Всероссийский (третий) этап Всероссийской олимпиады студентов по теоретической механике

Казань, Казанский национальный исследовательский технологический университет
3-7 декабря 2014 г.

Решения задач теоретического конкурса

Автор задач:
доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштари Айрат Ильдарович

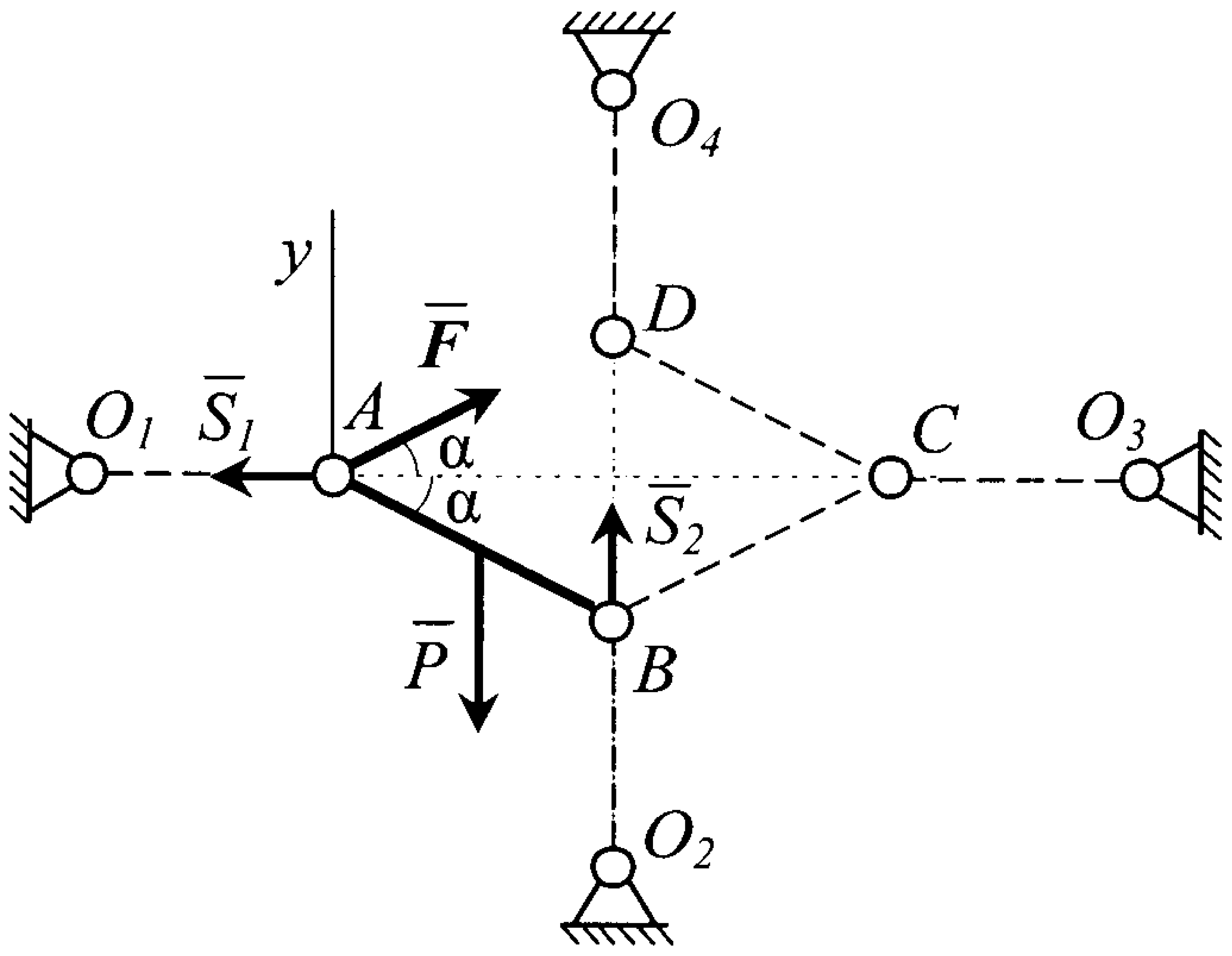

Рис. 1

Решение задачи С1.

