}$ в формулу (1.15), получаем

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{s}\vec{\tau})}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}. \quad (1.21)$$

Вектор $\ddot{s}\vec{\tau}$ направлен вдоль касательной в сторону возрастания координаты s при $\ddot{s} > 0$. При $\ddot{s} < 0$ этот вектор направлен в противоположную сторону.

Величина и направление второго слагаемого (1.21) зависят от производной $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Так как $\vec{\tau}$ является вектором с постоянным модулем,

его производная по скалярному аргументу t является вектором, перпендикулярным $\vec{\tau}$ и равным произведению модуля $\vec{\tau}$ на производную угла его поворота по времени: $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = |\vec{\tau}|\frac{d\varphi}{dt}\vec{n} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{n}$. Следовательно,

но, $v\frac{d\vec{\tau}}{dt} = v\frac{d\varphi}{dt}\vec{n} = v\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt}\vec{n} = v^2\frac{d\varphi}{ds}\vec{n}$. Предел отношения элементарного угла поворота касательной к длине соответствующей дуги кривой равен кривизне кривой k в данной точке или величине, обратной радиусу кривизны кривой ρ в данной точке: $\frac{d\varphi}{ds} = k = \frac{1}{\rho}$.

Таким образом, вектор ускорения точки расположен в соприкасающейся плоскости и раскладывается на две взаимно перпендикулярные составляющие, одна из которых направлена по касательной к траектории точки, а вторая – по главной нормали к этой траектории в сторону вогнутости:

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n} = a_\tau\vec{\tau} + a_n\vec{n} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.22)$$

Составляющая ускорения в направлении бинормали равна нулю $\bar{a}_s = 0$. Вектор $\bar{a}_\tau$ называется вектором касательного ускорения. Алгебраическая величина касательного ускорения равна

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \text{или} \quad a_\tau = \dot{v} = \ddot{s}. \quad (1.23)$$

Касательное ускорение определяет изменение величины (модуля) скорости. Если $a_\tau > 0$, то скорость точки увеличивается – ее движение ускоренное и направления векторов $\bar{v}$ и $\bar{a}_\tau$ совпадают (рис. 1.27). Если $a_\tau < 0$, то скорость точки уменьшается – движение замедленное,

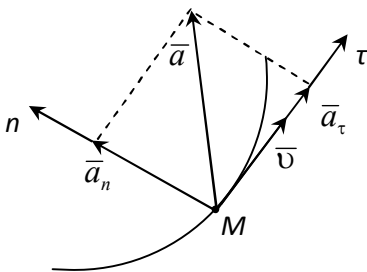


Рис. 1.27

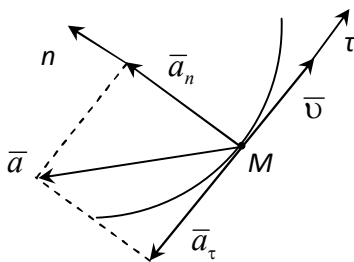


Рис. 1.28

направления векторов $\bar{v}$ и $\bar{a}_\tau$ противоположны (рис. 1.28).

Вектор $\bar{a}_n$ называется вектором нормального ускорения. Из (1.22) следует, что его модуль

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \quad (1.24)$$

Нормальное ускорение определяет изменение направления вектора скорости. Нормальное ускорение может быть равным нулю в трех случаях: 1) точка движется по прямой ($\rho \rightarrow \infty$); 2) в данный мо-

мент времени скорость точки равна нулю ($v = 0$); 3) движущаяся точка находится в точке перегиба траектории ($\rho \rightarrow \infty$).

По составляющим a_τ и a_n можно определить модуль ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}.$$

Получим еще одну формулу для определения модуля касательного ускорения. Из (1.18) имеем $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Производная по времени от этого выражения $2v\dot{v} = 2v_x\dot{v}_x + 2v_y\dot{v}_y + 2v_z\dot{v}_z$. Отсюда

$$a_\tau = \dot{v} = \frac{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}{v}. \quad (1.25)$$

Формулой (1.25) можно воспользоваться в случае, если движение точки задано координатным способом.

Частные случаи движения точки.

а) Равномерное движение. Движение точки с постоянной алгебраической скоростью называется *равномерным*. В этом случае $a_\tau = 0$, $v = \text{const}$. Интегрируя выражение (1.20), получим $s = vt + C$, где C – постоянная интегрирования, определяемая из начального условия. Пусть при $t = 0$ координата точки S имела значение s_0 . Подставляя эти значения t , S в выражение для S , находим $s_0 = v \cdot 0 + C$. Следовательно, $C = s_0$, и закон движения точки записывается так:

$$s = vt + s_0.$$

Ускорение в случае равномерного криволинейного движения точки равно нормальному ускорению $a = a_n = v^2 / \rho$. При прямолинейном равномерном движении ускорение равно нулю, т.к. $1/\rho = 0$.

б) Равнопеременное движение. Движение точки с постоянным по модулю касательным ускорением называется *равнопеременным*. Найдем закон изменения скорости и закон движения точки. Пусть при $t = 0$ начальная скорость $v(0) = v_0$ и начальная координата $s(0) = s_0$. Так как $a_\tau = \text{const}$, то согласно (1.23) $dv/dt = a_\tau$. Интегрируя, получим $v = a_\tau t + C_1$. В свою очередь $v = ds/dt$, и поэтому, с учетом выражения для v , после интегрирования $s = 0,5a_\tau t^2 + C_1 t + C_2$. Постоянные интегрирования найдем из начальных условий. Для момента времени $t = 0$

$$v_0 = a_\tau \cdot 0 + C_1, \quad s_0 = 0,5a_\tau \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2.$$

Следовательно, $C_1 = v_0$, $C_2 = s_0$ и выражения для v и s записываются следующим образом:

$$v = a_\tau t + v_0, \quad s = 0,5a_\tau t^2 + v_0 t + s_0 \quad s = 0,5a_\tau t^2 + v_0 t + s_0.$$

Кинематика твердого тела

Поступательное и вращательное движения твердого тела

В кинематике, как и в статике, будем считать, что тело является абсолютно твердым. Задачи кинематики твердого тела разделяются на две части:

- 1) задание движения и определение кинематических характеристик движения тела в целом;

- 2) определение кинематических характеристик движения отдельных точек тела.

Решая задачу кинематики твердого тела, нужно, прежде всего, установить вид движения. Различают пять видов движения твердого тела:

- 1) поступательное движение твердого тела;
- 2) вращение твердого тела вокруг неподвижной оси;
- 3) плоское (плоскопараллельное) движение твердого тела;
- 4) движение твердого тела с одной неподвижной точкой;
- 5) сложное движение твердого тела.

Рассмотрим поступательное и вращательное движения твердого тела.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, соединяющая две точки тела, движется параллельно самой себе. Все точки твердого тела, движущегося поступательно, описывают одинаковые траектории и в каждый момент времени имеют геометрически равные скорости и ускорения. Поступательное движение не следует смешивать с прямолинейным движением. При поступательном движении тела траектории его точек могут быть любыми кривыми линиями. Например, кузов автомобиля на прямом горизонтальном участке дороги движется поступательно. Траектории всех точек кузова будут прямыми линиями. Педаль велосипеда относительно рамы движется поступательно, а все точки педали движутся по окружностям.

Поступательное движение твердого тела вполне определяется движением какой-нибудь одной его точки. Следовательно, изучение поступательного движения тела сводится к уже рассмотренной задаче кинематики точки.

Вращением вокруг неподвижной оси называется движение твердого тела, две точки которого (или неизменно с ним связанные) ос-

таются во время движения неподвижными. Проходящая через неподвижные точки прямая, называется осью вращения.

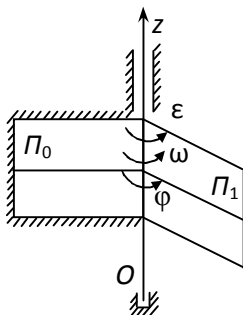


Рис. 1.29

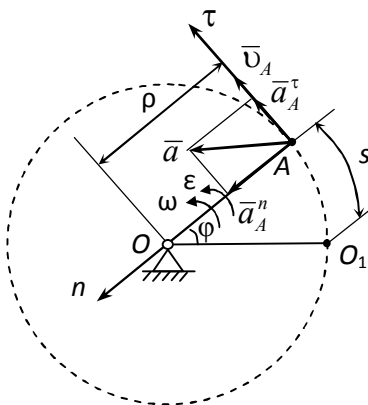


Рис. 1.30

Выберем неподвижную плоскость Π_0 , принимаемую за начало отсчета, а также жестко связанную с телом плоскость Π_1 , которая вращается вместе с ним вокруг оси Oz (рис. 1.29). Угол между введенными плоскостями φ называется углом поворота (измеряется в радианах). Угол φ считается положительным, если при взгляде с положительного направления оси вращения он отсчитывается против хода часовой стрелки.

Положение вращающегося тела в каждый момент времени будет известно, если задана зависимость угла поворота от времени:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (1.26)$$

Это уравнение выражает закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Производная по времени от угла поворота называется *алгебраической угловой скоростью*:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad \omega = \dot{\varphi}.$$

Угловая скорость показывает как быстро и в каком направлении вращается тело. Единицей измерения угловой скорости является *рад/с* или сокращенно – с^{-1} . При равномерном вращении угловая скорость постоянна: $\omega = \text{const}$.

В технике часто скорость вращения тела задают *частотой вращения* n , т.е. числом оборотов, совершаемых телом за одну минуту. Найдём зависимость между n об/мин и $\omega \text{ с}^{-1}$. При одном обороте тело повернется на угол 2π , а при n оборотах на $2\pi n$; этот поворот совершается за время $t = 1 \text{ мин} = 60 \text{ с}$. Тогда $\omega = 2\pi n / 60 = \pi n / 30 \text{ с}^{-1}$.

Производная по времени от алгебраической угловой скорости называется угловым ускорением:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \quad (1.27)$$

Единицей измерения углового ускорения является рад/с^{-2} или сокращенно – с^{-2} . Если в некоторый момент времени $\omega > 0$ и $\varepsilon > 0$ или $\omega < 0$ и $\varepsilon < 0$, то в данный момент вращение тела является *ускоренным*. Если знаки ω и ε разные, то вращение тела является *замедленным*.

Вращение с постоянным угловым ускорением ($\varepsilon = \text{const}$) называется *равнопеременным*. Разделяя переменные равенства (1.27), полу-

чим $d\omega = \varepsilon dt$. Проинтегрируем левую часть этого равенства от ω_0 до

ω , а правую – от 0 до t : $\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \varepsilon \int_0^t dt$. Следовательно,

$$\omega = \varepsilon t + \omega_0, \quad (1.28)$$

где $\omega_0 = \omega(0)$ – начальная угловая скорость.

Так как $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, то с учетом (1.28) $d\varphi = \omega_0 dt + \varepsilon t dt$. Интегрируем

последнее выражение при изменении угла поворота от φ_0 до φ и вре-

мени от 0 до t : $\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \omega_0 \int_0^t dt + \varepsilon \int_0^t t dt$. Вычисляя интегралы, получим

закон равнопеременного вращения:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + 0,5 \varepsilon t^2.$$

Определим скорость и ускорение точек вращающегося тела. Пусть тело OA (рис. 1.30) вращается вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через точку O согласно закону (1.26). Все точки вращающегося тела, не находящиеся на оси вращения, движутся по окружностям. Например, траекторией точки A является окружность радиуса $\rho = OA$. При повороте тела на угол φ точка A перемещается по дуге окружности на $s = \rho \varphi$. Скорость точки A определяется по формуле (1.20):

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{\rho d\varphi}{dt} \quad \text{или} \quad v = \rho \omega = \rho \dot{\varphi}. \quad (1.29)$$

Вектор скорости $\vec{v}$ направлен по касательной к окружности в направлении поворота тела. Таким образом, *числовое значение скоро-*

сти точки вращающегося тела равно произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения.

С учетом (1.29) и (1.27) найдем по формулам (1.23) и (1.24) касательное и нормальное ускорения точки А:

$$a_A^{\tau} = \dot{v} = \rho \dot{\omega} = \rho \ddot{\varphi} = \rho \varepsilon, \quad a_A^n = \frac{v^2}{\rho} = \rho \omega^2. \quad (1.30)$$

Модуль ускорения точки А равен

$$a_A = \sqrt{(a_A^{\tau})^2 + (a_A^n)^2} = \rho \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (1.31)$$

Итак, зная закон вращения тела (1.26) и расстояние точки тела до оси вращения, можно по формулам (1.29) – (1.31) определить скорость и ускорение любой точки вращающегося тела.

Вопросы для самоконтроля

1. На каких аксиомах строится кинематика?
2. В чем состоит основная задача кинематики?
3. Перечислите три способа задания движения точки.
4. Чему равен вектор скорости в данный момент времени, и какое направление он имеет?
5. Как определяются проекции скорости и ускорения точки на неподвижные оси декартовых координат?
6. Как направлены оси естественных координат в каждой точке траектории?
7. В какой плоскости расположен вектор ускорения точки и чему равны его проекции на естественные оси?
8. Что характеризуют собой касательное и нормальное ускорения точки?
9. При каком движении точки равно нулю касательное ускорение, и при каком – нормальное ускорение?
10. Как классифицируются движения точки по ее ускорению?
11. Может ли быть равным нулю радиус кривизны траектории?
12. Дайте определение поступательного движения твердого тела, назовите свойства поступательного движения.

13. Какое движение твердого тела называется вращением вокруг неподвижной оси?
14. Как по заданному закону вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси определяется угловая скорость и угловое ускорение?
15. Как определяется закон равнопеременного вращения твердого тела?

1.3 Динамика

Законы динамики

Динамикой называется раздел теоретической механики, в котором изучается движение материальных тел под действием сил. Материальными объектами в динамике являются материальная точка (точка, обладающая массой), абсолютно твердое тело и механическая система материальных точек или тел. При изучении движения тел в динамике, в отличие от кинематики, принимают во внимание как действующие на них силы, так и инертность материальных тел.

Количественной мерой инертности тела при поступательном движении является масса m тела. В классической (теоретической) механике масса тела предполагается величиной скалярной, положительной, постоянной и не зависящей от скорости тела. В основу динамики положены законы Галилея-Ньютона. Они описывают механическое движение материальных тел по отношению к неподвижным осям и по отношению к инерциальным осям. Инерциальные оси движутся относительно неподвижных осей поступательно, равномерно и прямолинейно. При движении многих задач техники оси, связанные с Землей, считают неподвижными.

Первый закон динамики (закон инерции). Материальная точка, изолированная от действия каких-либо других тел, сохраняет относительно неподвижной системы отсчета состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Такое кинематическое состояние точки называется *инерциальным*, а ускорение точки равно нулю.

Второй (основной) закон динамики. Произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием

силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы

$$m\bar{a} = \bar{F}.$$

На основании второго закона динамики устанавливается связь между массой тела и его весом:

$$mg = P,$$

где $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения.

При одновременном действии на точку нескольких сил $\bar{F}_k$, уравнение, выражающее основной закон динамики в векторной форме, с учетом равенства (1.15) принимает вид

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k. \quad (1.31)$$

Проектируя обе части равенства (1.31) на оси x, y, z , получим:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (1.32)$$

Уравнения (1.32) являются дифференциальными уравнениями движения точки в прямоугольных декартовых координатах.

Аналогично получим дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси:

$$m\ddot{s} = \sum_{k=1}^n F_{k\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum_{k=1}^n F_{kn}, \quad 0 = \sum_{k=1}^n F_{kb},$$

где согласно (1.23) – (1.24) $\ddot{s} = \dot{v} = a_\tau$ – касательное, а $v^2 / \rho = a_n$ – нормальное ускорения.

Третий закон динамики. Всякое действие вызывает равное и прямо противоположное противодействие. Отметим, что этот закон был сформулирован ранее как *третья аксиома статики*.

Две основные задачи динамики точки

Первая задача динамики точки. Зная закон движения точки, найти действующую на точку силу. Если заданы уравнения движения точки в координатной форме (1.17) или в естественной форме (1.19), то путем дифференцирования можно найти составляющие ус-

корения точки, а затем, используя второй закон динамики, определить действующую на точку силу.

Вторая задача динамики точки. Зная приложенные к точке силы, определить закон движения точки. Вторую задачу динамики рекомендуется решать в следующем порядке:

- выбрать систему координат;
- записать начальные условия движения точки;
- изобразить на рисунке точку, смещенную относительно начала координат;
- изобразить на рисунке приложенные к точке силы;
- составить дифференциальные уравнения движения точки;
- проинтегрировать систему дифференциальных уравнений;
- определить постоянные интегрирования через начальные условия и определить искомые величины.

Так как силы, действующие на точку, могут быть постоянными, зависящими от времени, скорости или координаты, то дифференциальные уравнения следует преобразовать к уравнениям с разделенными переменными.

Вопросы для самоконтроля

1. Чем отличается постановка задачи динамики от задачи кинематики?
2. Что является количественной мерой инертности материальной точки?
3. Сформулируйте законы динамики материальной точки.
4. В какой системе отсчета справедливы законы динамики?
5. Назовите две задачи динамики, которые решаются при помощи дифференциальных уравнений движения материальной точки.

2 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Соппротивление материалов – это наука о теоретических основах инженерных расчетов элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при обеспечении необходимой долговечности и экономичности.

Соппротивление материалов является наукой экспериментально-теоретической, она широко использует опытные данные и теоретические исследования, в ней применяются методы теоретической механики и математического анализа, используются данные из разделов физики, материаловедения.

Основные понятия

Все современные конструкции, машины, приборы и сооружения изготавливают или строят по заранее разработанным проектам. Проект – это документ, в котором указываются размеры элементов и деталей конструкции, а также необходимые для их изготовления материалы.

В процессе проектирования необходимо уметь определять размеры элементов конструкции, в зависимости от их назначения, условий эксплуатации, внешних воздействий и используемых материалов.

Любая конструкция должна обладать надежностью при эксплуатации и быть экономичной.

Экономичность в значительной мере определяется расходом материала, применением недорогих конструкционных материалов, возможностью изготовления деталей по наиболее прогрессивным технологиям. Надежность конструкции обеспечивается, если она сохраняет *прочность, жесткость и устойчивость* при гарантированной долговечности.

Прочность – это способность конструкции сопротивляться *разрушению* при действии на нее внешних сил (нагрузок).

Жесткость – способность конструкции сопротивляться *деформации*.

Устойчивость – свойство системы сохранять свое начальное *равновесное положение* при внешних воздействиях.

Долговечность – способность конструкции сохранять необходимые для эксплуатации свойства в течение определенного периода времени.

Реальный объект и расчетная схема

Идеализированная схема реального объекта, отражающая наиболее существенные свойства конструкции, называется *расчетной схемой*. Основными факторами, определяющими расчетную схему, являются: *элементы конструкции, внешние силы, условия закрепления*.

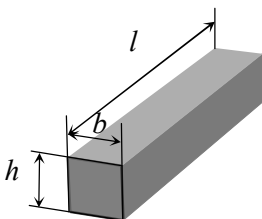


Рис. 2.1

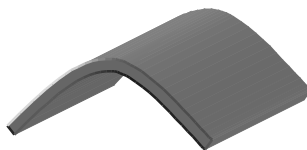


Рис. 2.2



Рис. 2.3

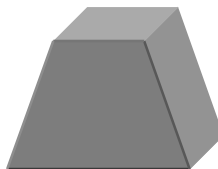


Рис. 2.4

В сопротивлении материалов все элементы конструкций, условно делятся на четыре типа: стержень, пластина, оболочка, массивное тело.

Стержень – тело, длина которого значительно больше его поперечных размеров. Например, для стержня прямоугольного сечения (рис. 2.1) $l \gg b$, $l \gg h$. Геометрическое место точек, совпадающих с центрами тяжести поперечных сечений стержня, называется *продольной осью*.

Оболочка – элемент конструкции, ограниченный двумя поверхностями, отстоящими друг от друга на малое расстояние (рис. 2.2).

Пластина – элемент конструкции, ограниченный с двух сторон плоскостями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами (рис. 2.3).

Массив – элемент конструкции, размеры которого во всех направлениях сравнимы по величине (рис. 2.4).

Внешние силы возникают в результате взаимодействия рассматриваемого тела с другими телами или окружающими средой. Различают объемные и поверхностные силы. *Объемные силы* непрерывно распределены по всему объему тел (вес, силы инерции, магнитные силы). *Поверхностные силы* приложены к поверхности тела.

Соприкосновение тел всегда происходит по некоторой площадке. Поэтому все поверхностные силы являются *распределенными силами*. Если тела соприкасаются по узкой длинной площадке, то считается, что поверхностная сила действует по линии. Такая сила называется *погонной распределенной*. Если размеры площадки, по которой происходит взаимодействие тел, малы по сравнению с размерами тела, то считается, что сила действует в точке, и она называется *сосредоточенной*. При рассмотрении реального объекта в число внешних сил включаются не только заданные активные нагрузки, но и реакции связей.

По характеру изменения во времени, различают нагрузки статические и динамические. *Статические* нагрузки являются постоянными, либо медленно изменяют свою величину или точку приложения (на-

правление). Возникающие при этом ускорения тела (силы инерции) можно не учитывать. *Динамические* нагрузки – изменяются во времени с ускорением, при этом силы инерции должны быть учтены, так как они достигают значительных величин.

Основные гипотезы сопротивления материалов

Предполагается, что все *материалы* являются:

1. *Однородными*. *Однородный* материал имеет одинаковые свойства во всех точках тела. Такое предположение справедливо, когда рассматриваемый объем элемента тела намного превосходит объем его структурных составляющих (атомов, молекул, зерен).

2. *Сплошными*. Сплошными называются среды, не имеющие трещин и пустот. Для таких сред можно применить анализ бесконечно малых величин.

3. *Изотропными*. Тело считается *изотропным*, если его механические свойства одинаковы во всех направлениях. *Анизотропными* называются материалы, свойства которых в разных направлениях различны (например, древесина).

4. *Деформируемыми*. В сопротивлении материалов учитывается способность тела *деформироваться*, т.е. под действием сил изменять свои начальные размеры и форму. Деформации прямо пропорциональны приложенным нагрузкам, т.е. подчиняются закону Гука. При этом деформации принимаются малыми по сравнению с линейными размерами тела.

5. *Упругими*. Упругостью называется свойство тел восстанавливать свои первоначальные форму и размеры после снятия нагружения.

Помимо рассмотренных выше допущений в сопротивлении материалов вводится ряд гипотез, позволяющих значительно упростить расчет:

- *Принцип независимости действия сил* (принцип суперпозиции): результат совместного действия нескольких сил равен сумме результатов действия каждой из них в отдельности.

- *Принцип Сен-Венана* (принцип локальности): на достаточном удалении от места приложения силы конкретный способ приложения этой силы можно не учитывать.
- *Гипотеза Бернулли* (гипотеза плоских сечений): поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к оси стержня до приложения к нему силы, остаются плоскими и нормальными к его оси при действии силы.

Внутренние силы

В любом материала имеются внутренние межатомные силы взаимодействия. При деформации тела изменяется взаимодействие между его частицами. Силы взаимодействия, возникающие между частями тела при его деформировании, называются *внутренними силами*.

Для определения внутренних сил применяется **метод сечений**, который заключается в следующем. Пусть некоторое призматическое тело находится в равновесии под действием системы внешних сил (рис. 2.5а).

Рассечем (мысленно) тело на две части плоскостью, перпендикулярной продольной оси тела (поперечным сечением).

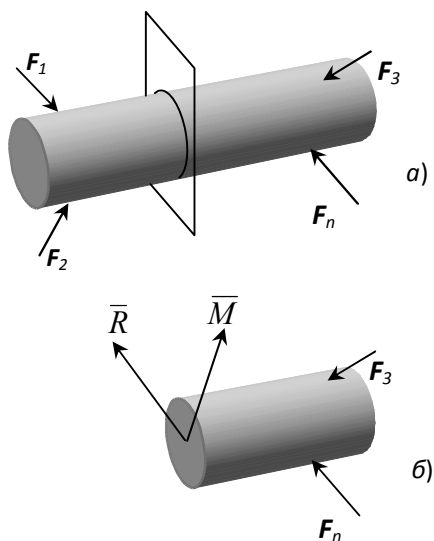


Рис. 2.5

Отбросим правую или левую часть тела. Чтобы оставшаяся часть находилась в равновесии, в сечениях должны действовать некоторые силы.

Заменим действие одной части на другую внутренними силами (рис.2.5б). Эти внутренние силы по характеру приложения - распределенные, в общем случае они не постоянны по всему сечению. Внутренние силы могут быть приведены к их равнодействующим: главному вектору - $\mathbf{R}$ и главному моменту - $\mathbf{M}$.

Рассмотрим правую часть. Введем ортогональную систему координат с началом в точке O . Ось z направим по продольной оси тела, а оси x и y - по осям симметрии поперечного сечения. Разложим главный вектор $\mathbf{R}$ и главный момент $\mathbf{M}$ по осям (рис. 2.6). Получим шесть составляющих, которые называются *внутренними силовыми факторами* (ВСФ):

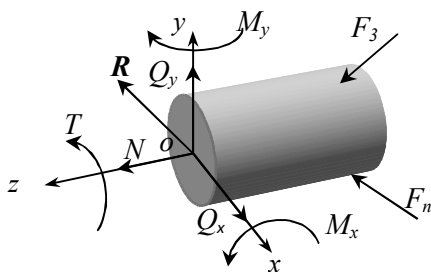


Рис.2.6

N - продольная (нормальная) сила, проекция вектора $\mathbf{R}$ на ось z ;

Q_x, Q_y - поперечные силы, проекции вектора $\mathbf{R}$ на оси x, y соответственно;

$M_z = T$ - крутящий момент, составляющая момента $\mathbf{M}$ вокруг оси z ;

M_x, M_y - изгибающие моменты, составляющие момента $\mathbf{M}$ вокруг осей x, y соответственно.

Уравновесим отсеченную часть. Так как отсеченная часть тела находится в равновесии, то для определения шести неизвестных ВСФ составим шесть уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum Z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sum m_{0x} = 0; \\ \sum m_{0y} = 0; \\ \sum m_{0z} = 0, \end{cases}$$

Из этих уравнений определяются все ВСФ:

Для наглядного представления о характере изменения ВСФ по длине бруса (вдоль оси z) строят их графики. Такой график принято называть *эпюрой* (от французского слова *épure* – чертеж).

Понятие о напряжениях

Используя метод сечений, внутренние усилия находятся в виде сосредоточенных равнодействующих сил и моментов. В действительности внутренние усилия по характеру приложения являются распределенными и в общем случае они не постоянны по поперечному сечению. Рассмотрим правую часть тела (рис.2.6). Выделим на плоскости сечения площадку ΔA ; по этой площадке будет действовать внутренняя сила ΔR (рис.2.7).

Величина отношения $\Delta R / \Delta A = p_{cp}$ называется *средним напряжением* на площадке ΔA . Напряжение в точке получим устремив ΔA к нулю:

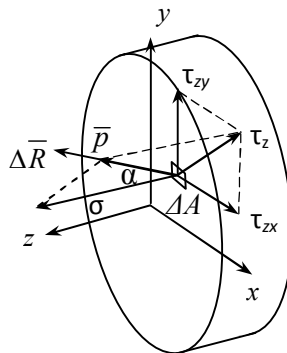


Рис. 2.7

$$\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta A} = \frac{d\bar{R}}{dA}.$$

Это напряжение называется *полным напряжением* в данной точке и в общем случае оно направлено под некоторым углом к плоскости сечения. Спроектировав полное напряжение на внешнюю нормаль к сечению, получим нормальное напряжение в точке $\sigma = p \cdot \cos \alpha$, где α – угол между направлением p и внешней нормалью (для поперечного сечения направление внешней нормали совпадает с направлением оси z). Проекция полного напряжения на плоскость сечения даст касательное напряжение в точке $\tau = p \cdot \sin \alpha$ (рис.2.7).

Нормальные напряжения возникают, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться. Касательные напряжения связаны со сдвигом частиц по плоскости рассматриваемого сечения.

Очевидно, что $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$. Касательное напряжение в свою очередь может быть разложено на составляющие τ_{zx} , τ_{zy} по направлениям осей Ox и Oy . Размерность напряжений – Н/м² (Па).

Нормальные и касательные напряжения связаны с внутренними силами дифференциальными зависимостями

$$\sigma = \frac{dN}{dA}, \quad \tau_{zx} = \frac{dQ_x}{dA}, \quad \tau_{zy} = \frac{dQ_y}{dA}.$$

Понятия о перемещениях и деформациях

Под действием внешних сил любое тело деформируется, его форма и размеры изменяются. Проведем через некоторую произвольную точку A тела в направлениях осей x и y бесконечно малые отрезки AB и AC , длиной dx и dy (рис. 2.8).

После деформации точка A переместится в A_1 . Величина AA_1 называется *линейным перемещением* точки A . Отрезки AB и AC займут новые положения A_1B_1 и A_1C_1 . Их длины изменятся и станут равными

$dx_1 = dx + \Delta dx$, $dy_1 = dy + \Delta dy$.

Величины Δdx и Δdy называются *абсолютными линейными деформациями*.

Отношение приращения длины отрезка к его начальной длине называется *относительной линейной деформацией*. Так, относительная деформация в направлении оси

x равна $\epsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx}$. Аналогично, в направлении оси y — $\epsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy}$.

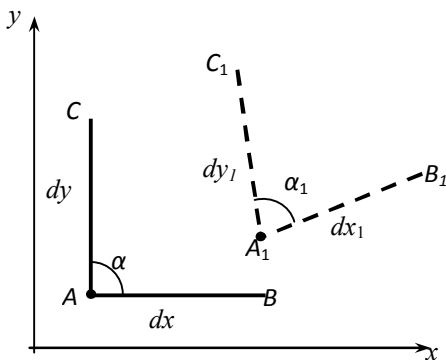


Рис. 2.8

Угол между отрезками AB и BC после деформации изменится и станет равным α_1 . Изменение этого угла $\gamma_{xy} = \alpha - \alpha_1$ — называется *угловой деформацией*.

В любой точке тела можно выделить отрезки dx , dy , dz в направлении осей координат и определить линейные деформации ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , а также изменения углов между этими отрезками — угловые деформации γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} . Совокупность ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} определяет *деформированное состояние в точке*.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое прочность, жесткость, устойчивость конструкции?
2. Что называется стержнем, оболочкой, пластинкой, массивным телом?
3. Какая ось называется продольной осью стержня?
4. Что представляет собой расчетная схема конструкции и чем она отличается от собственно конструкции машины или аппарата?
5. Какие основные допущения в отношении свойств материала принимаются в сопротивлении материалов?
6. В чем состоит принцип независимости действия сил?
7. В чем заключается гипотеза плоских сечений?
8. По каким признакам и как классифицируются силы?
9. Что такое внутренние силы (внутренние силовые факторы)?
10. Какие внутренние силы (внутренние силовые факторы) могут возникать в поперечных сечениях стержня, и какие виды деформаций с ними связаны?
11. В чем суть метода сечений?
12. Какие напряжения называются касательными и нормальными?
13. Какова связь между напряжениями и внутренними силами?
14. Какие деформации называются линейными, и какие угловыми?

2.1 Осовое растяжение – сжатие

Основные понятия

В общем случае в поперечном сечении стержня возникают шесть внутренних силовых факторов: N – продольная сила, Q_x , Q_y – поперечные силы, T – крутящий момент, M_x , M_y – изгибающие моменты. Часто внешние силы действуют так, что некоторые из внутренних силовых факторов равны нулю. Если в конструкциях возникает *только один силовой фактор*, то такой случай нагружения называется *простым*. К простому виду нагружения относится растяжение (сжатие) стержня.

Осовым растяжением (сжатием) стержня называется вид нагружения, при котором все внешние силы приводятся к равнодействующей, приложенной в центре тяжести поперечного сечения и направленной вдоль продольной оси стержня. При растяжении в поперечном сечении возникает единственный внутренний силовой фактор – продольная (нормальная) сила N .

Величина продольной силы N определяется с использованием метода сечений.

Принято следующее **правило знаков**: продольная сила N положительна, если она растягивает отсеченную часть стержня (рис.2.9).

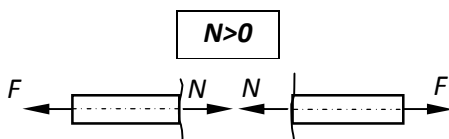


Рис. 2.9

Рассмотрим примеры определения внутренних сил.

Пример 2.1. Стержень постоянного поперечного сечения, нагружен силами $2F$ и $3F$, действующими вдоль продольной оси (рис. 2.10). Определить величину внутренних сил.

Решение. Начало координат расположим на правом конце стержня, а ось Oz направим справа налево. Стержень разделяется на два участка, границами которых являются его концы и точки приложения сосредоточенных сил.

Используя метод сечений на каждом участке, получим:

Участок I: $0 \leq z_1 \leq a$,

$$\sum F_z = N_1 - 2F = 0,$$

$$N_1 = 2F;$$

Участок II: $a \leq z_2 \leq 2a$,

$$\sum F_z = N_2 + 3F - 2F = 0,$$

$$N_2 = 2F - 3F = -F.$$

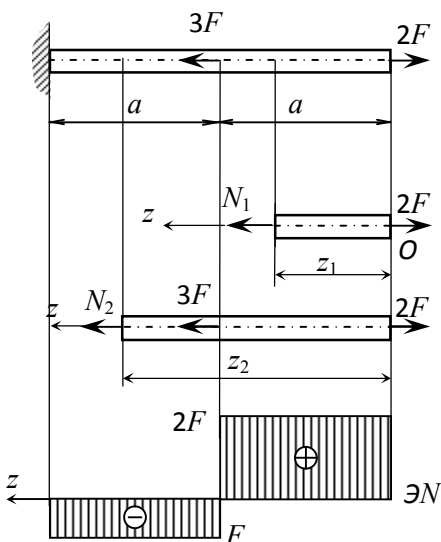


Рис. 2.10

Нормальная сила $N_1 > 0$, следовательно, первый участок растягивается, $N_2 < 0$, следовательно, второй стержень сжимается.

Полученные результаты удобно представить в виде графика (эпюры), показывающего изменение продольной силы N вдоль оси стержня. Области, ограниченные графиком и осью z , принято штриховать линиями перпендикулярными к оси Oz , знак N – обозначать внутри кружка. На рис. 2.10 представлена эпюра N .

Пример 2.2. Два стержня, шарнирно соединенные в точке K , находятся под действием силы F (рис. 2.11а). Определим внутренние силы в стержнях.

Решение. Воспользуемся методом сечений. **Рассечем** стержни сечением $n-n$. **Отбросим** левую отсеченную часть. **Заменим** действие отброшенной части силами N_1 и N_2 . Направление внутренних сил вы-

бираем так, чтобы они были положительны, т.е. растягивали отсеченные части стержней (рис. 2.11б).

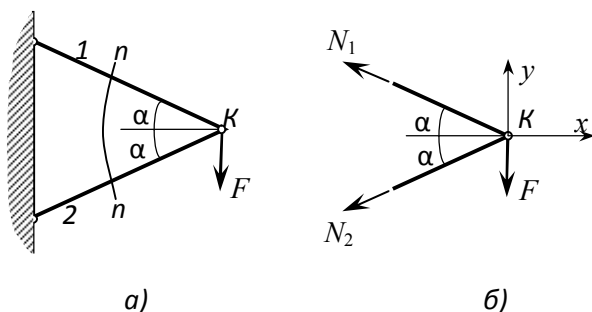


Рис. 2.11

Записывая уравнения равновесия, получим:

$$\Sigma F_{ix} = -N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha = 0,$$

$$\Sigma F_{iy} = N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha - F = 0.$$

Из первого уравнения находим $N_2 = -N_1$.

С учетом второго уравнения, определяем

$$N_1 = \frac{F}{2 \sin \alpha}; \quad N_2 = -\frac{F}{2 \sin \alpha}.$$

Нормальная сила N_1 положительна, следовательно, она растягивает стержень 1, сила N_2 отрицательна, т.е. она сжимает стержень 2.

Пример 2.3. Абсолютно жесткий стержень подвешен на двух деформируемых стержнях и находится под действием силы F (рис.2.12а). Определим внутренние силы в стержнях.

Решение. Используя метод сечений, получим отсеченную часть, показанную на рис. 2.12б.

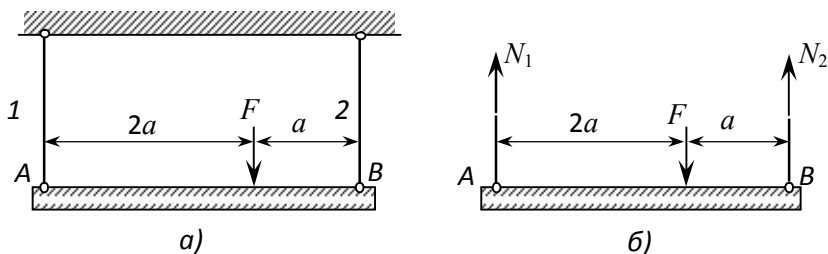


Рис. 2.12

Запишем уравнения равновесия:

$$\Sigma m_{iA} = N_2 \cdot 3a - F \cdot 2a = 0,$$

$$\Sigma m_{iB} = -N_1 \cdot 3a + Fa = 0.$$

Решая систему уравнений, получим:

$$N_1 = \frac{1}{3}F; \quad N_2 = \frac{2}{3}F.$$

Нормальные напряжения. Условие прочности

Нормальная сила в сечении бруса является равнодействующей нормальных напряжений, действующих в плоскости поперечного сечения: $N = \int_A \sigma dA$.

Закон распределения напряжений может быть определен из эксперимента. Установлено, что если на стержень нанести прямоугольную сетку, то после приложения продольной нагрузки вид сетки не изменится, она по-прежнему останется прямоугольной, а все линии прямыми. Поэтому можно сделать вывод о равномерном по сечению распределении линейных деформаций, и, следовательно из закона

Гука, $\sigma = \text{const}$. Тогда $N = \sigma \cdot A$, откуда получим формулу для определения нормальных напряжений в поперечном сечении при растяжении

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Для обеспечения прочности стержня должно выполняться **условие прочности** - конструкция будет прочной, если максимальное напряжение в конструкции не превышает допустимой величины, определяемой свойствами данного материала и условиями работы конструкции, то есть

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq [\sigma],$$

где $N_{\max} = \max|N|$.

Допускаемое напряжение $[\sigma]$ определяется по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_0}{n},$$

где σ_0 - предельное (опасное) для данного материала напряжение, которое определяется экспериментально при испытании материалов;

n - коэффициент запаса прочности.

Величина коэффициента запаса прочности назначается в пределах $n = 1,5 \dots 3$, а иногда и более, с учетом многих факторов, в частности, точности принятых расчетных соотношений, условий эксплуатации конструкции, особых требований по безопасности работы, норм, принятых в отрасли промышленности. В машинах и аппаратах химических производств $n \approx 1,5$.

Определение механических свойств материалов

Для определения опасных напряжений σ_0 необходимо провести испытания образцов материала на растяжение и сжатие вплоть до разрушения. Изучив поведения материала при нагружении, следует определить опасные для данного материала напряжения.

Разные материалы имеют различные свойства при нагружении, в соответствии с чем они делятся на две большие группы: пластичные и хрупкие.

Диаграммы пластичного материала Ст.3, полученные при испытании на растяжение и сжатие, приведены на рис.2.13, диаграммы хрупкого материала СЧ-12-28 – на рис.2.14.

Пластичные материалы на диаграмме растяжения часто имеют характерный участок, называемый площадкой текучести, ему соответствуют напряжения - предел текучести σ_T . Явление текучести сопровождается образованием больших пластических, остаточных деформаций. Появление таких деформаций в элементах конструкции, как правило, приводит к нарушениям в работе конструкции, и является нежелательным.

Опасным напряжением для пластичных материалов принимается предел текучести.

К весьма пластичным материалам относятся медь, алюминий, латунь, малоуглеродистая сталь и др. Менее пластичными являются дюралюмин и бронза. Мерой пластичности является относительное остаточное удлинение при разрыве δ . Если $\delta > 5\%$, то материал считается пластичным.

Хрупкие материалы выдерживают напряжения, равные пределу прочности σ_B , и разрушаются без образования заметных остаточных деформаций.

Опасным напряжением для хрупких материалов является предел прочности.

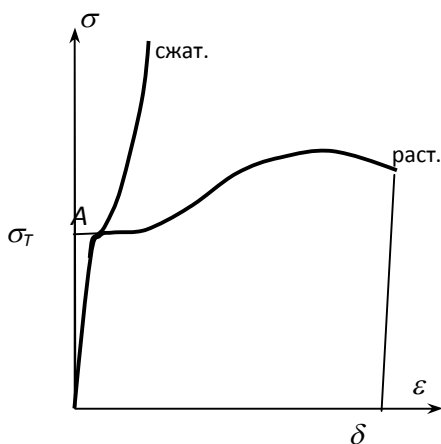


Рис.2.13

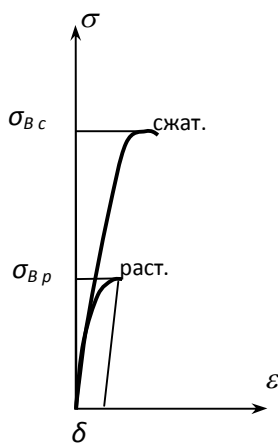


Рис.2.14

К хрупким материалам относятся чугун, высокоуглеродистая инструментальная сталь, стекло, кирпич, строительные камни и др. Для таких материалов величина удлинения при разрыве δ не превышает 2÷5%, а в ряде случаев измеряется долями процента.

Сопоставление предела прочности хрупких материалов при растяжении σ_{Bp} с пределом прочности при сжатии σ_{Bc} показывает, что эти материалы обладают, как правило, более высокими прочностными показателями при сжатии, нежели при растяжении. Величина отно-

шения $k = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{\sigma_{\text{вр}}}$ для чугуна колеблется в пределах 2,5...5, а для керамических материалов $k = 5...10$.

Основные виды расчетов на прочность

Используя условие прочности, можно выполнить следующие основные виды расчетов:

Проектировочный расчет – определение по известной нагрузке и допускаемому напряжению размеров поперечного сечения стержня

$$A \geq \frac{N_{\text{max}}}{[\sigma]}.$$

Проверочный расчет – проверка прочности стержня, т.е. определение по заданным нагрузке и размерам поперечного сечения стержня фактических напряжений и сравнение их с допускаемыми напряжениями

$$\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma].$$

Определение максимальной нагрузки по заданным размерам поперечного сечения и $[\sigma]$

$$N_{\text{max}} = A[\sigma].$$

Определив допускаемую нормальную силу N_{max} и установив связь между нормальной силой и нагрузкой с помощью метода сечений, можно определить и максимальную нагрузку F_{max} .

Деформации при растяжении (сжатии)

Опыты показывают, что при растяжении длина стержня увеличивается, а поперечные размеры уменьшаются, при сжатии - наоборот (рис.2.15).