1). *1 способ.* Рассмотрим равновесие системы, состоящей из стержней *AB*, *BC*, *CD*. Силы, действующие на неё со стороны шарнирных стержней O_1A, O_2B, O_3C, O_4D, образуют систему сходящихся сил, линии действия которых пересекаются в точке O (рис. 1). Поэтому моменты от них относительно точки O равны нулю. Достаточно записать одно уравнение равновесия:

$$\sum_k M_O(F_k) = P\cdot\frac{AO}{2} - F\cdot AO\sin 30^o = 0\,.$$

Отсюда $F = P$.

2 способ. Так как шарнирные стержни O_4D и CD невесомы, то, рассуждая формально, точка D находится в равновесии под действием системы сходящихся сил, состоящей из двух сил реакций этих стержней: $\overline{S}_{O_4D} + \overline{S}_{CD} = 0$. Но, так как эти два вектора имеют различные направления, такое возможно, лишь если $S_{O_4D} = S_{CD} = 0$. С учетом этого, рассматривая равновесие шарнира C и рассуждая по аналогии, получим, что $S_{O_3C} = S_{BC} = 0$. Поэтому на точку B стержня AB действует лишь сила реакции $\overline{S}_2$ со стороны шарнирного стержня O_2B.

Рассмотрим равновесие плоской системы сил, действующей на стержень AB (рис. 1). Помимо $\overline{P}$, $\overline{F}$, $\overline{S}_2$ на него действует также реакция $\overline{S}_1$ со стороны шарнирного стержня O_1A. Запишем два уравнения равновесия AB:

$$\sum_k F_{ky} = F\sin 30^o - P + S_2 = 0, \qquad (1)$$

$$\sum_k M_A(F_k) = -P\cdot\frac{AB}{2}\cos 30^o + S_2\cdot AB\cos 30^o = 0, \qquad (2)$$

Из (2): $S_2 = P/2$. Тогда из (1): $\frac{F}{2} - P + \frac{P}{2} = 0$, откуда $F = P$.