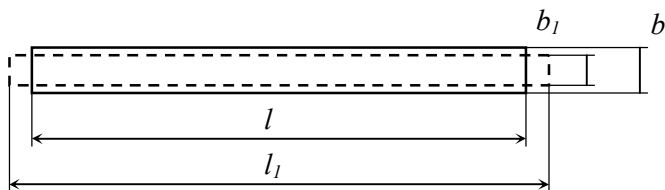


Рис.2.15

Абсолютная продольная и поперечная деформации равны:

$$\Delta l = l_1 - l; \quad \Delta b = b_1 - b.$$

Относительная продольная деформация ε и относительная поперечная деформация ε' равны:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}; \quad \varepsilon' = \frac{\Delta b}{b}.$$

В пределах малых удлинений для большинства материалов справедлив **закон Гука** - **нормальные напряжения в поперечном сечении прямо пропорциональны относительной линейной деформации ε**

$$\sigma = E\varepsilon.$$

Коэффициент пропорциональности E - **модуль упругости**, его величина постоянна для каждого материала. Он характеризует жесткость материала, т.е. способность сопротивляться деформированию под действием внешней нагрузки.

Относительная деформация из закона Гука равна $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$.

Подставляя в закон Гука $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ и $\sigma = \frac{N}{F}$ можно получить формулу для определения абсолютного удлинения (укорочения) стержня

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}.$$

Эта зависимость также выражает закон Гука. Знаменатель EA называется *жесткостью при растяжении - сжатии* или продольной жесткостью.

Величина относительной поперечной деформации и величина относительной продольной деформации связаны между собой соотношением $\varepsilon' = -\nu\varepsilon$.

Отношение относительной поперечной деформации ε' к относительной продольной деформации ε , взятое по модулю, называется коэффициентом поперечной деформации или коэффициентом Пуассона

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|.$$

Эта величина является постоянной для каждого материала и определяется экспериментально.

Значения ν для различных материалов изменяются в пределах $0 \leq \nu \leq 0,5$ ($\nu = 0$ у пробки, $\nu = 0,5$ у резины). Для большинства конструктивных материалов $\nu = 0,25 \dots 0,33$.

E и ν являются основными характеристиками упругости изотропного материала.

Контрольные вопросы

1. Какой вид нагружения стержня называется осевым растяжением (сжатием)?
2. Как вычисляется значение продольной силы в произвольном поперечном сечении стержня?
3. Что такое эпюра продольных сил и как она строится?
4. Как распределены нормальные напряжения в поперечных сечениях центрально-растянутого или центрально-сжатого стержня, и по какой формуле они определяются?
5. Как связаны гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли) и закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении растянутого (сжатого) стержня?
6. Что называется удлинением стержня (абсолютной продольной деформацией)? Что такое относительная продольная деформация?
7. Что называется модулем упругости E ?
8. Что называется жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии)? Как влияет величина E на деформации стержня?
9. Сформулируйте закон Гука при растяжении-сжатии. Напишите формулы для вычисления абсолютной и относительной продольных деформаций стержня.
10. Как определяется коэффициент Пуассона? В каких пределах он изменяется?
11. С какой целью проводятся механические испытания материалов? Какие напряжения являются опасными для пластичных и хрупких материалов?
12. Что называется допускаемым напряжением? Как оно выбирается для пластичных и хрупких материалов?
13. Что называется коэффициентом запаса прочности, и от каких факторов зависит его величина?
14. Напишите условие прочности при растяжении-сжатии. Какие виды расчета на прочность проводятся на основе этого условия?

2.2 Изгиб

Изгибом называется вид нагружения стержня, при котором все приложенные внешние нагрузки приводятся к равнодействующему моменту, плоскость действия которого проходит через продольную ось.

В поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты.

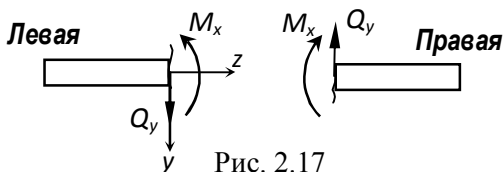
Стержень, работающий на изгиб, называется *балкой*.

Изгиб называется *плоским*, если плоскость действия момента проходит через главную центральную ось инерции сечения.

Если изгибающий момент M_x является единственным внутренним силовым фактором, то такой изгиб называется *чистым*.

Если возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x , то изгиб называется *поперечным*.

Принято следующее **правило знаков**: Для левой и правой отсеченных частей показаны положительные направления поперечной силы и изгибающего момента. (рис.2.17):



Построение эпюр поперечной силы и изгибающего момента

Рассмотрим примеры построения эпюр поперечной силы и изгибающего момента.

Пример 2.5. Балка длиной L закреплена одним концом и нагружена сосредоточенной силой F (рис.2.18). Пусть $F = 4$ кН, $L = 2$ м.

Определим внутренние силовые факторы, возникающие в балке. Воспользуемся методом сечений. Рассечем балку, отбросим правую часть. На левой отсеченной части в месте сечения нарисуем положительно направленные внутренние силовые факторы Q_y и M_x .

Запишем уравнения равновесия отсеченной части, получим:

Участок: $0 \leq z \leq L$

$$\sum F_y = -F + Q_y = 0,$$

$$Q_y = F,$$

$$\sum m_x = M_x - F \cdot z = 0,$$

$$M_x = F \cdot z,$$

$$\sum F_z = N = 0,$$

$$N = 0.$$

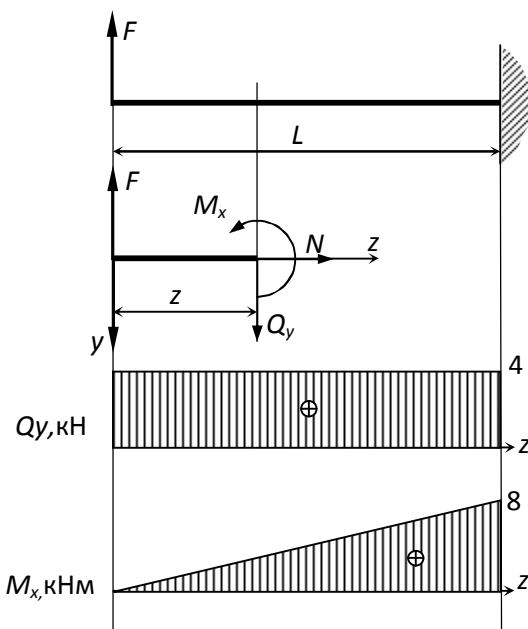


Рис.2.18

Построим эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x вдоль длины балки.

Поперечная сила постоянна по всей длине балки и равна $Q_y = F = 4$ кН. Отложим на эпюре линию параллельную оси z .

Изгибающий момент M_x изменяется по линейному закону в зависимости от расстояния z .

Вычислим его значение в двух точках: в начале при $z = 0$, и в конце балки при $z = L = 2$ м.

$$z = 0, \quad M_x = 0; \quad z = 2 \text{ м}, \quad M_x = 8 \text{ кНм}.$$

Построим по точкам эпюру M_x .

Построение эпюр поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x является одним из основных этапов при расчете конструкций на изгиб. По эпюрам Q_y и M_x определяется опасное сечение, т.е. сечение, в котором может произойти разрушение.

Опасным сечением называется сечение, в котором изгибающий момент достигает наибольшей по модулю величины $M_{x \max} = \max |M_x|$. В данном случае опасным является место закрепления балки.

В некоторых случаях опасным сечением может быть также сечение, где наибольшего значения достигает поперечная сила $Q_{y \max} = \max |Q_y|$.

Пример 2.6. Для балки, изображенной на рис.2.19, построить эпюры поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x и определить опасное сечение. Пусть величины $F = 10$ кН, $a = 2$ м, $b = 3$ м.

Решение.

Определим реакции опор. Запишем уравнения равновесия статики. Из этих уравнений получим:

$$\sum F_z = 0; \quad Z_B = 0.$$

$$\sum m_A = 0;$$

$$Y_B(a + b) - Fa = 0,$$

$$Y_B = F \frac{a}{a + b} = 4 \text{ кН}.$$

$$\sum m_B = 0;$$

$$-R_A(a + b) + Fb = 0,$$

$$R_A = F \frac{b}{a + b} = 6 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения реакции опор используем уравнение:

$$\sum F_y = 0; \quad -R_A + F - Y_B = 0$$

$$-6 + 10 - 4 = 0,$$

$$0 \equiv 0.$$

Значит, реакции определены правильно.

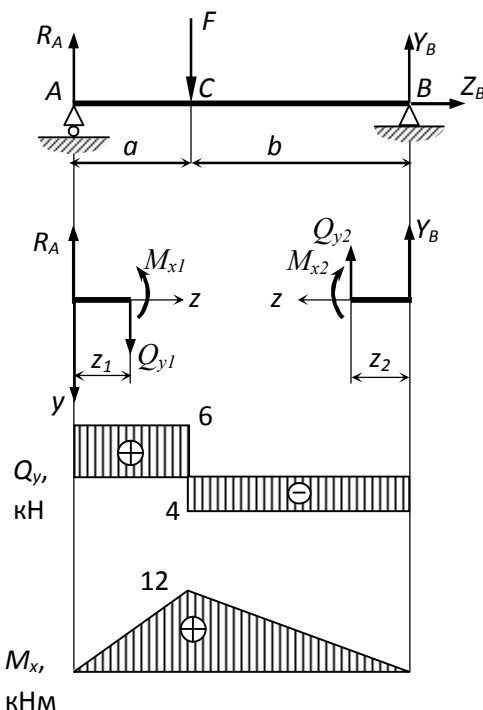


Рис.2.19

Определим внутренние усилия. Следует рассмотреть два участка, границами участков являются точки приложения сосредоточенной силы F и опорных реакций R_A и Y_B . Обозначим границы участков буквами A , C и B .

Рассечем последовательно первый и второй участок. Запишем уравнения равновесия отсеченных частей на участках:

Участок I: $0 \leq z_1 \leq a$

$$\sum F_y = -R_A + Q_{y1} = 0,$$

$$Q_{y1} = R_A,$$

$$\sum m_x = M_{x1} - R_A \cdot z_1 = 0,$$

$$M_x = R_A \cdot z_1.$$

Участок II: $0 \leq z_2 \leq b$

$$\sum F_y = -Y_B - Q_{y2} = 0,$$

$$Q_{y2} = -Y_B,$$

$$\sum m_x = -M_{x2} + Y_B \cdot z_2 = 0,$$

$$M_x = Y_B \cdot z_2.$$

Вычислим Q_y и M_x в граничных точках первого участка:

$$\text{при } z_1 = 0, \quad Q_{y1} = R_A = 6 \text{ кН}, \quad M_{x1} = 0;$$

$$\text{при } z_1 = a = 2 \text{ м}, \quad Q_{y1} = R_A = 6 \text{ кН}, \quad M_{x1} = 12 \text{ кНм}.$$

Вычислим Q_y и M_x в граничных точках второго участка:

$$\text{при } z_2 = 0, \quad Q_{y2} = -Y_B = -4 \text{ кН}, \quad M_{x2} = 0;$$

$$\text{при } z_2 = b = 3 \text{ м}, \quad Q_{y2} = -Y_B = -4 \text{ кН}, \quad M_{x2} = 12 \text{ кНм}.$$

Построим эпюры Q_y и M_x . По полученным эпюрам определим опасное сечение, оно проходит через точку приложения силы F , так как M_x достигает там наибольшего значения.

Пример 2.7. Для представленной на рис.2.20 балки построить эпюры внутренних сил, найти опасное сечение.

Решение.

Определим реакции опор. Заменяем распределенную нагрузку q ее равнодействующей: $Q=q \cdot 2a$, приложенной в середине участка AC (рис.2.21).

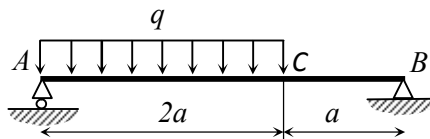


Рис.2.20

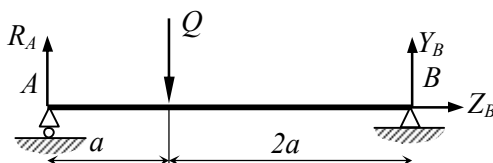


Рис.2.21

Запишем уравнение равновесия.

$$\sum F_z = Z_B = 0;$$

$$\sum M_B = -R_A 3a + Q \cdot 2a = 0; \quad \sum M_A = Y_B \cdot 3a - Q \cdot a = 0.$$

Отсюда находим:

$$R_A = \frac{2}{3}Q = \frac{4}{3}qa; \quad Y_B = \frac{1}{3}Q = \frac{2}{3}qa.$$

Выполним проверку правильности определения реакций опор.

$$\sum F_y = -R_A + Q - Y_B = 0; \quad -\frac{4}{3}qa + 2qa - \frac{2}{3}qa = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

Балка может быть разделена на два участка. Первый имеет границы: точка приложения реакции R_A и точка C , где заканчивается распределенная нагрузка q . Второй участок располагается между точек B и C . Используя метод сечений, рассмотрим сечения участков балки (рис.2.22).

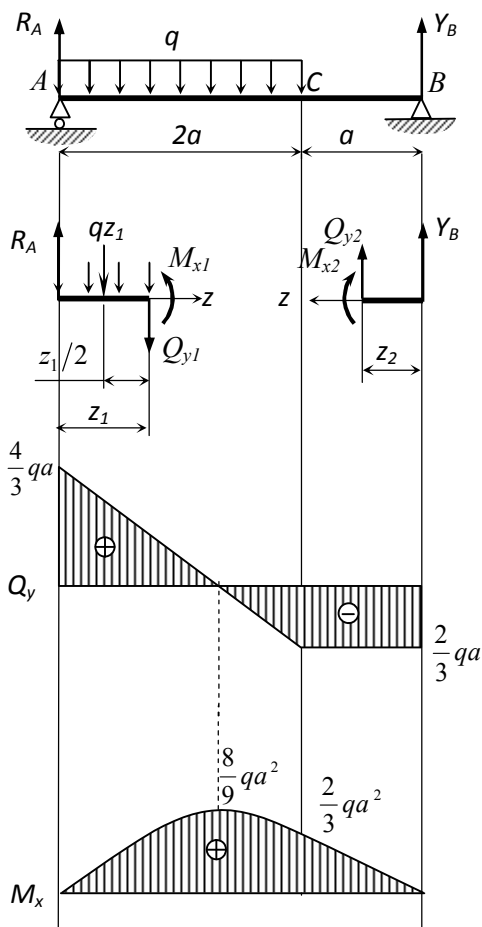


Рис.2.22

1 участок: $0 \leq z_1 \leq 2a$;

$$\sum F_y = Q_{y1} - R_A + qz_1 = 0,$$

$$Q_{y1} = R_A - qz_1$$

$$\sum m_x = M_{x1} - R_A z_1 + q \frac{z_1^2}{2} = 0,$$

$$M_{x1} = R_A z_1 - q \frac{z_1^2}{2}.$$

2 участок: $0 \leq z_2 \leq a$;

$$\sum F_y = -Q_{y2} - Y_B = 0,$$

$$Q_{y2} = -Y_B.$$

$$\sum m_x = -M_{x2} + Y_B z_2 = 0,$$

$$M_{x2} = Y_B z_2$$

Вычислим Q_y и M_x на границах участков:

$$z_1=0, \quad Q_{y1} = \frac{4}{3} qa, \quad M_{x1} = 0;$$

$$z_1=2a, \quad Q_{y1} = -\frac{2}{3} qa,$$

$$M_{x1} = \frac{2}{3} qa^2;$$

$$z_2=0, \quad Q_{y2} = -\frac{2}{3}qa, \quad M_{x2} = 0;$$

$$z_2=a, \quad Q_{y2} = -\frac{2}{3}qa, \quad M_{x2} = \frac{2}{3}qa^2;$$

Построим эпюры Q_y и M_x на участках. Из выражений для внутренних усилий следует, что эпюра Q_y является прямолинейной как на первом, так и на втором участках, в то время как эпюра M_x на первом участке квадратичная парабола, а на втором прямая линия. Для построения эпюры M_x на первом участке следует исследовать функцию на экстремум и определить его.

Как известно из курса математического анализа, для определения экстремума функции следует определить ее первую производную, приравняв ее нулю, найти аргумент, затем его значение подставить в функцию и вычислить экстремум функции.

$$(M_x)' = (R_A z_1 - q \frac{z_1^2}{2})' = 0,$$

$$R_A - qz_1 = 0,$$

$$z_1 = \frac{R_A}{q} = \frac{4}{3}a,$$

$$M_{x \max} = R_A z_1 - \frac{qz_1^2}{2} = \frac{8}{9}qa^2.$$

Отложим значение $M_{x \max}$ и построим эпюру изгибающего момента на первом участке по трем точкам (рис.2.22).

По эпюре находим опасное сечение. Им является сечение, где

$$M_{x\max} = \frac{8}{9} qa^2.$$

Правила проверки эпюр

Между изгибающим моментом, поперечной силой и распределенной силой существуют дифференциальные зависимости :

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y, \quad \frac{dQ_y}{dz} = -q,$$

то есть *первая производная от изгибающего момента по длине участка равна поперечной силе, а также производная от поперечной силы равна интенсивности распределенной нагрузки.*

Эти соотношения называются *теоремой Журавского*.

На основании теоремы Журавского и условий равновесия могут быть сформулированы **правила проверки эпюр**:

1. В точке, где на балку прикладывается сосредоточенная сила, на эпюре Q_y должен быть скачок, равный по величине и направлению приложенной силе.
2. В точке приложения сосредоточенного момента на эпюре M_x должен быть скачок, равный по величине приложенному моменту.
3. На участке, где приложена распределенная нагрузка, эпюра Q_y является наклонной прямой (наклон по направлению действия нагрузки), а эпюра M_x - кривой, выпуклость которой направлена навстречу распределенной нагрузке.
4. На участках, где $Q_y > 0$, M_x возрастает, на участках, где $Q_y < 0$, M_x убывает, если $Q_y = 0$ (эпюра пересекает нулевую линию), то эпюра M_x имеет экстремум.
5. В тех точках, где на эпюре Q_y имеется скачок, на эпюре M_x будет излом.
6. Чем больше по модулю величина Q_y , тем быстрее изменяется эпюра M_x .

Эти правила справедливы, если проверять эпюры, начиная с левого конца балки к правому.

Напряжение при чистом изгибе

Определим нормальные напряжения, возникающие при чистом изгибе балки, когда $Q_y = 0$, $M_x = \text{const}$.

В произвольной точке А балки (рис. 2.23а) в общем случае могут возникать нормальные напряжения σ_z , σ_x , σ_y . Однако экспериментально установлено, что при изгибе нормальные напряжения σ_x , σ_y пренебрежимо малы по сравнению с напряжениями σ_z . Также экспериментально установлено, что при деформации изгиба поперечные сечения балки поворачиваются, оставаясь практически плоскими и перпендикулярными к продольной оси балки.

На основе этих данных для упрощения анализа напряженно-деформированного состояния балки при чистом изгибе принимаются следующие гипотезы:

1. При чистом изгибе продольные волокна балки не взаимодействуют друг с другом в перпендикулярных к ним направлениях. Из этого предположения следует, что в любой точке $\sigma_x = \sigma_y = 0$.

2. Поперечные сечения балки при чистом изгибе, плоские до деформации, после деформации остаются плоскими и перпендикулярными к продольной оси.

Кроме того, полагаем, что связь между напряжениями и деформациями определяется законом Гука: $\sigma = E\varepsilon$. Здесь $\sigma = \sigma_z$ – нормальное напряжение в поперечном сечении, ε – продольная деформация при чистом изгибе.

Из гипотезы плоских сечений следует, что поперечные сечения, выделяющие элемент длиной dz до деформации, после деформации поворачиваются и образуют угол $d\varphi$ (рис. 2.23б).

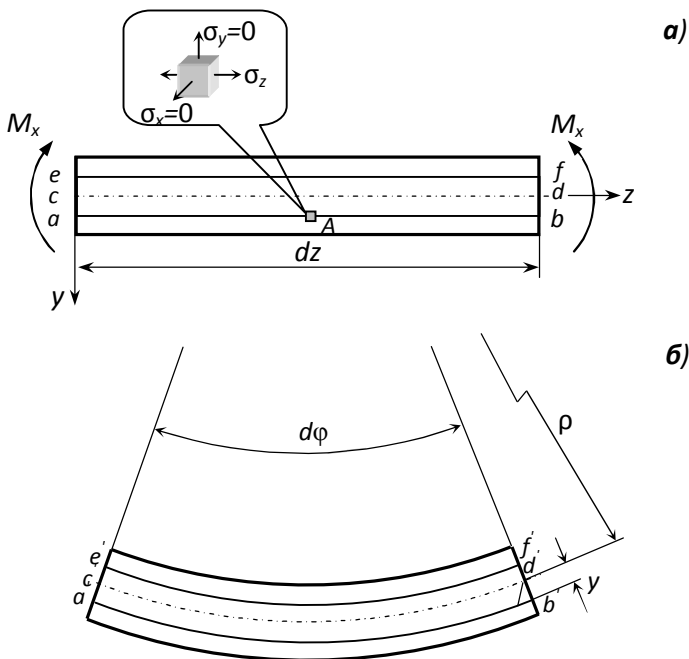


Рис. 2.23

Верхние волокна выделенного элемента укорачиваются, нижние – удлиняются, а длина слоя $c'd'$ не изменяется.

Слой балки, который при изгибе не деформируется, называется *нейтральным слоем*. Линия пересечения нейтрального слоя и плоскости поперечного сечения называется *нейтральной линией*.

Определим относительную деформацию ε волокна ab , отстоящего на расстоянии y от нейтрального слоя. Обозначим через ρ – радиус кривизны линии $c'd'$. Учитывая, что $c'd' = \rho d\varphi$, $a'b' = (\rho + y)d\varphi$, $ab = c'd' = \rho d\varphi$, находим

$$\varepsilon = \frac{\Delta ab}{ab} = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Подставляя это соотношение в закон Гука, получим

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y . \quad (2.1)$$

Между напряжениями в сечении балки и изгибающим моментом существует интегральная связь:

$$M_x = \iint_A \sigma y dA .$$

Подставляя в это равенство соотношение (2.1), получим

$$M_x = \frac{E}{\rho} \iint_A y^2 dA .$$

Величина $\iint_A y^2 dA = J_x$ - геометрическая характеристика поперечного сечения стержня, называемая осевым моментом инерции сечения.

Тогда получим

$$M_x = \frac{E}{\rho} J_x .$$

Кривизна вогнутого нейтрального слоя балки равна $\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}$.

Подставляя это выражение в (2.1), получаем формулу для определения нормальных напряжений в сечениях стержня при чистом изгибе:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y . \quad (2.2)$$

Осевые моменты инерции поперечных сечений стержней

Моментами инерции сечения относительно осей x и y называются геометрические характеристики, определяемые интегралами:

$$J_x = \iint_A y^2 dA,$$

$$J_y = \iint_A x^2 dA.$$

Осевой момент инерции характеризует способность сечения сопротивляться деформации изгиба.

Определим осевые моменты инерции для сечений простой формы.

Прямоугольник

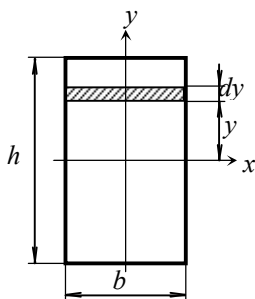


Рис.2.24

Определим момент инерции сечения относительно оси x , проходящей через центр тяжести прямоугольника высотой h и шириной b параллельно основанию (рис.2.24). Выделим из прямоугольника линиями, параллельными оси x элементарную полоску высотой dy и шириной b . Площадь этой полоски $dA = b dy$, расстояние от полоски до оси x равно y .

Подставим эти величины в выражение момента инерции относительно оси x :

$$J_x = \iint_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}. \quad J_x = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично, получим: $J_y = \frac{hb^3}{12}.$

Треугольник

Определим момент инерции треугольника относительно оси x_1 , проходящей через основание (рис.2.25)

$$J_{x_1} = \iint_A y_1^2 dA.$$

Элементарная площадка $dA = b_1 \cdot dy_1$.

Из подобия треугольников получаем

$$b_1 = b \frac{h - y_1}{h}, \text{ где } b - \text{основание треугольника, } h - \text{его высота.}$$

Таким образом,

$$J_{x_1} = \int_0^b b \cdot \frac{h - y_1}{h} \cdot y_1^2 dy_1 = \frac{bh^3}{12}.$$

Известно, что расстояние от основания треугольника до центра тяжести равно $y_c = h/3$.

По формуле параллельного переноса находим моменты инерции относительно центральных осей x и y , параллельных основанию и высоте:

$$J_x = J_{x_1} - y_c^2 \cdot A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}bh = \frac{bh^3}{36},$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36}, \quad J_y = \frac{b^3h}{36}.$$

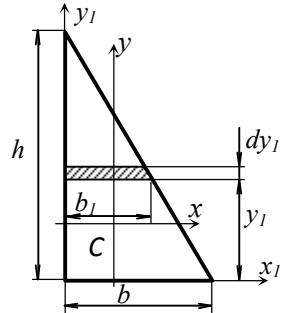


Рис.2.25

Круг

Определим сначала полярный момент инерции относительно центра круга (рис.2.26). За dA примем площадь бесконечно тонкого кольца толщиной $d\rho$, расположенного на расстоянии ρ от центра круга $dA = 2\pi\rho d\rho$.

Тогда

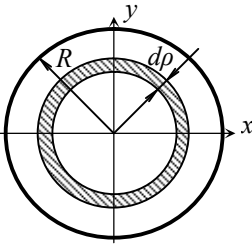


Рис.2.26

$$J_p = \iint_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 \cdot 2\pi\rho d\rho =$$

$$2\pi \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}.$$

Теперь определим осевые моменты инерции. Очевидно, что в силу симметрии $J_x = J_y$; Можно доказать что $J_x + J_y = J_p$.

Откуда

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64}.$$

Кольцо

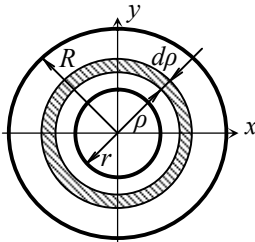


Рис.2.27

Определим моменты инерции кольца, у которого R – наружный радиус, r – внутренний радиус (рис.2.27). Интегрируя полученное ранее выражение для полярного момента инерции круга в пределах от r до R , получим

$$J_p = \int_r^R 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2}$$

$$= \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}.$$

Это выражение может быть представлено в виде

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4), \text{ где } c = d/D.$$

Соответственно $J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - c^4) .$

Моменты инерции сечений сложной формы

Момент инерции сечения сложной формы относительно некоторой оси равен сумме моментов инерций его составных частей относительно той же оси:

$$J_x = J_x^I + J_x^{II} + J_x^{III} + \dots ,$$

что непосредственно следует из свойств определенного интеграла. Таким образом, для вычисления момента инерции сложной фигуры надо разбить ее на ряд простых фигур, вычислить моменты инерции этих фигур, а затем просуммировать их.

Стандартные прокатные профили

Промышленностью выпускаются стандартные прокатные профили (двутавр, швеллер, уголок равнобокий, уголок неравнобокий), которые могут быть использованы как готовые элементы конструкций. Размеры прокатных профилей стандартизированы и сведены в таблицы сортamentов прокатной стали (приведены в приложении). В этих таблицах приводятся размеры сечений и основные геометрические характеристики прокатных профилей в соответствии с их номером.

Условие прочности при изгибе

Как видно из формулы (2.1), нормальные напряжения σ по высоте сечения изменяются по линейному закону. Максимального по модулю значения напряжения достигают в крайних волокнах балки, при $y = y_{\max} :$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max} .$$

Следовательно, можно записать

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x},$$

где $W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}$ – осевой момент сопротивления сечения.

Для *прямоугольного сечения*, ширина которого b , а высота h осевой момент сопротивления сечения $W_x = \frac{bh^2}{6}$.

Для *круглого сечения* диаметром d осевой момент сопротивления $W_x = \frac{\pi d^3}{32}$.

Максимальное нормальное напряжение возникает в опасном сечении балки, где изгибающий момент достигает наибольшей по модулю величины $\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x}$.

Условие прочности при изгибе формулируется следующим образом: *максимальное значение нормального напряжения в балке не должно превышать допускаемого напряжения.*

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma].$$

Напряжения при поперечном изгибе

В случае плоского поперечного изгиба, в сечениях балки действуют изгибающие моменты M_x и поперечные силы Q_y , которые связаны, соответственно, с нормальными σ и касательными τ напряжениями.

Нормальные напряжения, возникающие при поперечном изгибе, могут определяться по формуле, полученной в случае чистого изгиба. Условия прочности по нормальным напряжениям имеют тот же вид, что и при чистом изгибе.

Для определения касательных напряжений введем понятие статического момента отсеченной части сечения. Рассмотрим поперечное

сечение балки шириной $b(y)$ (рис. 2.28). На расстоянии y от оси Ox проведем линию и отсечем часть сечения площади A^* .

Величина $S_x^*(y) = \int_{A^*} y dA$ называется *статическим моментом отсеченной части сечения*.

Действующие в сечении касательные напряжения, определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^*(y)}{J_x b(y)},$$

где Q_y – поперечная сила, J_x – осевой момент инерции.

Условие прочности по касательным напряжениям будет иметь вид:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y\max}}{I_x} \left(\frac{S_x^*(y)}{b(y)} \right)_{\max} \leq [\tau].$$

При поперечном изгибе в произвольной точке сечения одновременно действуют как нормальные, так и касательные напряжения. Балка находится при плоском напряженном состоянии, поэтому для оценки прочности в общем случае необходимо проверить выполнение условий по нормальным и касательным напряжениям, а также провести расчет с использованием соотношений теории прочности, в которой учитывается совместное действие нормальных и касательных напряжений.

Для обеспечения прочности балки из пластичного материала часто используется третья теория прочности, которая в случае плоского изгиба записывается в следующем виде:

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

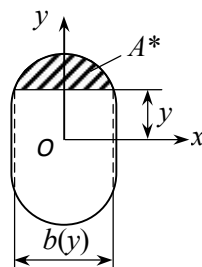


Рис. 2.28

Рациональные формы поперечных сечений балок

В большинстве случаев возникающие при изгибе балок нормальные напряжения значительно больше касательных напряжений. Поэтому при расчете на прочность определяющим является условие прочности по нормальным напряжениям.

Величина $\sigma_{\max}$ обратно пропорциональна W_x . Поэтому рациональной

формой поперечного сечения балки будет такая, для которой, при заданной площади сечения, величина W_x является наибольшей.

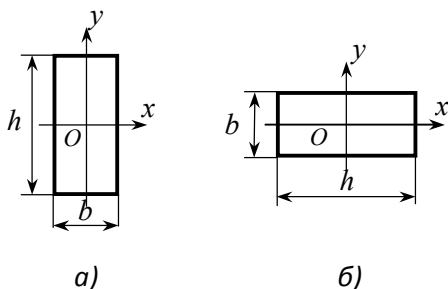


Рис. 2.29

Сечения равной площади $A = bh$, показанные на рис. 2.29а и рис.2.29б имеют раз-

ные моменты сопротивления ($W_x^a > W_x^b$). Поэтому при изгибе балки в вертикальной плоскости лучше использовать балку с сечением рис. 2.36а, т.к. напряжения в ней $\sigma_{\max} = M_x / W_x^a$ будут меньше, чем в балке с сечением, повернутым на 90° (рис. 2.29б).

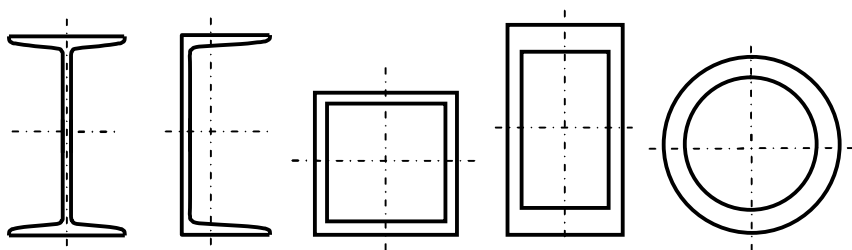


Рис. 2.30

Нормальные напряжения прямо пропорциональны координате точки y . Наибольшие значения σ возникают при $y = y_{\max}$, а ближе к нейтральному слою напряжения меньше и материал там недогружен и он там не нужен. Стержни с сечениями в виде двутавра, швеллера, полых прямоугольников, колец (рис. 2.30), являются рациональными при изгибе.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется балкой?
2. Какой вид нагружения называется изгибом?
3. Какой изгиб называется чистым, поперечным?
4. Как вычисляется изгибающий момент в поперечном сечении балки?
5. Как вычисляются поперечная и продольная силы в поперечном сечении балки?
6. Какие уравнения используются для определения значений опорных реакций?
7. Как проверить правильность определения опорных реакций?
8. Как формулируется гипотеза плоских сечений?
9. Что представляют собой нейтральный слой и нейтральная линия и как они расположены?
10. По какой формуле определяются нормальные напряжения в поперечном сечении балки при чистом изгибе и как они изменяются по высоте балки?
11. Что называется моментом сопротивления сечения и какова его размерность?

2.3 Кручение валов

Основные понятия

Кручением называется вид нагружения, при котором в поперечных

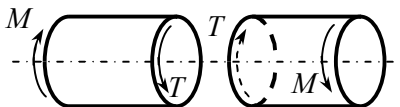


Рис. 2.31

сечениях стержня возникает единственный внутренний силовой фактор – крутящий момент T (рис. 2.31). Стержень, передающий крутящий момент, называется *валом*.

Рассмотрим кручение валов круглого поперечного сечения.

Положительным принято считать момент, направленный против хода часовой стрелки.

Рассмотрим пример построения эпюры крутящего момента.

Пример 2.4. Вал опирается на подшипники и нагружен крутящими моментами $M_1 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_2 = 25 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $M_3 = 35 \text{ кН}\cdot\text{м}$ (рис. 2.32). Построить эпюру крутящего момента T .

Решение. Воспользуемся методом сечений.

Участок I, $0 \leq z_1 \leq a$.

$$T_1 = 0.$$

Участок II, $a \leq z_2 \leq 2a$.

$$T_2 = M_1 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок III, $2a \leq z_3 \leq 4a$.

$$T_3 = M_1 + M_2 = 35 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюра крутящего момента представлена на рисунке 2.32.

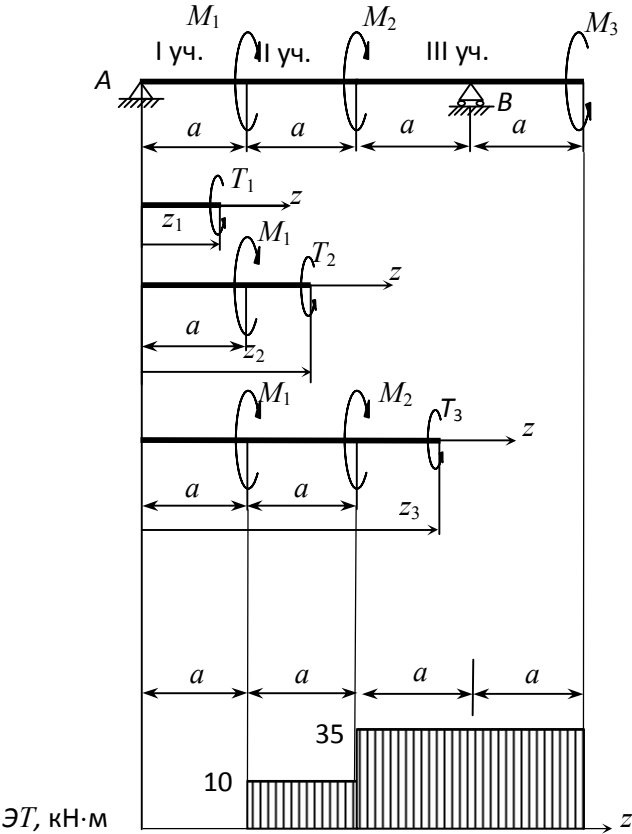


Рис. 2.32

Напряжения при кручении

Опыты показывают, что если на поверхности стержня круглого сечения нанести прямоугольную сетку, а на торцевой поверхности нанести радиальные линии (рис. 2.33), то после деформации кручения будет выполняться следующее:

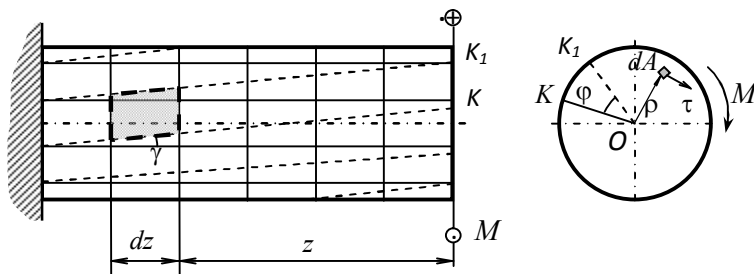


Рис. 2.33

- все образующие поворачиваются на один и тот же угол γ , следовательно, прямоугольники, нанесенные на поверхности, превращаются в параллелограммы;
- поперечные сечения вала остаются круглыми, плоскими, расстояния между ними не меняются;
- каждое сечение поворачивается относительно другого на некоторый угол φ , называемый углом закручивания;
- радиальные линии на торцевой поверхности остаются прямыми, их длина при деформировании не меняется.

На основании этих опытов можно заключить, что в поперечных сечениях действуют *только касательные напряжения* τ , направленные перпендикулярно к радиусу-вектору точки сечения (рис. 2.33). Выделим из стержня элемент в виде цилиндра радиуса ρ длиной dz (рис. 2.34). При кручении правый торец элемента повернется относительно левого на угол $d\varphi$. При этом образующая CB повернется на угол γ и займет положение CB_1 . Угол γ называют углом сдвига.

Зависимость между τ и γ определяется законом Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma$$

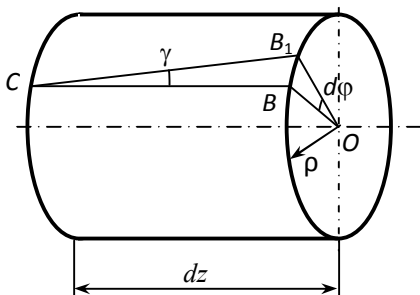


Рис. 2.34

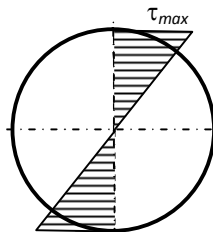


Рис. 2.35

Из треугольника OBB_1 находим $BB_1 = \rho d\varphi$. Из треугольника CBV_1 следует, что $BB_1 = \gamma dz$. Приравняв правые части последних равенств, определяем

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}.$$

Подставляя выражение для γ в закон Гука при сдвиге, получим:

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (2.3)$$

В поперечном сечении вала, расположенном на некотором расстоянии z от торцевого (рис. 2.34), на элементарной площадке dA будет действовать напряжение τ и элементарная сила τdA , момент которой относительно оси вала равен $(\tau dA)\rho$. Следовательно, крутящий момент T , в сечении

$$T = \iint_A \rho \tau dA. \quad (2.4)$$

Подставив выражение (2.3) в (2.4), находим

$$T = \int_A \rho G \rho \frac{d\varphi}{dz} dA = G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = G J_p \frac{d\varphi}{dz}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{T}{G J_p}. \quad (2.5)$$

Величина J_p – *полярный момент инерции* – геометрическая характеристика поперечного сечения. Величина $G J_p$ – называется *жесткостью вала при кручении*. Подставив выражение $\frac{d\varphi}{dz}$ в формулу (2.3), получим

$$\tau = \frac{T}{J_p} \rho.$$

Таким образом, касательные напряжения при кручении прямо пропорциональны расстоянию от центра тяжести сечения до рассматриваемой точки (рис. 2.35). Наибольшие напряжения возникают в точках сечения при $\rho = R$:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{J_p} R.$$

Обозначив $W_p = \frac{J_p}{R}$ – *полярный момент сопротивления сечения*, получим формулу для максимальных касательных напряжений при кручении

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p}.$$

Для сплошного круглого сечения момент сопротивления равен

$$W_p = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}.$$

Для кольцевого сечения - $W_p = \frac{\pi R^3}{2}(1 - c^4) = \frac{\pi D^3}{16}(1 - c^4)$, где $c = d / D$.

Условие прочности при кручении

Условие прочности при кручении формулируется следующим образом: максимальное касательное напряжение, возникающее в опасном сечении вала, не должно превышать допускаемого касательного напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau].$$

Рассмотрим виды разрушения валов, изготовленных из различных материалов при кручении. Валы из пластичных материалов чаще всего разрушаются по поперечному сечению под действием касательных напряжений, действующих в этом сечении (рис. 2.36а). Валы из хрупких материалов, разрушаются по винтовой поверхности, наклоненной к оси вала под углом 45° (рис. 2.36б), т.е. по направлению действия максимальных растягивающих напряжений [1] (рис. 2.37). У деревянных валов первые трещины возникают по образующим цилиндра, так как древесина плохо сопротивляется действию касательных напряжений, направленных вдоль волокон (рис. 2.36в).

Таким образом, характер разрушения зависит от способности материала вала сопротивляться воздействию нормальных и касательных напряжений. В соответствии с этим, допускаемые касательные напряжения принимаются равным $[\tau] = [\sigma_p]$ – для хрупких материалов и $[\tau] = (0,5 \dots 0,6)[\sigma]$ – для пластичных материалов.

Анализируя эпюру касательных напряжений (рис. 2.35) можно отметить, что наибольшие напряжения возникают у поверхности вала, в центральной части они значительно меньше, а на продольной оси – равны нулю. Следовательно, в сплошном валу материал, находящийся в центральной части сечения, в значительной степени недогружен, его влияние на прочность вала мало. Поэтому при кручении стержня *рациональным является кольцевое сечение*.

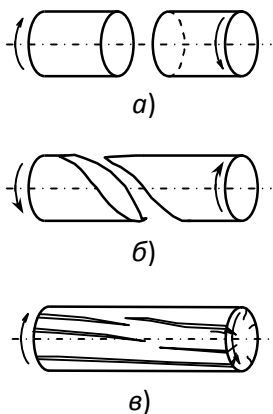


Рис. 2.36

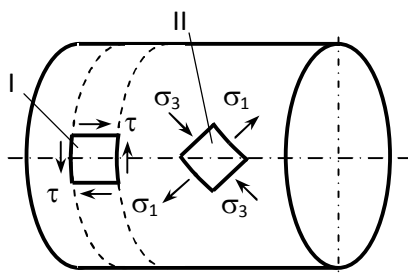


Рис. 2.37

Деформации при кручении

Из формулы (2. 5) следует, что $d\varphi = \frac{T}{GJ_p} dz$.

Если $T = const$ и $GJ_p = const$, то, интегрируя это выражение, получим

$$\varphi = \frac{Tz}{GJ_p} + C_1,$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Угол закручивания, приходящийся на единицу длины, называют *относительным углом закручивания*:

$$\theta = \frac{\varphi}{z} = \frac{T}{GJ_p}.$$

Условие жесткости

Для обеспечения требуемой жесткости вала необходимо, чтобы наибольший относительный угол закручивания не превосходил допускаемого:

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{GJ_p} \leq [\theta].$$

Эта формула выражает условие жесткости вала при кручении, где $[\theta]$ - допускаемый относительный угол закручивания. Величина $[\theta]$ назначается в зависимости от назначения и размеров вала. В машиностроении рекомендуется задавать $[\theta]$ его равным $0,5^\circ$ на 1 м длины вала или в радианах $[\theta] = 0,0087$ рад/м.