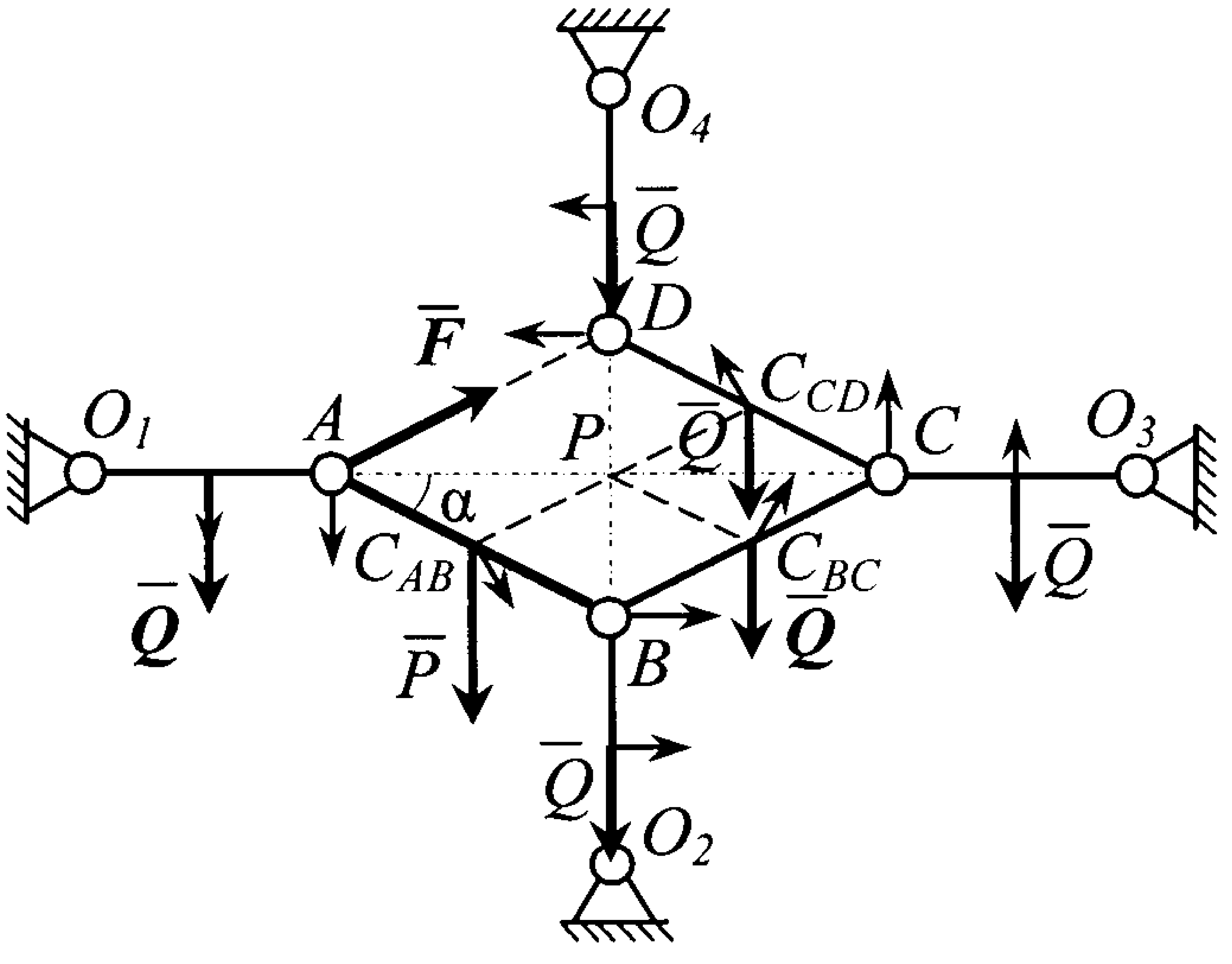

Рис. 2

2). Удобно применить принцип возможных перемещений. На рис. 2 возможные перемещения точек указаны тонкими векторами без подписей (чтобы не загромождать рисунок). Обозначим через $\delta\overline{r}_i$, $i=\overline{1,4}$, возможные перемещения центров тяжестей стержней с концами O_i, соответственно, а через $\delta\overline{r}_{(AB)}$, $\delta\overline{r}_{(BC)}$, $\delta\overline{r}_{(CD)}$ возможные перемещения центров тяжести C_{AB}, C_{BC}, C_{CD} соответствующих стержней. Последние три стержня совершают мгновенное плоскопараллельное движение. Мгновенным центром вращения для каждого из этих стержней является точка P – центр ромба $ABCD$. Рассматривая возможное перемещение стержня AB, получим:

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{BP}{AP} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ \delta s_B = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta s_A, \qquad (3)$$

$$\frac{\delta s_A}{\delta s_{(AB)}} = \frac{AP}{C_{AB}P} = \sqrt{3}, \ \delta s_A = \sqrt{3}\, \delta s_{(AB)}. \qquad (4)$$

Аналогично рассмотрим возможные перемещения стержней BC, CD:

$$\delta s_B = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta s_C, \ \delta s_C = \sqrt{3}\, \delta s_{(BC)}. \qquad (5)$$

$$\delta s_D = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta s_C, \ \delta s_C = \sqrt{3}\, \delta s_{(CD)}. \qquad (6)$$

Из сравнения (3), (4) с (5) и (6):

$$\delta s_A = \delta s_C = \sqrt{3}\, \delta s_B = \sqrt{3}\, \delta s_D = \sqrt{3}\, \delta s_{(AB)} = \sqrt{3}\, \delta s_{(BC)} = \sqrt{3}\, \delta s_{(CD)}.$$

Кроме того, для возможных перемещений центров тяжести стержней O_1A и O_3C:

$$\delta s_{(O_1A)} = \frac{\delta s_A}{2} = \frac{\delta s_C}{2} = \delta s_{(O_3C)}.$$

Уравнение принципа возможных перемещений:

$$\sum_k \delta A_{F_k} = Q\delta s_{(O_1A)} + F\delta s_A \cos 120^o + P\delta s_{(AB)} \cos 30^o + Q\delta s_{(O_2B)} \cos 90^o +$$

$$+ Q\delta s_{(BC)} \cos 150^o - Q\delta s_{(O_3C)} + Q\delta s_{(CD)} \cos 150^o + Q\delta s_{(O_4D)} \cos 90^o = 0.$$

После упрощений и сокращений, получим

$$- F\delta s_A \cos 60^o + P\delta s_{(AB)} \cos 30^o - Q\delta s_{(BC)} \cos 30^o - Q\delta s_{(CD)} \cos 30^o = 0.$$

$$- F\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + P\frac{\sqrt{3}}{2} - 2Q\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

$$F = P - 2Q = \frac{2}{3} P.$$

Ответ. 1). $F = P$. 2). $F = \frac{2}{3} P$.