Вопросы для самоконтроля

1. Какой вид нагружения называется кручением?
2. Что называется валом?
3. Что такое эпюра крутящего момента и как она строится?
4. Какие закономерности деформации выявляются в опытах на кручение стержня?
5. Какие напряжения возникают в поперечном сечении круглого вала при кручении и как они направлены?
6. Напишите формулу для определения напряжений в поперечном сечении круглого вала при кручении.
7. Какое напряженное состояние возникает в каждой точке круглого вала при кручении?
8. Напишите формулу для определения относительного и полного угла закручивания круглого вала.
9. Что называется жесткостью вала при кручении?

10. Что называется полярным моментом сопротивления, в каких единицах он выражается и чему равен (для круга и кольца)?
11. Чем объясняется, что вал кольцевого сечения при кручении экономичнее вала сплошного сечения?
12. Чему равны наибольшие касательные напряжения при кручении вала? Где они возникают?
13. Как разрушаются при кручении стальные, чугунные и деревянные валы? Как объяснить характер разрушения для каждого из этих материалов?
14. Как производится расчет вала на прочность при кручении?
15. Как выбираются допускаемые напряжения при расчете на кручение?

3 ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Основные требования к оформлению контрольной работы

Контрольная работа выполняется в рабочих тетрадях, на титульном листе которой должны быть указаны название дисциплины, номер группы, фамилия и инициалы студента и шифр задания. Условия задач должны быть полностью переписаны, приведены все исходные числовые данные и чертежи-схемы с размерами, соответствующими шифру.

Решение задач следует выполнять в соответствии с рекомендуемым порядком. Все результаты расчетов приводить с точностью до трех значащих цифр. Графическая часть работы выполняется с соблюдением масштабов и должна содержать расчетную схему, схему деформирования стержневой системы, формы сечений стержней.

Исходные данные к заданию выбираются из соответствующих таблиц и рисунков согласно шифру. Шифр задается в виде двузначного числа по двум последним цифрам зачетной книжки. Номер схемы соответствует последней цифре шифра, а номер строки в таблице – предпоследней цифре шифра. В задаче № 2 номер варианта выбирается по числу, составленному двумя последними цифрами шифра.

Задача №1 Равновесие твердого тела под действием произвольной плоской системы сил

Постановка задачи. Дано абсолютно твердое тело, находящееся под действием силы $\vec{F}$ и силы тяжести груза Q , подвешенного на нити (рис.3.1). Массы тела, стержней и нитей, силы трения в шарнирах не учитываются. Принять $a = 1$ м. Данные взять из таблицы 1.

Определить реакции связей.

Таблица 1

№ строки	F , кН	Q , кН	α , град.	β , град.	γ , град.
0	3	2	30	45	30
1	5	1	45	60	60
2	3	2	30	30	60
3	4	1	45	45	45
4	3	4	30	60	45
5	2	1	30	45	60
6	3	2	30	30	60
7	4	3	30	45	60
8	4	1	45	45	30
9	1	2	60	30	60

Задача №2 Кинематика точки

Постановка задачи. По заданному закону движения материальной точки $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ найти уравнение траектории $y = f(x)$.

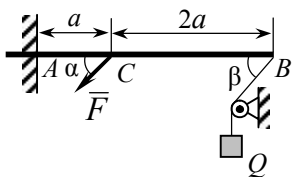
Для момента времени $t = 1$ с определить:

- положение точки на траектории, проекции скорости на координатные оси и ее модуль,
- проекции ускорения на координатные и естественные оси, модуль ускорения, радиус кривизны траектории.

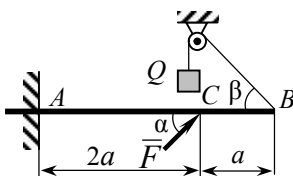
Результаты представить на рисунке, где необходимо нарисовать траекторию движения точки, указать точку начала движения при $t = 0$ и ее положение при $t = 1$ с, изобразить векторы скорости, ускорения и их составляющие.

Данные выбрать из таблицы 2.

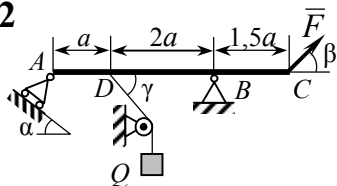
0



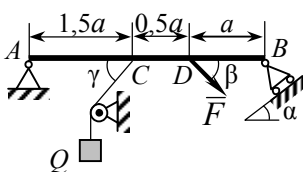
1



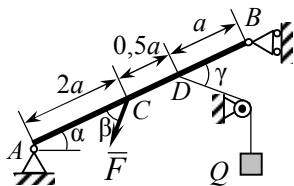
2



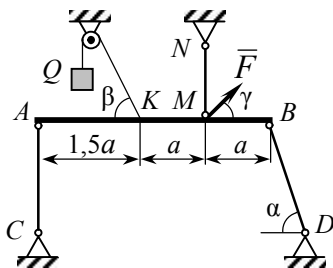
3



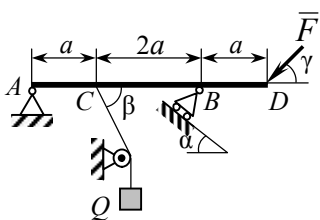
4



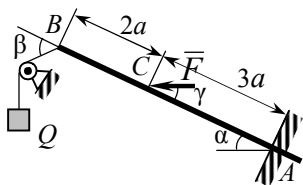
5



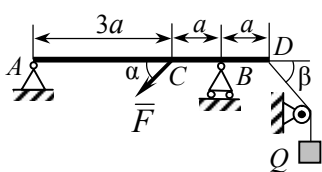
6



7



8



9

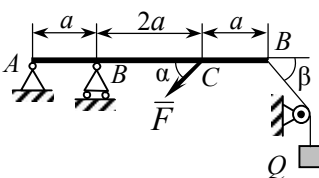


Рис. 3.1. Схемы к задаче № 1

Таблица 2

вариант	$x = f_1(t)$ (м)	$y = f_2(t)$ (м)	вариант	$x = f_1(t)$ (м)	$y = f_2(t)$ (м)
00	$3-2t^2$	$-5t$	50	$3\cos(\pi t)$	$3\sin(\pi t)$
01	$3-\cos(\pi t/3)$	$-1+\sin(\pi t/3)$	51	$-3-2\sin(\pi t/3)$	$-\cos(\pi t/3)+5$
02	$-7\cos^2(\pi t/6)$	$7\sin^2(\pi t/6)+5$	52	$2\sin(\pi t/6)-1$	$3\cos(\pi t/6)+1$
03	$7\sin(\pi t^2/6)-5$	$7\cos(\pi t^2/6)+1$	53	$5t^2+5t/3-3$	$3t^2+t+3$
04	$8t$	$4t^2+1$	54	$-2/(t+1)$	$-2-2t$
05	$5-9\cos^2(\pi t/6)$	$3-9\sin^2(\pi t/6)$	55	$2-3\cos(\pi t/3)$	$2\sin(\pi t/3)-1$
06	$-2-2t$	$-2/(t+1)$	56	$4-2\cos(\pi t/2)$	$4\sin(\pi t/2)-1$
07	$-2-2t^2$	$-6t$	57	$8\sin(\pi t)$	$8\cos(\pi t)$
08	$5\sin^2(\pi t/6)$	$5\cos^2(\pi t/6)$	58	$4\cos(\pi t/2)$	$2\sin^2(\pi t/4)$
09	$4-5t^2+5t/3$	$3-3t^2+t$	59	$2t$	$t-3t^2$
10	$-4\cos(\pi t/3)$	$-2\sin(\pi t/3)-3$	60	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$
11	$5t$	$7t^2-3$	61	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$
12	$7\sin(\pi t/6)$	$2-7\cos(\pi t/6)$	62	$5t^2-3$	$8t$
13	$3\sin(\pi t/3)+3$	$3\cos(\pi t/3)+1$	63	$3\sin^2(\pi t/6)$	$6\cos^2(\pi t/6)$
14	$4\cos^2(\pi t/3)+2$	$4\sin^2(\pi t/3)-1$	64	$-5+2t^2$	$4-3t$
15	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	65	$3-9\sin(\pi t/6)$	$5-9\cos(\pi t/6)$
16	$-8\sin^2(\pi t/6)$	$8\cos^2(\pi t/6)+2$	66	$3\cos(\pi t/3)$	$3\sin(\pi t/6)$
17	$-4/(t+1)$	$4t+4$	67	$-4(t+1)$	$4(t+1)$
18	$\sin(\pi t/3)-1$	$-\cos(\pi t/3)+3$	68	$-2\sin(\pi t/3)$	$-4\cos(\pi t/3)$
19	$10\cos(2\pi t/5)$	$10\sin(2\pi t/5)$	69	$4+2t-6t^2$	$3+t-3t^2$
20	$-3\cos(\pi t/3)+4$	$2\sin(\pi t/3)$	70	$-2\cos(\pi t/4)$	$4\sin^2(\pi t/4)-1$
21	$-3\cos(\pi t/6)$	$3\sin(\pi t/6)+1$	71	$1+3\cos^2(\pi t/6)+$	$3+3\sin^2(\pi t/6)$
22	$5t^2-5t/3-2$	$3t^2-t+1$	72	t^2+2t+1	$1/(t+1)$
23	$3\cos(\pi t/4)$	$2\sin(\pi t/4)$	73	$3t^2-5$	$7t$
24	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	74	$3\cos^2(\pi t/4)$	$4\sin^2(\pi t/4)$
25	t^2	$3t$	75	$2\cos(\pi t/6)$	$3\sin(\pi t/6)$
26	$3t$	$-5t^2-4$	76	$4t^2+2$	$1/(2t^2+1)$
27	$-3/(t+2)$	$3t+6$	77	$3-6\sin(\pi t/6)$	$4-9\cos(\pi t/6)$
28	$3-3t/2-3t^2$	$2-3t-6t^2$	78	$3\sin(\pi t/6)$	$-6\cos^2(\pi t/6)$

29	$3t^2+2$	$-4t$	79	$2t+4$	t^2
30	$5t$	$3t^2+1$	80	$8t+1$	$2t^2-1$
31	$-4t^2+1$	$-3t$	81	$4\sin^2(\pi t/3)$	$4\cos^2(\pi t/3)$
32	$5\cos(\pi t/3)$	$-5\sin(\pi t/3)$	82	$-4t$	$3t^2+2$
33	$2\cos(\pi t/2)$	$2\cos(\pi t/4)$	83	$10\cos(\pi t/3)$	$10\sin(\pi t/3)$
34	$-5t$	$2t^2+3$	84	$2\cos(\pi t/2)$	$4\sin^2(\pi t/2)$
35	$4t$	t^2	85	$\sin(\pi t/3)-1$	$\cos(\pi t/3)+1$
36	$2\cos(\pi t/6)+1$	$2\sin(\pi t/6)-2$	86	$2t$	t^2+3
37	$3t+6$	$-3/(t+2)$	87	$3\sin(\pi t/2)$	$\sin(\pi t/4)$
38	$4\sin(\pi t/2)$	$3\sin(\pi t/2)$	88	$6\sin(\pi t)$	$6\cos(\pi t)$
39	$2-7\cos(\pi t/6)$	$3+7\sin(\pi t/6)$	89	$2t^2+1$	$8t$
40	$8-6\sin(2\pi t)$	$5-8\cos(2\pi t)$	90	$2-3\cos(\pi t/3)$	$2\sin(\pi t/3)$
41	$2(1-\sin(\pi t))$	$2(2-\cos(\pi t))$	91	$-8t$	$2t^2+6$
42	$5\cos^2(\pi t/6)$	$-5\cos^2(\pi t/6)$	92	$3t+6$	$-3/(t+2)$
43	$-3t^2-4$	$5t$	93	$8\cos^2(\pi t/6)$	$8\sin^2(\pi t/6)$
44	$5\cos(\pi t/3)$	$-5\sin(\pi t/3)$	94	$4\sin(\pi t/6)$	$6\cos(\pi t/6)$
45	$6\sin(\pi t/6)-2$	$6\cos(\pi t/6)+3$	95	$4-2t$	t^2-2
46	$4t^2+1$	$6t$	96	$10\sin(\pi t/6)$	$4-8\cos(\pi t/6)$
47	$3-3t^2+t$	$4-5t^2+5t/3$	97	$4-2t$	$(t+1)^2$
48	$3\sin(\pi t/3)$	$2\sin(\pi t/3)$	98	$2t+2$	$2(t+1)^2$
49	$-6t$	$-2t^2-4$	99	$2t$	t^2+1

Задача №3 Преобразование простейших движений твердого тела

Постановка задачи. Механизм состоит из груза 1, ступенчатого шкива 2 и колеса 3 (рис.3.2). Груз подвешен на нити, намотанной на одну из ступеней шкива 2. Поступательное движение груза задано уравнением $x = a + bt + ct^2$, где a, b, c – постоянные, t – время. Вращение колеса 3 осуществляется благодаря фрикционной или ременной передачи.

Определить скорость и ускорение точки M , лежащей на ободе колеса 3, в моменты времени $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с, если заданы радиусы R_2 , r_2 ступеней шкива 2 и радиус R_3 колеса 3.

Данные взять из таблицы 3.

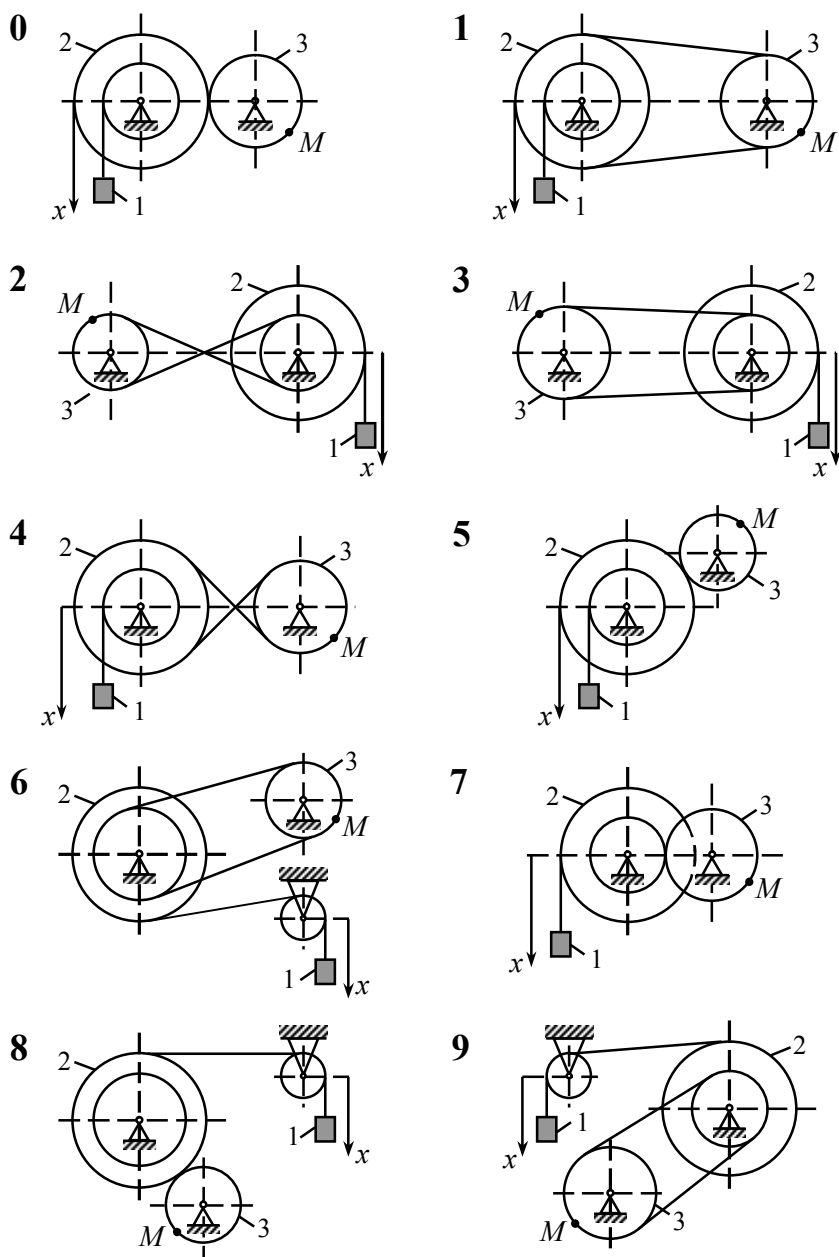


Рис. 3.2 Схемы к задаче № 3

Таблица 3

№	$R_2, \text{м}$	$r_2, \text{м}$	$R_3, \text{м}$	$a, \text{м}$	$b, \text{м/с}$	$c, \text{м/с}^2$
0	1	0,75	0,6	0,08	0,06	0,4
1	0,4	0,25	0,2	0,09	0,08	0,65
2	0,2	0,15	0,1	0,06	0,03	0,35
3	0,5	0,4	0,2	0,07	0,1	0,6
4	0,2	0,1	0,2	0,06	0,12	0,75
5	0,2	0,15	0,1	0,04	0,06	0,3
6	0,3	0,15	0,1	0,06	0,03	0,5
7	0,8	0,6	0,4	0,07	0,2	0,55
8	1,05	0,55	0,35	0,08	0,05	0,6
9	0,35	0,2	0,1	0,06	0,02	0,7

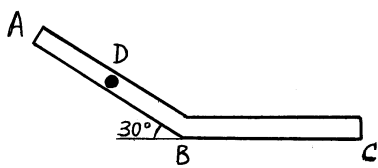
Задача №4 Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки

Постановка задачи. Тело D массой $m = 2 \text{ кг}$ начинает движение с начальной скоростью v_A в изогнутой трубке ABC , расположенной в вертикальной плоскости (рис.3.3). На участке AB длиной l на тело, кроме силы тяжести, действует постоянная сила Q , направленная вдоль трубки от A к B . Трением на этом участке пренебречь.

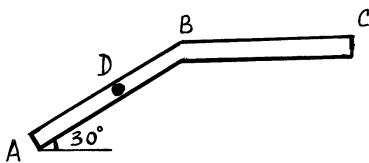
В точке B тело D , не меняя величины скорости, переходит на участок BC . При движении на этом участке на тело, кроме силы тяжести, действует сила трения скольжения с коэффициентом трения $f = 0,8$, а $Q = 0$.

Считая тело материальной точкой, определить скорость тела в положении B , время движения на участке BC и длину участка BC , предполагая, что в точке C тело остановится ($v_C = 0$).

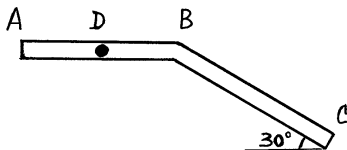
Данные взять из таблицы 4.



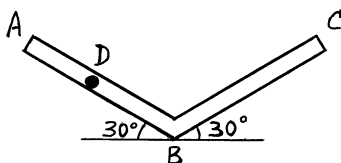
0



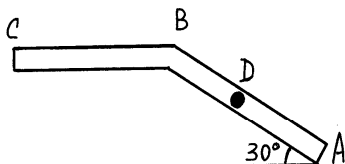
1



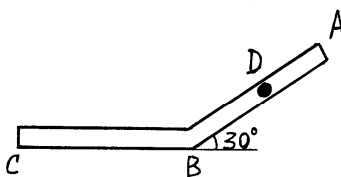
2



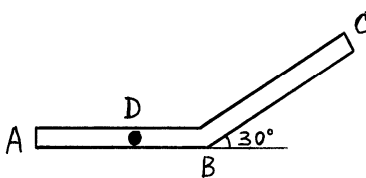
3



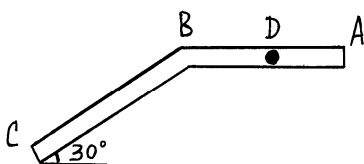
4



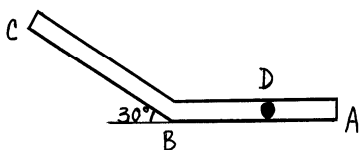
5



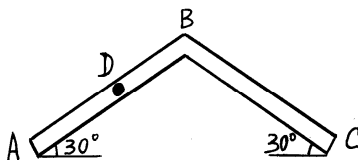
6



7



8



9

Рис. 3.3. Схемы к задаче № 4

Таблица 4

№ п/п	v_A , м/с	Q , Н	l , м	№ п/п	v_A , м/с	Q , Н	l , м
0	2,0	60	1,0	5	1,6	40	0,2
1	2,5	80	0,6	6	1,4	30	0,5
2	1,2	40	0,8	7	2,2	20	0,7
3	1,6	20	0,4	8	2,4	15	0,9
4	1,8	50	0,3	9	2,6	10	1,2

Задача №5 Расчет стержневой системы

Постановка задачи. Стержневая система находится под действием силы F , приложенной в точке C (рис.3.4). Длины стержней l_1 и l_2 , формы поперечных сечений, материал первого стержня выбираются по шифру из таблицы 5. Материал второго стержня - сталь Ст. 3. Толщина стенок коробчатого и кольцевого сечений равна $t = 0,2b$; $t = 0,2D$, где t - толщина стенки, b - сторона квадратного коробчатого сечения по наружному контуру, D - наружный диаметр кольцевого сечения. Коэффициент запаса прочности при растяжении $n_p = 1,5$, при сжатии - $n_{сж} = 2$. Характеристики используемых материалов приведены в таблице 6, где σ_{0p} - предельное напряжение на растяжение, $\sigma_{0сж}$ - предельное напряжение на сжатие.

Необходимо:

1. Определить нормальные силы в стержнях N_1, N_2 .
2. Выбрать материал первого стержня из предложенных двух материалов, сравнивая их прочности. Назначить допускаемые напряжения.
3. Из условия прочности определить площадь поперечного сечения каждого стержня $A \geq N/[\sigma]$, найти его размеры или номер прокатного профиля.
4. Определить абсолютную деформацию стержней.

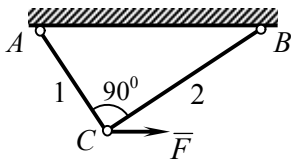
Таблица 5

№ п/п	F, МН	l ₁ , м	l ₂ , м	Формы сечений стержней		Материал первого стержня
				первого	второго	
1	0,2	0,8	2,2	сплошное	швеллер	СЧ-12-28 или алюми- ниевый сплав Д1
2	0,25	0,9	2,4	квадратное	двутавр	
3	0,15	1,0	2,6	сплошное прямоугольное h/b=2	равнобокий уголок	СЧ-15-32 или сталь Ст. 2
4	0,1	1,1	2,8		швеллер	
5	0,25	1,2	3,0	сплошное круглое	двутавр	СЧ-35-56 или титано- вый сплав ВТ-9
6	0,2	1,3	3,2		равнобокий уголок	
7	0,15	1,4	3,4	коробчатое квадратное	швеллер	СЧ-28-48 или сталь Ст. 30
8	0,2	1,5	3,6		двутавр	
9	0,25	1,6	3,8	кольцевое круглое	равнобокий уголок	СЧ-21-40 или алюми- ниевый сплав Д16
0	0,3	1,7	4,0		швеллер	

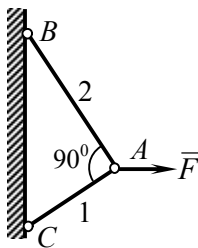
Таблица 6

Материал	Марка	E, МПа	$\sigma_{0\ p}$, МПа	$\sigma_{0\ сж}$, МПа
Серый чугун	СЧ-12-28	$1,2 \cdot 10^5$	120	500
	СЧ-15-32		150	600
	СЧ-21-40		210	760
	СЧ-28-48		280	900
	СЧ-35-56		350	1080
Сталь	Ст. 2	$2 \cdot 10^5$	200	200
	Ст. 3		240	240
	Ст. 30		290	290
Алюминиевый сплав	Д 1	$0,7 \cdot 10^5$	200	200
	Д 16		300	300
Титановый сплав	ВТ 9	$1 \cdot 10^5$	610	610

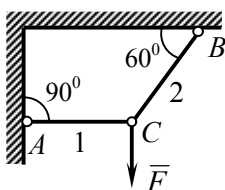
0



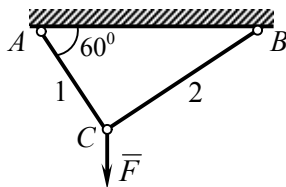
1



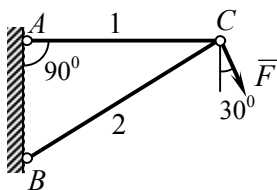
2



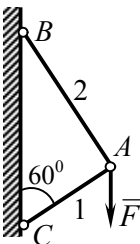
3



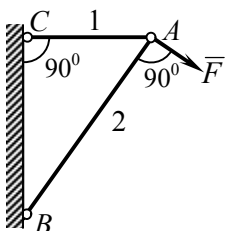
4



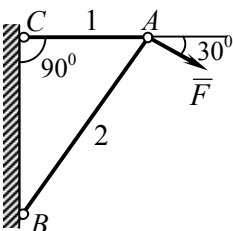
5



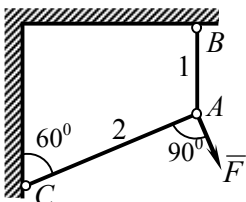
6



7



8



9

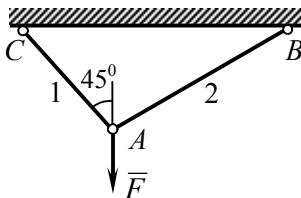


Рис. 3.4. Схемы к задаче № 5

Задача №6 Расчет балки на прочность

Постановка задачи. Дана статически определимая балка (рис.3.5). Длины участков, величины сил $F = \alpha qa$ и моменты $M = \beta qa^2$ определяются по данным из таблицы 7. Материал балки – сталь Ст.3. Допускаемые напряжения: $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau] = 100 \text{ МПа}$. Поперечное сечение балки – двутавр.

Требуется:

1. Определить опорные реакции.
2. Построить эпюры внутренних сил.
3. Подобрать из условия прочности номер двутавра.
4. Проверить прочность балки по касательным напряжениям.

Таблица №7

№ п/п	a , м	q , кН/м	α	β
1	0,8	5	1,2	2,1
2	1,0	6	1,4	1,9
3	1,2	7	1,6	1,7
4	1,4	8	1,8	1,5
5	1,6	9	2,0	1,3
6	0,8	10	1,8	1,1
7	1,0	11	1,6	1,3
8	1,2	12	1,4	1,5
9	1,4	13	1,2	1,7
0	1,6	14	1,0	1,9

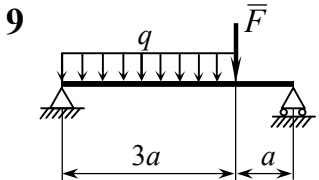
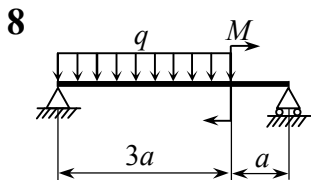
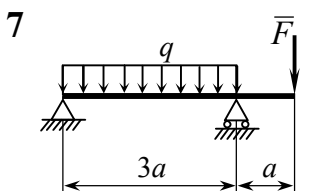
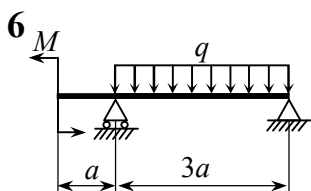
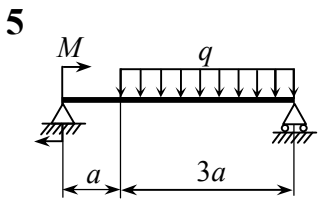
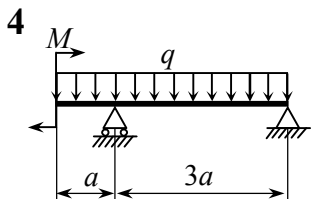
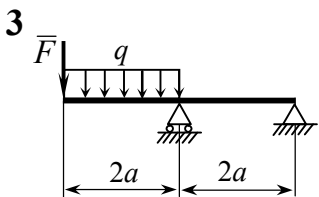
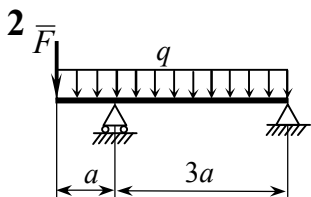
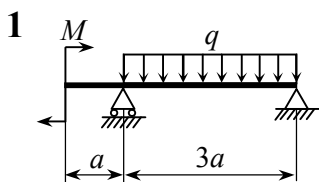
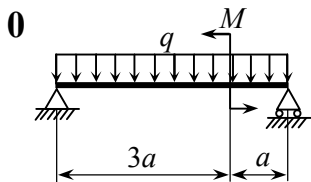


Рис. 3.5. Схемы к задаче № 6

Задача №7 Кручение вала круглого сечения

Постановка задачи. К валу приложены крутящие моменты: M_1 , M_2 , M_3 , M_4 (рис.3.6).

Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
 - 2) при заданном значении допускаемого касательного напряжения $[\tau] = 80$ МПа по условию прочности определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его величину до ближайшего большего значения из данного ряда диаметров 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
 - 3) построить эпюру углов закручивания, принимая модуль сдвига $G = 0,77 \cdot 10^5$ МПа ;
 - 4) найти наибольший относительный угол закручивания.
- Данные взять из таблицы 8.

Таблица 8

Номер строки	Расстояния, м			Моменты, кНм	
	a	b	c	$M_1; M_3$	$M_2; M_4$
1	1,1	1,1	1,1	2,1	1,1
2	1,2	1,2	1,2	2,2	1,2
3	1,3	1,3	1,3	2,3	1,3
4	1,4	1,4	1,4	2,4	1,4
5	1,5	1,5	1,5	2,5	1,5
6	1,6	1,6	1,6	1,6	0,6
7	1,7	1,7	1,7	1,7	0,7
8	1,8	1,8	1,8	1,8	0,8
9	1,9	1,9	1,9	1,9	0,9
0	2,0	2,0	2,0	2,0	1,0

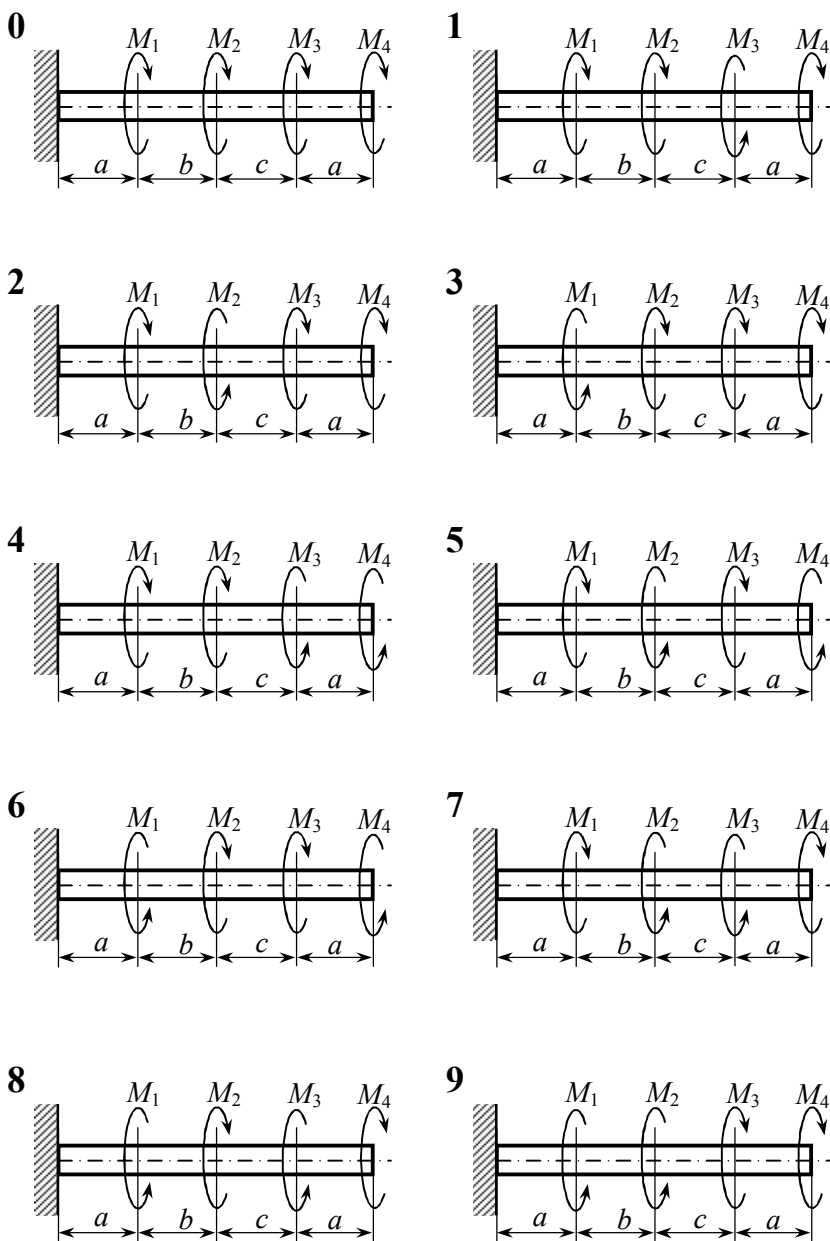


Рис. 3.6. Схемы к задаче № 7

4 ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача №1 Равновесие твердого тела под действием произвольной плоской системы сил

Постановка задачи. Дано абсолютно твердое тело, находящееся под действием силы $F = 4 \text{ кН}$, и силы тяжести подвешенного на нити груза $Q = 2 \text{ кН}$ (рис.4.1). Массы тела, стержней и нитей, силы трения в шарнирах не учитываются. $AC = 2,5 \text{ м}$, $CD = 2 \text{ м}$, $BD = 1,5 \text{ м}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

Определить реакции связей.

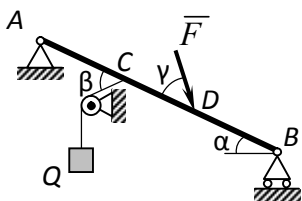


Рис. 4.1

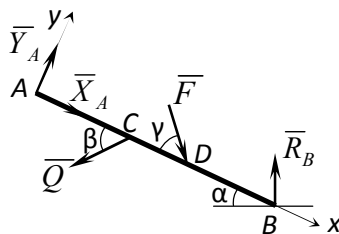


Рис. 4.2

Решение

Направим ось x вдоль стержня. Изобразим стержень свободным от связей, а их действия заменим реакциями $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$, $\bar{R}_B$. Силу тяжести груза Q направим от точки C вдоль нити (рис.4.2). Для плоской произвольной системы сил составим уравнения равновесия:

$$\sum_k m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad R_B \cos \alpha \cdot AB - F \sin \gamma \cdot AD - Q \sin \beta \cdot AC = 0;$$

$$\sum_k F_{kx} = 0, \quad X_A - Q \cos \beta + F \cos \gamma - R_B \sin \alpha = 0;$$

$$\sum_k F_{ky} = 0, \quad Y_A - Q \sin \beta - F \sin \gamma + R_B \cos \alpha = 0.$$

Решая уравнения находим:

$$R_B = \frac{4 \text{ кН} \cdot 0,866 \cdot 4,5 \text{ м} + 2 \text{ кН} \cdot 0,707 \cdot 2,5 \text{ м}}{0,866 \cdot 6 \text{ м}} = 3,68 \text{ кН}.$$

$$X_A = 2 \text{ кН} \cdot 0,707 - 4 \text{ кН} \cdot 0,5 + 3,68 \text{ кН} \cdot 0,5 = 1,25 \text{ кН},$$

$$Y_A = 2 \text{ кН} \cdot 0,707 + 4 \text{ кН} \cdot 0,866 - 3,68 \text{ кН} \cdot 0,866 = 1,69 \text{ кН}.$$

Сделаем проверку вычисления реакций, составив дополнительное уравнение:

$$\begin{aligned} \sum_k m_B(\bar{F}_k) &= -Y_A \cdot AB + Q \sin \beta \cdot BC + F \sin \gamma \cdot BD = \\ &= -1,69 \text{ кН} \cdot 6 \text{ м} + 2 \text{ кН} \cdot 0,707 \cdot 3,5 \text{ м} + 4 \text{ кН} \cdot 0,866 \cdot 1,5 \text{ м} = \\ &= -10,14 \text{ кН} \cdot \text{м} + 10,15 \text{ кН} \cdot \text{м} = 0,01 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

В результате округления чисел, вместо равенства нулю получилось число $0,01 \text{ кН} \cdot \text{м}$. Определим относительную погрешность вычислений:

$$\delta = \frac{0,01 \text{ кН} \cdot \text{м} \cdot 100\%}{10,15 \text{ кН} \cdot \text{м}} = 0,099\%.$$

Относительная погрешность вычислений менее 1% допустима.

Ответ: $X_A = 1,25 \text{ кН}$, $Y_A = 1,69 \text{ кН}$, $R_B = 3,68 \text{ кН}$.

Задача №2 Кинематика точки

Постановка задачи. Точка движется в плоскости Oxy по закону:

$$x = 2 - 3t - 6t^2 \text{ (м)}, \quad y = 3 - 1,5t - 3t^2 \text{ (м)}.$$

Найти уравнение траектории движения $y = f(x)$.

Для момента времени $t = 1 \text{ с}$ определить:

- положение точки на траектории, проекции скорости на координатные оси и ее модуль,
- проекции ускорения на координатные и естественные оси, модуль ускорения,
- радиус кривизны траектории.

Решение

1) Найдем уравнение траектории.

Из уравнений движения исключим параметр t . Второе уравнение запишем в виде $2y = 6 - 3t - 6t^2$ и найдем разность $2y - x = 4$. Это и есть уравнение траектории (уравнение прямой). Следовательно, движение точки прямолинейное. Так как время изменяется в интервале $0 \leq t < \infty$, то координаты точки изменяются в интервалах $2 \text{ см} \geq x > -\infty$, $3 \text{ см} \geq y > -\infty$. Начальное положение точки при $t_0 = 0$ определяется координатами $x_0 = 2 \text{ м}$; $y_0 = 3 \text{ м}$; $M_0(2 \text{ м}; 3 \text{ м})$. Для момента времени $t_1 = 1 \text{ с}$ $x_1 = 2 - 3 - 6 = -7 \text{ м}$; $y_1 = 3 - 1,5 - 3 = -1,5 \text{ м}$; $M_1(-7 \text{ м}; -1,5 \text{ м})$. Прямую строим по двум точкам: M_0 и M_1 (рис.4.3).

2) Определим скорость точки.

Сначала найдем проекции скорости на оси x, y :

$$v_x = \dot{x} = (2 - 3t - 6t^2)'_t = -3 - 12t;$$

$$v_y = \dot{y} = (3 - 1,5t - 3t^2)'_t = -1,5 - 6t.$$

В момент времени $t_1 = 1 \text{ с}$: $v_{x_1} = v_x(1) = -15 \text{ м/с}$,
 $v_{y_1} = v_y(1) = -7,5 \text{ м/с}$.

Модуль скорости $v_1 = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2} = 16,77 \text{ м/с}$.

На рис.4.3 от точки M_1 проведем оси v_x , v_y и на них отложим v_{x_1} , v_{y_1} , по которым построим вектор скорости, направленный по касательной к траектории. В случае прямолинейного движения точки вектор скорости направлен вдоль траектории.

3) Определим ускорение точки.

Проекции ускорения на оси x, y :

$$a_x = \ddot{x} = -12 \text{ м/с}^2, \quad a_y = \ddot{y} = -6 \text{ м/с}^2.$$

Модуль ускорения точки $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 13,42 \text{ м/с}^2$.

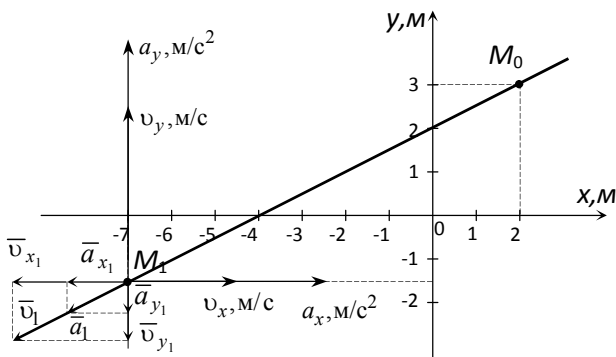


Рис. 4.3

На рис.4.3 от точки M_1 проведем оси a_x , a_y и отложим на них a_{x_1} , a_{y_1} . Вектор ускорения $\bar{a}_1$ построим по составляющим $\bar{a}_{x_1}$, $\bar{a}_{y_1}$.

Обратим внимание, что единицы измерений координат x , y проекций скорости v_x , v_y и ускорения a_x , a_y отличаются. Поэтому при построении траектории, векторов скорости и ускорения могут быть назначены разные единицы масштаба.

4) Определим составляющие ускорения на касательную и главную нормаль. Найдём радиус кривизны траектории.

Направим вдоль вектора скорости касательную, а перпендикулярно касательной – главную нормаль. На эти оси спроектируем конец вектора ускорения. Таким образом, вектор ускорения раскладывается на касательную и нормальную составляющие: $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$, а модуль ускорения равен $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

Касательное ускорение вычисляется по формуле:

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v} = \frac{(-15) \cdot (-6) + (-7,5) \cdot (-6)}{16,77} = 13,42 \text{ м/с}^2.$$

Тогда можно определить нормальное ускорение

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{13,42^2 - 13,42^2} = 0.$$

Радиус кривизны траектории $\rho = v^2 / a_n = 13,42^2 / 0 \rightarrow \infty$.

Ответ: Уравнение траектории: $2y = x + 4$;

$$v_{x_1} = -15 \text{ м/с}, \quad v_{y_1} = -7,5 \text{ м/с}, \quad v_1 = 16,77 \text{ м/с};$$

$$a_x = -12 \text{ м/с}^2, \quad a_y = -6 \text{ м/с}^2, \quad a = a_\tau = 13,42 \text{ м/с}^2$$

$$a_n = 0;$$

$$\rho \rightarrow \infty.$$

Поскольку $a_\tau > 0$, то движение точки будет ускоренным – на рисунке векторы скорости и касательного ускорения имеют одинаковые направления. Касательное ускорение точки постоянное (не зависит от времени), следовательно, движение точки будет равноускоренным.

Задача №3 Преобразование простейших движений твердого тела

Груз 1 (рис.4.4) движется поступательно и прямолинейно по закону $x = 0,07 + 0,16t + 1,2t^2$ (м). Радиусы колеса $R_3 = 0,3$ м и ступеней шкива 2 $R_2 = 1$ м, $r_2 = 0,6$ м.

Определить скорость и ускорение точки M , лежащей на ободу колеса 3, в моменты времени $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с.

Решение

Скорость груза 1: $v_1 = \dot{x} = 0,16 + 2,4t$ (м/с). Все точки, лежащие на окружности радиуса r_2 шкива 2, имеют скорости, равные скорости груза 1: $v_L = v_N = v_1$.

Точка N движется по окружности. Ее скорость $v_N = r_2 \omega_2$. Отсюда угловая скорость шкива будет $\omega_2 = \frac{v_N}{r_2} = \frac{0,16 + 2,4t}{0,6} \text{ с}^{-1}$.

Все точки ремня имеют одинаковые скорости, поэтому $v_M = v_K = v_L = 0,16 + 2,4t \text{ (м/с)}$.

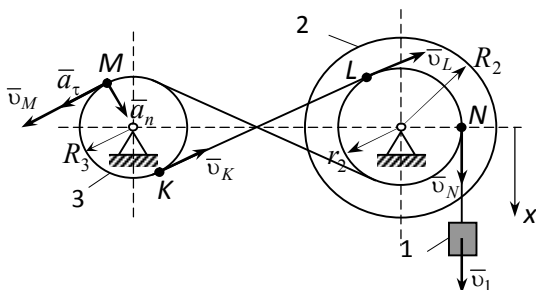


Рис. 4.4

Скорость точки M , движущейся по окружности радиуса R_3 , равна $v_M = R_3 \omega_3$. Отсюда угловая скорость колеса $\omega_3 = \frac{v_M}{R_3} = \frac{0,16 + 2,4t}{0,3} \text{ с}^{-1}$.

Угловое ускорение колеса 3 будет $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 8 \text{ с}^{-2}$.

Вектор ускорения точки M : $\vec{a}_M = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Касательное ускорение направлено по касательной к траектории точки M и равно $a_\tau = R_3 \varepsilon_3 = 2,4 \text{ м/с}^2$. Оно не зависит от времени t и положительно, следовательно, колесо 3 вращается равноускоренно. Нормальное ускорение направлено к оси вращения и равно $a_n = R_3 \omega_3^2 = 0,3 \frac{(0,16 + 2,4t)^2}{0,3^2} \text{ м/с}^2$. Модуль ускорения точки M :

$$a_M = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Определим искомые величины.

При $t = 1 \text{ с}$: $v_{M_1} = v_M(1) = 0,16 + 2,4 \cdot 1 = 2,56 \text{ м/с}$; $a_\tau(1) = 2,4 \text{ м/с}^2$,

$a_n(1) = 21,8 \text{ м/с}^2$, $a_M(1) = \sqrt{2,4^2 + 21,8^2} = 21,9 \text{ м/с}^2$. При $t = 2 \text{ с}$:

$v_M(2) = 0,16 + 2,4 \cdot 2 = 4,96 \text{ м/с}$; $a_\tau(2) = 2,4 \text{ м/с}^2$, $a_n(2) = 82 \text{ м/с}^2$,

$a_M(2) = \sqrt{2,4^2 + 82^2} = 82 \text{ м/с}^2$.

Итак, ускорение точки M переменное и существенно возрастает с увеличением t .

Задача №4 Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки

Тело D массы $m = 2 \text{ кг}$ начинает поступательное движение в трубке ABC , расположенной в вертикальной плоскости, с начальной скоростью $v_A = 2,2 \text{ м/с}$ под действием силы тяжести и силы $Q = 20 \text{ Н}$ (рис.4.5).

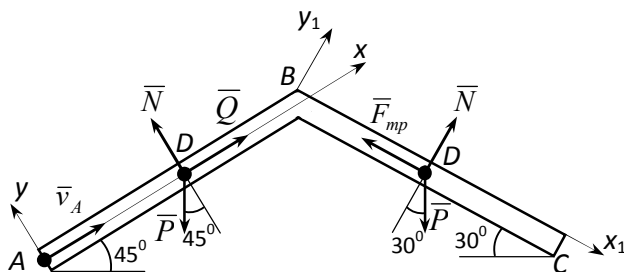


Рис. 4.5

Длина участка $AB = l = 0,7 \text{ м}$. Трением на участке AB пренебречь. На участке BC на тело кроме силы тяжести действует сила трения скольжения. Коэффициент трения $f = 0,68$. Сила $Q = 0$.

Определить скорость тела в точке B , время движения тела на участке BC и длину участка BC , предполагая, что $v_C = 0$.

Решение

Сначала рассмотрим движение тела на участке AB . Направим ось x вдоль AB и составим дифференциальное уравнение движения тела на этом участке:

$$m \frac{dv}{dt} = Q - P \sin 45^\circ,$$

где $P = mg$ – вес тела, $g = 10 \text{ м/с}^2$. Преобразуем ускорение к виду:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dv}{dx} = v \frac{dv}{dx}.$$

Вычислим $Q - P \sin 45^\circ = 20 \text{ Н} - 2 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 0,707 = -5,86 \text{ Н}$. Имеем при $x = 0$ скорость $v(0) = v_A$; при $x = l$ $v(l) = v_B$.

Разделяя переменные, интегрируем дифференциальное уравнение:

$$2 \int_{v_A}^{v_B} v dv = -5,86 \int_0^l dx.$$

Отсюда $2\left(\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}\right) = -5,86l$.

Скорость тела в точке B : $v_B = \sqrt{v_A^2 - 5,86 \cdot 0,7} = 0,859 \text{ м/с}$.

Теперь рассмотрим движение тела на участке BC . Направим ось x_1 от точки B в сторону движения тела. На тело D действуют силы: $\overline{P}$, $\overline{F}_{mp}$, $\overline{N}$. Реакцию трубки N найдем из уравнения равновесия:

$$\sum_k F_{kx_1} = N - P \cos 30^\circ = 0, \quad N = mg \cos 30^\circ = 2 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ Н}.$$

По закону Кулона сила трения $F_{mp} = Nf = 17,32 \text{ Н} \cdot 0,68 = 11,78 \text{ Н}$.

В начальном положении тела (в точке B) время $t = 0$, координата $x_1(0) = 0$, скорость $v(0) = v_B$. В конечном положении тела (в точке C) время $t = t_{BC}$, координата $x_1(t_{BC}) = s$ и по условию задачи скорость $v(t_{BC}) = v_C = 0$.

Согласно второму закону динамики составим дифференциальное уравнение движения тела (материальной точки) в проекции на ось x_1 :

$$m \frac{dv}{dt} = P \sin 30^\circ - F_{mp}.$$

Правая часть уравнения: $2 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 \cdot 0,5 - 11,78 \text{ Н} = -1,78 \text{ Н}$. Перенесем dt в правую часть и интегрируем:

$$2 \int_{v_B}^v dv = -1,78 \int_0^t dt, \quad 2(v - v_B) = -1,78t \quad \text{или} \quad v = v_B - 0,89t.$$

Заменив v на $v_C = 0$ и t на t_{BC} , найдем время движения тела на участке BC : $t_{BC} = 0,859 / 0,89 = 0,965 \text{ с}$. Скорость тела v выразим через первую производную от координаты x_1 :

$$v = \frac{dx_1}{dt} = v_B - 0,89t .$$

Перенесем dt в правую часть и интегрируем

$$\int_0^s dx_1 = v_B \int_0^{t_{BC}} dt - 0,89 \int_0^{t_{BC}} t dt . \text{ Отсюда } s = v_B t_{BC} - 0,89 t_{BC}^2 / 2 = 0,415 \text{ м} .$$

Ответ: $v_B = 0,859 \text{ м/с}$, $t_{BC} = 0,965 \text{ с}$, $s = BC = 0,415 \text{ м}$.

Задача №5 Расчет стержневой системы

Стержневая система находится под действием силы $F = 8 \cdot 10^5 \text{ Н}$, приложенной в т. С (рис.4.6). Длины стержней $l_1 = 1,6 \text{ м}$, $l_2 = 2,8 \text{ м}$. Формы поперечных сечений: первого - коробчатое квадратное, второго - равнобокий уголок. Материал первого стержня - серый чугун марки СЧ-12-28 ($\sigma_{0p} = 120 \text{ МПа}$, $\sigma_{0сж} = 500 \text{ МПа}$) или алюминиевый сплав Д1 ($\sigma_{0p} = 200 \text{ МПа}$, $\sigma_{0сж} = 200 \text{ МПа}$). Материал второго стержня - сталь Ст. 3 ($\sigma_{0p} = \sigma_{0сж} = 240 \text{ МПа}$). Толщина стенок коробчатого и кольцевого сечений равна $t = 0,2b$. Коэффициент запаса прочности при растяжении $n_p = 1,5$, при сжатии - $n_{сж} = 2$.

Необходимо:

1. Определить нормальные силы в стержнях N_1, N_2 .
2. Выбрать материал первого стержня из предложенных двух материалов, сравнивая их характеристики прочности. Назначить допускаемые напряжения.
3. Определить площадь поперечного сечения стержней, найти его размеры или номер прокатного профиля.
4. Определить абсолютную деформацию стержней.

Решение

1. Определение внутренних усилий в стержнях.

Используя метод сечений, рассечем стержни (рис. 4.7), отбросим нижнюю часть, заменим влияние отброшенных частей стержней рас-

тягивающими нормальными силами N_1 и N_2 . На рис. 4.7 изображена расчетная схема данной системы.

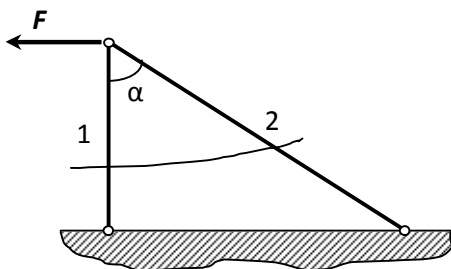


Рис. 4.6

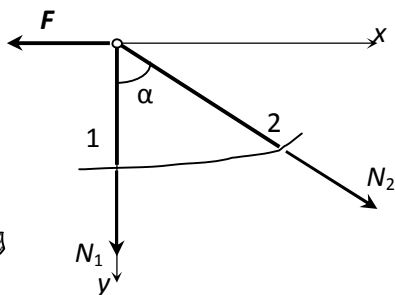


Рис. 4.7

Запишем уравнения равновесия для полученной системы сил в виде сумм проекций сил на оси x и y :

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0: & -F + N_2 \sin \alpha &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0: & N_1 + N_2 \cos \alpha &= 0;\end{aligned}$$

где $\cos \alpha = l_1 / l_2 = 1,6 / 2,8 = 0,573$,

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - 0,573^2} = 0,82.$$

Из уравнений определим N_1 и N_2 :

$$N_2 = \frac{F}{\sin \alpha} = \frac{8 \cdot 10^5}{0,82} = 9,8 \cdot 10^5 \text{ Н},$$

$$N_1 = -N_2 \cos \alpha = -9,8 \cdot 10^5 \cdot 0,573 = -5,6 \cdot 10^5 \text{ Н}$$

Усилие N_1 отрицательно, следовательно, первый стержень сжат.

Усилие N_2 положительно, следовательно, второй стержень растянут.

2. Определение допускаемых напряжений.

Так как первый стержень сжат, то в качестве материала для него выбираем серый чугун СЧ-12-28, предел прочности на сжатие которого превышает $\sigma_{0сж}$ для алюминиевого сплава Д1.

Допускаемое напряжение на сжатие для материала СЧ-12-28 равно

$$[\sigma_{1сж}] = \frac{\sigma_{0сж1}}{n_{сж}} = \frac{500}{2} = 250 \text{ МПа}.$$

Второй стержень растянут; допускаемое напряжение для него равно

$$[\sigma_{2p}] = \frac{\sigma_{0p2}}{n_p} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа}.$$

3. Определим площадь поперечного сечения первого стержня

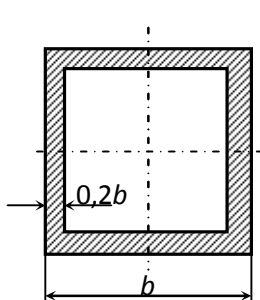


Рис.4.8

$$A_1 \geq \frac{|N_1|}{[\sigma_{1сж}]} = \frac{5,6 \cdot 10^5}{250 \cdot 10^6} = 22,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Площадь коробчатого сечения при $t = 0,2b$ равна

$$A_1 = b^2 - (0,6b)^2 = 0,64b^2 \text{ (см. рис. 4.8).}$$

Отсюда находим

$$b = \sqrt{\frac{A_1}{0,64}} = \sqrt{\frac{22,4 \cdot 10^{-4}}{0,64}} = 0,0592 \text{ м}.$$

Размер b округляем в большую сторону до целого значения в миллиметрах, оканчивающегося на «0» или «5»: $b = 0,0592 \text{ м} = 59,2 \text{ мм}$, округляя, получим $b = 60 \text{ мм} = 0,06 \text{ м}$. Тогда фактическая площадь сечения равна

$$A_{1ф} = 0,64 \cdot b^2 = 0,64 \cdot 0,06^2 = 23 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Определим размеры сечения второго стержня

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma_{2p}]} = \frac{9,8 \cdot 10^5}{160 \cdot 10^6} = 61,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Из таблицы сортамента прокатной стали (ГОСТ 8509-72) подбираем равнобокий уголок с таким расчетом, чтобы площадь его сечения была не меньше требуемой $A_2 = 61,3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 61,3 \text{ см}^2$.

Этому условию удовлетворяет уголок №20(16), у которого $A_{2\phi} = A_2^{табл} = 62 \text{ см}^2$.

4. Определим абсолютную деформацию стержней, используя закон Гука.

Первый стержень укорачивается

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_{1\phi}} = \frac{-5,6 \cdot 10^5 \cdot 2,8}{1,2 \cdot 10^{11} \cdot 23 \cdot 10^{-4}} = -3,61 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -3,61 \text{ мм}.$$

Второй стержень удлиняется

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_{2\phi}} = \frac{9,8 \cdot 10^5 \cdot 1,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 62 \cdot 10^{-4}} = 1,26 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 1,26 \text{ мм}.$$

Задача №6 Расчет балки на прочность

Дана статически определимая балка (рис.4.9). На нее действует сила $F = 10 \text{ кН}$, момент $M = 20 \text{ кН} \cdot \text{м}$, распределенная сила $q = 10 \text{ кН/м}$, $a = 1 \text{ м}$.

Материал балки – сталь Ст.3.
Допускаемые напряжения:
 $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $[\tau] = 100 \text{ МПа}$;

Поперечное сечение балки – двутавр.

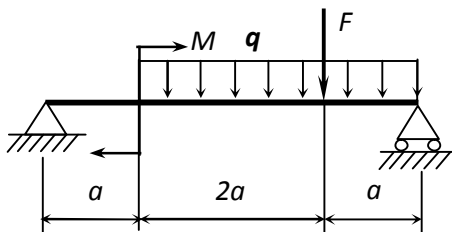


Рис. 4.9

Требуется:

1. Определить опорные реакции,
2. Построить эпюры внутренних сил,
3. Подобрать из условия прочности номер двутавра,
4. Проверить прочность балки по касательным напряжениям.

Решение

1. Определение опорных реакций

В опорах балки в т. A и D введем силы реакций опор (рис.4.10). В шарнирно-неподвижной опоре A это две составляющие реакции Y_A

и Z_A . В шарнирно-подвижной опоре D - одна вертикальная реакция R_D .

Система сил, действующих на балку, представляет собой плоскую произвольную систему сил. Для такой системы сил можно составить три независимых уравнения равновесия. Составим уравнения равновесия.

$$\sum Z = 0: Z_A = 0.$$

$$\sum M_D = 0: -Y_A \cdot 4a - M + 3qa \cdot \frac{3}{2}a + F \cdot a = 0,$$

$$\sum M_A = 0: R_D \cdot 4a - F \cdot 3a - 3qa \left(\frac{3}{2}a + a \right) - M = 0.$$

Решая эти уравнения, находим реакции опор:

$$Y_A = \frac{-M + 4,5qa^2 + F \cdot a}{4a} = \frac{-20 + 45 + 10}{4 \cdot 1} = 8,75 \text{ кН}.$$

$$R_D = \frac{F \cdot 3a + 7,5qa^2 + M}{4a} = \frac{30 + 75 + 20}{4 \cdot 1} = 31,25 \text{ кН}.$$

Проверяем правильность определения реакций. Для этого составим еще одно уравнение равновесия, а именно сумму проекций сил на вертикальную ось «у».

$$\sum Y = 0: -Y_A + 3qa + F - R_D = 0,$$

$$8,75 - 30 - 10 + 31,25 = 0,$$

$$40 - 40 = 0,$$

$$0 = 0.$$

2. Определение внутренних сил, построение эпюр.

Участок АВ : $0 \leq z_1 \leq a$ (рассматривается часть балки слева от сечения, рис.4.10)

$$Q_y(z_1) = Y_A = 8,75 \text{ кН},$$

$$M_x(z_1) = Y_A \cdot z_1 = 8,75 \cdot z_1 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Вычисляем Q_y , M_x на границах участка:

При $z_1 = 0$, $Q_y = 8,75 \text{ кН}$, $M_x = 0$;

При $z_1 = 1 \text{ м}$, $Q_y = 8,75 \text{ кН}$, $M_x = 8,75 \text{ кНм}$.

Участок ВС: $a \leq z_2 \leq 3a$ (рассматривается часть балки слева от сечения).

$$Q_y(z_2) = Y_A - q(z_2 - a) = 8,75 - 10(z_2 - 1).$$

$$M_x(z_2) = R_A \cdot z_2 + M - q(z_2 - a) \cdot \frac{z_2 - a}{2} = 8,75z_2 + 20 - 5(z_2 - 1)^2.$$

Поперечная сила Q_y является линейной функцией.

Изгибающий момент M_x является квадратичной функцией.

Вычисляем Q_y , M_x на границах участка:

При $z_2 = 1 \text{ м}$, $Q_y = 8,75 - 10(1 - 1) = 8,75 \text{ кН}$, $M_x = 8,75 \text{ кНм}$;

При $z_2 = 3 \text{ м}$, $Q_y = 8,75 - 10(3 - 1) = -11,25 \text{ кН}$,

$$M_x = 8,75 \cdot 3 + 20 - 5 \cdot 2^2 = 26,25 \text{ кНм}.$$

На участке Q_y имеет разные знаки на границах участка. Определим точку с абсциссой z_0 , в которой $Q_y = 0$. Для этого приравняем выражение Q_y нулю.

$$Q_y(z_0) = 8,75 - 10(z_0 - 1) = 0.$$

Решая это уравнение, находим z_0 :

$$z_0 = \frac{8,75}{10} + 1 = 1,875 \text{ м}$$

В этой точке M_x будет иметь экстремум

$$M_{x_{\max}} = 8,75 \cdot 1,875 + 20 - 5 \cdot 0,875^2 = 32,58 \text{ кНм}.$$

Участок CD $0 \leq z_3 \leq a$ (рассматривается часть балки справа от сечения, рис.4.10).

$$Q_y(z_3) = -R_D + qz_3 = -31,25 + 10z_3,$$

$$M_x(z_3) = R_D \cdot z_3 - qz_3 \cdot \frac{z_3}{2} = 31,25 \cdot z_3 - 5z_3^2;$$

При $z_3 = 0$, $Q_y = -31,25 \text{ кН}$, $M_x = 0$;

При $z_3 = 1 \text{ м}$, $Q_y = -21,25 \text{ кН}$, $M_x = 26,25 \text{ кНм}$.

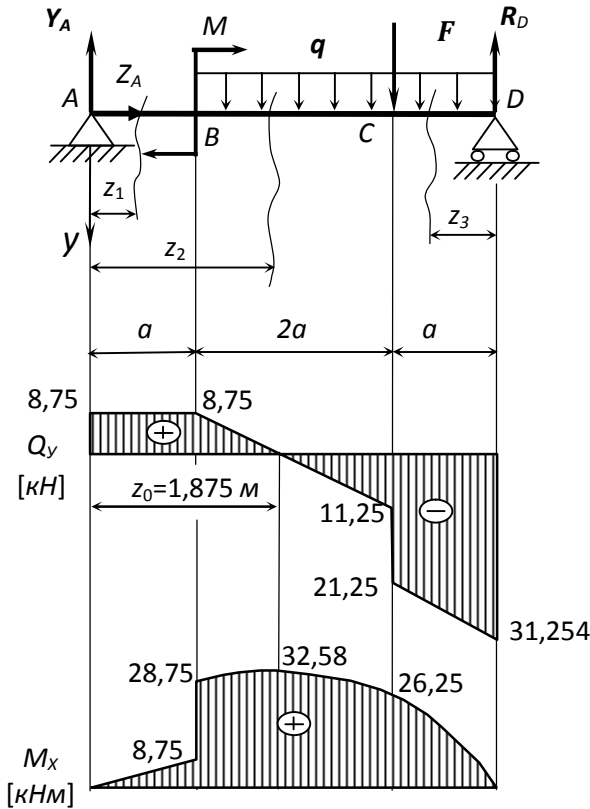


Рис. 4.10.

По полученным значениям строим эпюры Q_y и M_x для всей балки. Построенные эпюры следует проверить, используя правила проверки эпюр.

3. Подбор размеров поперечного сечения балки двутаврового сечения.

По эпюре M_x находим значение изгибающего момента в опасном сечении:

$$M_{x \max} = \max |M_x| = 32,58 \text{ кНм}.$$

Из условия прочности при изгибе $\frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma]$, находим необходимый момент сопротивления двутавра

$$W_x \geq \frac{|M_x|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{32,58 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 203,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 203,6 \text{ см}^3.$$

Из таблицы сортамента ГОСТ 8239-72 по величине W_x находим ближайший двутавр у которого $W_x^{\text{табл}} \approx W_x$. В нашем примере это двутавр №20^а $W_x^{\text{табл}} = 203 \text{ см}^3$.

Так как $W_x^{\text{табл}} < W_x$, то наибольшие напряжения $\sigma_{\max}$ будут больше $[\sigma]$. Таким образом двутавр будет перегружен. Допускаемая перегрузка $\Delta\sigma$ должна быть не больше 5%.

В нашем примере:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x \max}}{W_x^{\text{табл}}} = \frac{32,58 \cdot 10^3}{203 \cdot 10^{-6}} = 160,5 \text{ МПа},$$

перегрузка составляет

$$\Delta\sigma = \frac{|\sigma_{\max} - [\sigma]|}{[\sigma]} \cdot 100\% = \frac{|160 - 160,5|}{160} \cdot 100\% = 0,31\% < 5\%,$$

что допустимо.

4. Проверка прочности по касательным напряжениям

Проверка прочности по касательным напряжениям проводится по формуле Журавского

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{y \max} \cdot S_x}{d \cdot J_x} \leq [\tau].$$

$$Q_{y\max} = \max|Q_y| = 31,25 \text{ кН}.$$

Для двутавра №20а: $S_x = 114 \text{ см}^3 = 114 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$,

$$d = 5,2 \text{ мм} = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}, \quad J_x = 2030 \text{ см}^4 = 2030 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4,$$

$$\tau_{\max} = \frac{31,25 \cdot 10^3 \cdot 114 \cdot 10^{-6}}{5,2 \cdot 10^{-3} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 33,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 33,4 \text{ МПа}.$$

Так как $\tau_{\max} = 33,4 \text{ МПа} < [\tau] = 100 \text{ МПа}$, двутавр №20а удовлетворяет условию прочности по касательным напряжениям.

Задача №7 Кручение вала круглого сечения

К валу приложены крутящие моменты: $M_1 = M_3 = 2 \text{ кНм}$, $M_2 = M_4 = 1,6 \text{ кНм}$ (рис.4.11). Расстояния $a = b = c = 1,2 \text{ м}$, допустимое касательное напряжение $[\tau] = 80 \text{ МПа}$, модуль сдвига $G = 0,77 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

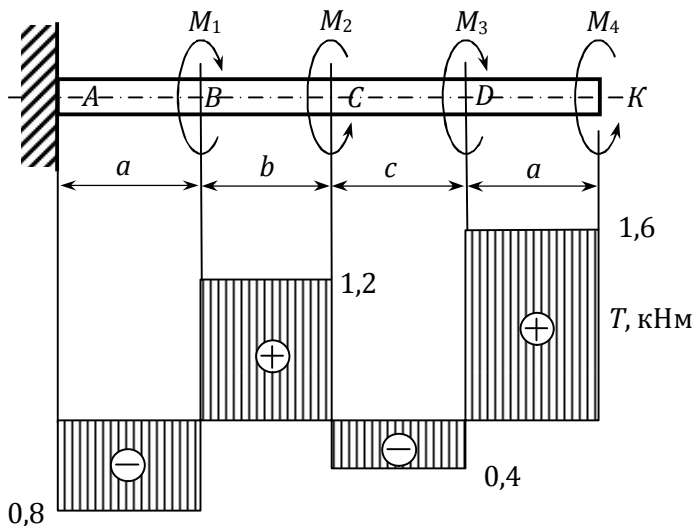


Рис. 4.11

Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) при заданном значении допускаемого касательного напряжения $[\tau] = 80 \text{ МПа}$ по условию прочности определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его величину до ближайшего большего значения из данного ряда диаметров 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
- 3) найти наибольший относительный угол закручивания.

Решение

1. Построение эпюры крутящих моментов.

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях бруса, определяются с помощью метода сечений. В данном примере определять внутренние моменты по участкам удобнее, начиная от правого свободного края.

Рассекая последовательно каждый участок вала, и отбрасывая левую часть вала, из уравнений равновесия получим:

I участок (KD)

$$T_1 = M_4 = 1,6 \text{ МПа} ,$$

II участок (DC)

$$T_2 = M_4 - M_3 = 1,6 - 2 = -0,4 \text{ кНм} ,$$

III участок (CB)

$$T_3 = M_4 - M_3 + M_2 = 1,6 - 2 + 1,6 = 1,2 \text{ кНм} ,$$

IV участок (BA)

$$T_4 = M_4 - M_3 + M_2 - M_1 = 1,6 - 2 + 1,6 - 2 = -0,8 \text{ кНм} .$$

По значениям этих моментов строим эпюру T в выбранном масштабе (рис.4.11).

2. Определение диаметра вала.

Максимальный по модулю крутящий момент равен

$$|T|_{\max} = 1,6 \text{ кНм} .$$

Из условия прочности при кручении вала

$$\tau_{\max} = \frac{|T|_{\max}}{W_p} \leq [\tau]$$

определяем полярный момент сопротивления сечения вала:

$$W_p \geq \frac{|T|_{\max}}{[\tau]} = \frac{1,6 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{80 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2} = 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

$$\text{Диаметр вала } d \geq \sqrt[3]{\frac{16W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{3,14}} = 0,0467 \text{ м} = 46,7 \text{ мм}.$$

Округляем до ближайшего большего значения: $d = 50 \text{ мм} = 0,05 \text{ м}$.

3. Определение наибольшего относительного угла закручивания.

$$\theta_{\max} = \frac{|T_{\max}|}{G \cdot J_p},$$

где $|T_{\max}| = T_1$.

Вычисляем: GJ_p – жесткость сечения вала при кручении.

Полярный момент инерции круга

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (5 \cdot 10^{-2})^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 5^4 \cdot 10^{-8}}{32} = 61,33 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Модуль сдвига $G = 0,77 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Жесткость вала при кручении $GJ_p = 47,2 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2$.

Относительный угол закручивания

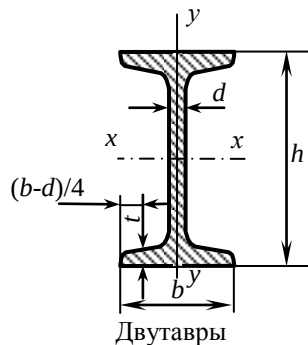
$$\theta = \frac{T_1}{G \cdot J_p} = \frac{1,6 \cdot 10^3 \text{ Нм}}{47,2 \cdot 10^3 \text{ Нм}^2} = 0,0339 \text{ рад/м}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.В.* Сопротивление материалов : учебник для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин – 6-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2008 . – 560 с.
2. *Дарков А.В.* Сопротивление материалов. /А.В. Дарков, Г.С. Шпиро – М.: Высшая школа, 1989. – 624 с.
3. *Писаренко Г.С.* Справочник по сопротивлению материалов. /Г.С.Писаренко, А.П.Яковлев, В.В.Матвеев. – 3-е изд. перераб. и доп. – К.: Издательство Дельта, 2008. – 816 с.
4. *Серазутдинов М.Н.* Прикладная механика: учебник /М.Н.Серазутдинов [и др.] – Казань: Веда, 2011. – 322 с.
5. *Степин П.А.* Сопротивление материалов : учебник / П. А. Степин . – 10-е изд., стер . – СПб. : Лань, 2010 . – 320 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература) .
6. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики : учебник для втузов / С. М. Тарг . – 19-е изд., стер . – М. : Высшая школа, 2009 . – 416 с.
7. *Яблонский А.А.* Курс теоретической механики: Ч.1. Статика. Кинематика.: Ч.2. Динамика. : учебное пособие для втузов / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова . – 12-е изд., испр. – М. : Интеграл-Пресс, 2006 . – 608 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Сортамент прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8239-72, 8240-72, 8510-72

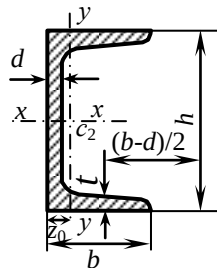


Т а б л и ц а 9

Номер балки	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	Масса 1м, кг	Справочные величины для осей						
							x - x				y - y		
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>t</i>			<i>I_x</i> , см ⁴	<i>W_x</i> , см ³	<i>i_x</i> , см	<i>S_x</i> , см ³	<i>I_y</i> , см ⁴	<i>W_y</i> , см ³	<i>I_y</i> , см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	100	55	4.5	7.2	12.0	9.46	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22
12	120	64	4.8	7.3	14.7	11.50	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38
14	140	73	4.9	7.5	17.4	13.70	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.50	1.55

Продолжение таблицы 9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16	160	81	5.0	7.8	20.2	15.90	873	109.0	6.57	62.3	58.6	14.50	1.70
18	180	90	5.1	8.1	23.4	18.40	1290	143.0	7.42	81.4	82.6	18.40	1.88
18a	180	100	5.1	8.3	25.4	19.90	1430	159.0	7.51	89.8	114.0	22.80	2.12
20	200	100	5.2	8.4	26.8	21.00	1840	184.0	8.28	104.0	115.0	23.10	2.07
20a	200	110	5.2	8.6	28.9	22.70	2030	203.0	8.37	114.0	155.0	28.20	2.32
22	220	110	5.4	8.7	30.6	24.00	2550	232.0	9.13	131.0	157.0	28.60	2.27
22a	220	120	5.4	8.9	32.8	25.80	2790	254.0	9.22	143.0	206.0	34.30	2.50
24	240	115	5.6	9.5	34.8	27.30	3460	289.0	9.97	163.0	198.0	34.50	2.37
24a	240	125	5.6	9.8	37.5	29.40	3800	317.0	10.10	178.0	260.0	41.60	2.63
27	270	125	6.0	9.8	40.2	31.50	5010	371.0	11.20	210.0	260.0	41.50	2.54
27a	270	135	6.0	10.2	43.2	33.90	5500	407.0	11.30	229.0	337.0	50.00	2.80
30	300	135	6.5	10.2	46.5	36.50	7080	472.0	12.30	268.0	337.0	49.90	2.69
30a	300	145	6.5	10.7	49.9	39.20	7780	518.0	12.50	292.0	436.0	60.10	2.95
33	330	140	7.0	11.2	53.8	42.20	9840	597.0	13.50	339.0	419.0	59.90	2.79
36	360	145	7.5	12.3	61.9	48.60	13380	743.0	14.70	423.0	516.0	71.10	2.89
40	400	155	8.3	13.0	72.6	57.00	19062	953.0	16.20	545.0	667.0	86.10	3.03
45	450	160	9.0	14.2	84.7	66.50	27696	1231.0	18.10	708.0	808.0	101.00	3.09
50	500	170	10.0	15.2	100.0	78.50	39727	1589.0	19.90	919.0	1043.0	123.00	3.23
55	550	180	11.0	16.5	118.0	92.60	55962	2035.0	21.80	1181.0	1356.0	151.00	3.39
60	600	190	12.0	17.8	138.0	108.00	76806	2560.0	23.60	1491.0	1725.0	182.00	3.54



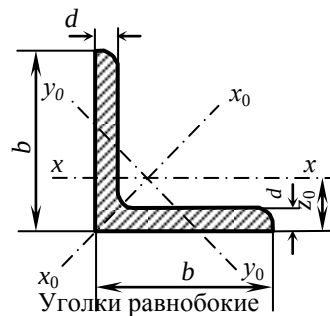
Швеллеры

Т а б л и ц а 10

№ про- филей	Масса 1м, кг	Размеры, мм				Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей							z ₀ см
							x – x				y – y			
							I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	I _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8	1,53	1,54

Продолжение таблицы 10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,90	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10200	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75



Т а б л и ц а 11

№ про- фи- лей	Размеры, мм		Площадь профиля, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей							z ₀ , см
	b	d			x – x		x ₀ – x ₀		y ₀ –y ₀		x ₁ – x ₁	
					I _x , см ⁴	i _x , см	I _{x₀} max см ⁴	i _{x₀} max см	I _{y₀} min см ⁴	i _{y₀} min см	I _{x₁} , см ⁴	
1	2	3	4	55	6	7	8	9	10	11	12	13
2	20	3	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4	1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	25	3	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4	1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2.8	28	3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80

Продолжение таблицы 11

1	2	3	4	55	6	7	8	9	10	11	12	13
3,2	32	3	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4	2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
3,6	36	3	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4	2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
		5	3,79	2,97	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17
4,5	45	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5	4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
		4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
7	70	6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,0	2,02

Продолжение таблицы 11

1	2	3	4	55	6	7	8	9	10	11	12	13
7,5	75	5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
8	80	5,5	8,63	6,78	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
		6	9,38	7,36	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19
		7	10,8	8,51	65,3	2,45	104	3,09	27,0	1,58	119	2,23
		8	12,3	9,65	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27
9	90	6	10,6	8,33	82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
		7	12,3	9,64	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
		8	13,9	10,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
		9	15,6	12,2	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
10	100	6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00

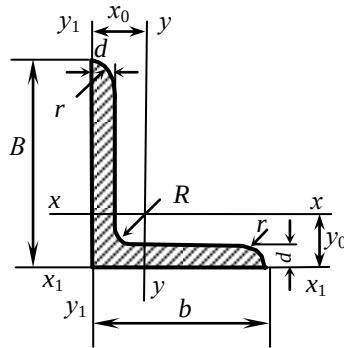
Продолжение таблицы 11

1	2	3	4	55	6	7	8	9	10	11	12	13
12,5	125	8	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90
16	160	10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20	60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89

Продолжение таблицы 11

1	2	3	4	55	6	7	8	9	10	11	12	13
20	200	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30	111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16	68,6	53,8	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
		16	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18	87,7	68,9	5247	7,74	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20	97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
25	250	22	106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25	119,7	94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28	133,1	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30	142,0	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31

Уголки неравнобокие



B – ширина большой полки; b – ширина полки; d – толщина полки; R и r – радиусы внутреннего и наружного закругления полки; I – момент инерции; i – радиус инерции; x_0, y_0 – расстояние от центра тяжести до наружных граней полок.

Т а б л и ц а 12

№ профи- лей	Размеры, мм					Пло- щадь сече- ния, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей										Угол нак- лона оси, tg α
	B	b	d	R	r			x – x		y – y		x ₁ – x ₁		y ₁ – y ₁		u – u		
								I _x , см ⁴	i _x , см	I _y , см ⁴	I _y , см	I _{x1 min} , см ⁴	y _o , см	I _{y1 min} , см ⁴	x _o , см	I _{u min} , см ⁴	I _{u min} , см	
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1.16	0.91	0.70	0.78	0.22	0.44	1.56	0.85	0.43	0.42	0.13	0.34	0.392
3,2/2	32	20	3 4	3,5	1,2	1.49	1.17	1.52	1.01	0.46	0.55	3.26	1.08	0.85	0.49	0.28	0.43	0.382
						1.94	1.52	1.93	1.00	0.57	0.54	4.38	1.12	1.12	0.53	0.35	0.43	0.374
4/2,5	40	25	3 4	4,0	1,3	1.89	1.48	3.06	1.27	0.93	0.70	6.37	1.32	1.58	0.59	0.56	0.54	0.385
						2.47	1.94	3.93	1.26	1.18	0.69	8.53	1.37	2.15	0.63	0.71	0.54	0.381

Продолжение таблицы 12

№ профи- лей	Размеры, мм					Пло- щадь сече- ния, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей												Угол нак- лона оси, tg α
	B	b	d	R	r			x – x		y – y		x ₁ – x ₁		y ₁ – y ₁		u – u				
								I _x , см ⁴	i _x , см	I _y , см ⁴	I _y , см	I _{x1 min} , см ⁴	y _o , см	I _{y1 min} , см ⁴	x _o , см	I _{u min} , см ⁴	I _{u min} , см			
4,5/2,8	45	28	3 4	5	1,7	2.14 2.80	1.68 2.20	4.41 5.68	1.43 1.42	1.32 1.69	0.79 0.78	9.02 12.1	1.47 1.51	2.20 2.98	0.64 0.68	0.79 1.02	0.61 0.60	0.382 0.379		
5/3,2	50	32	3 4	5,5	1,8	2.42 3.17	1.90 2.49	6.17 7.98	1.60 1.59	1.99 2.56	0.91 0.90	12.4 16.6	1.60 1.65	3.26 4.42	0.72 0.76	1.18 1.52	0.70 0.69	0.403 0.401		
5,6/3,6	56	36	4 5	6	2	3.58 4.41	2.81 3.46	11.4 13.8	1.78 1.77	3.70 4.48	1.02 1.01	23.2 29.2	1.82 1.86	6.25 7.91	0.84 0.88	2.19 2.66	0.78 0.78	0.406 0.404		
6,3/4,0	63	40	4	7	2,3	4.04	3.17	16.3	2.01	5.16	1.13	33.0	2.03	8.51	0.91	3.07	0.87	0.397		
			5			4.98	3.91	19.9	2.00	6.26	1.12	41.4	2.08	10.8	0.95	3.73	0.86	0.396		
			6			5.90	4.63	23.3	1.99	7.28	1.11	49.9	2.12	13.1	0.99	4.36	0.86	0.393		
			8			7.68	6.03	29.6	1.96	9.15	1.09	66.9	2.20	17.9	1.07	5.58	0.85	0.386		
7/4,5	70	45	5	7,5	2,5	5.59	4.39	27.8	2.23	9.05	1.27	56.7	2.28	15.2	1.05	5.34	0.98	0.404		
7,5/5	75	50	5	8	2,7	6.11	4.79	34.8	2.30	12.5	1.43	69.7	2.39	20.8	1.17	7.24	1.09	0.436		
			6			7.25	5.69	40.9	2.38	14.6	1.42	83.9	2.44	25.2	1.21	8.48	1.08	0.435		
			8			9.47	7.43	52.4	2.35	18.3	1.40	112	2.52	34.2	1.29	10.9	1.07	0.430		
8/5	80	50	5	8	2,7	6.36	4.99	41.6	2.56	12.7	1.41	84.6	2.6	20.8	1.13	7.58	1.09	0.387		
			6			7.55	5.92	49.0	2.55	14.8	1.40	102	2.65	25.2	1.17	8.88	1.08	0.386		
9/5,6	90	56	5	9	3	7.86	6.17	65.3	2.88	19.7	1.58	132	2.92	32.2	1.26	11.8	1.22	0.384		
			6			8.54	6.70	70.6	2.88	21.2	1.58	145	2.95	35.2	1.28	12.7	1.22	0.384		
			8			11.18	8.77	90.9	2.85	27.1	1.56	194	3.04	47.8	1.36	16.3	1.21	0.380		

Продолжение таблицы 12

№ профи- лей	Размеры, мм					Пло- щадь сече- ния, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей											Угол нак- лона оси, tg α
	B	b	d	R	r			x – x		y – y		x ₁ – x ₁		y ₁ – y ₁		u – u			
								I _x , см ⁴	i _x , см	I _y , см ⁴	I _y , см	I _{x1 min} , см ⁴	y _o , см	I _{y1 min} , см ⁴	x _o , см	I _{u min} , см ⁴	I _{u min} , см		
10/6,3	100	63	6	10	3,3	9.59	7.53	98.3	3.2	30.6	1.79	198	3.23	49.9	1.42	18.2	1.38	0.393	
			7			11.1	8.70	113	3.19	35.0	1.78	232	3.28	58.7	1.46	20.8	1.37	0.392	
			8			12.6	9.87	127	3.18	39.2	1.77	266	3.32	67.6	1.50	23.4	1.36	0.391	
			10			15.5	12.1	154	3.15	47.1	1.75	333	3.40	85.8	1.58	28.3	1.35	0.387	
1/7	110	70	6	10	3,3	11.4	8.98	112	3.53	45.6	2	286	3.55	74.3	1.58	26.9	1.53	0.402	
			8			13.9	10.9	172	3.51	54.6	1.98	353	3.61	92.3	1.64	32.3	1.52	0.400	
12,5/8	125	80	7	11	3,7	14.1	11	227	4.01	73.7	2.29	452	4.01	119	1.8	43.4	1.76	0.407	
			8			16	12.5	256	4	83.0	2.28	518	4.05	137	1.84	48.8	1.75	0.406	
			10			19.7	15.5	312	3.98	100	2.26	649	4.14	173	1.92	59.3	1.74	0.404	
			12			23.4	18.3	365	3.95	117	2.24	781	4.22	210	2	69.5	1.72	0.400	
14/9	140	90	8	12	4	18	14.1	364	4.49	120	2.58	727	4.49	194	2.03	70.3	1.98	0.411	
			10			22.2	17.5	444	4.70	146	2.56	911	4.58	245	2.12	85.5	1.96	0.409	
16/10	160	100	9	13	4,3	22.9	18	606	5.15	186	2.85	1221	5.19	300	2.23	110	2.2	0.391	
			10			25.3	19.8	667	5.13	204	2.84	1359	5.23	335	2.28	121	2.19	0.390	
			12			30	23.6	784	5.11	239	2.82	1634	5.32	405	2.36	142	2.18	0.388	
			14			34.7	27.3	897	5.08	272	2.8	1910	5.40	477	2.43	162	2.16	0.385	

Продолжение таблицы 12

№ профи- лей	Размеры, мм					Пло- щадь сече- ния, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей										
	B	b	d	R	r			x – x		y – y		x ₁ – x ₁		y ₁ – y ₁		u – u		Угол нак- лона оси, tg α
								I _x , см ⁴	i _x , см	I _y , см ⁴	I _y , см	I _{x1 min} , см ⁴	y _o , см	I _{y1 min} , см ⁴	x _o , см	I _{u min} , см ⁴	I _{u min} , см	
18/11	180	110	10 12	14	4,7	28.3 33.7	22.2 26.4	952 1123	5.8 5.77	276 324	3.12 3.10	1933 2324	5.88 5.97	444 537	2.44 2.52	165 194	2.42 2.40	0.375 0.374
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34.9	27.4	1449	6.45	446	3.58	2920	6.5	718	2.79	264	2.75	0.392
			12			37.9	29.7	1568	3.43	482	3.57	3189	6.54	786	2.83	286	2.74	0.392
			14			43.9	34.4	1801	6.41	551	3.54	3726	6.62	922	2.91	327	2.73	0.390
			16			49.8	39.1	2026	6.38	617	3.52	4264	6.71	1061	2.99	367	2.72	0.388
25/16	250	160	12	18	6	48.3	37.9	3147	8.07	1032	4.62	6212	7.97	1634	3.53	604	3.54	0.410
			16			63.6	49.9	4091	8.02	1333	4.58	8308	8.14	2200	3.69	781	3.50	0.408
			18			71.1	55.8	4545	7.99	1475	4.56	9358	8.23	2487	3.77	806	3.49	0.407
			20			78.5	61.7	4987	7.97	1613	4.53	10410	8.31	2776	3.85	949	3.48	0.405