Решение задачи С2.

1 способ (векторный). Обозначим силы упругости, действующие на точку M со стороны нитей *1* и *2* через $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ (рис. 3). Растяжения этих нитей равны MA и MB. Поэтому

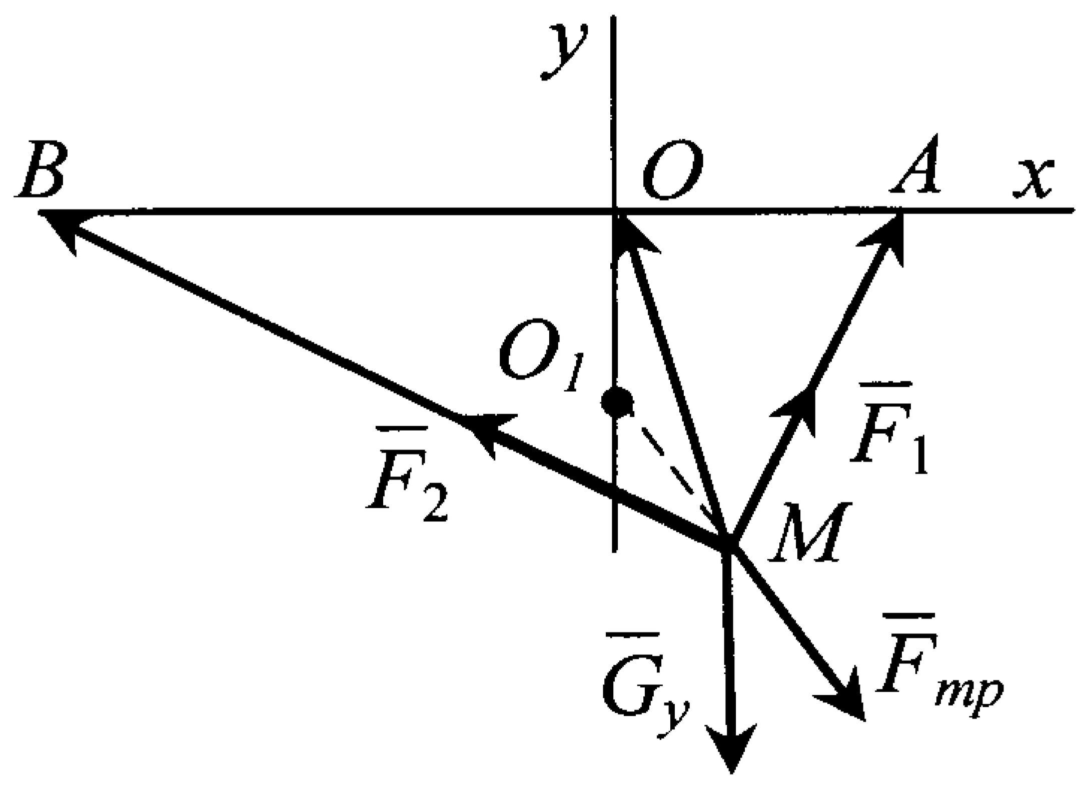

Рис. 3

$$\overline{F}_1 = c_1 \cdot \overline{MA} = c \cdot \overline{MA},$$

$$\overline{F}_2 = c_2 \cdot \overline{MB} = \frac{c}{2} \cdot \overline{MB}.$$

Учтем, что $\overline{MA} = \overline{MO} + \overline{OA}$, $\overline{MB} = \overline{MO} + \overline{OB}$, причем из условия следует, что $\overline{OB} = -2\,\overline{OA}$. Тогда

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 = c\left(\overline{MA} + \frac{\overline{MB}}{2}\right) = c\left(\overline{MO} + \overline{OA} + \frac{\overline{MO}}{2} - \overline{OA}\right) = \frac{3}{2}c \cdot \overline{MO} = -\frac{3}{2}c\,\overline{r}, \quad (1)$$

где $\overline{OM} = \overline{r}$ – радиус-вектор точки M.

Разложим силу тяжести на составляющие: $\overline{G} = \overline{G}_y + \overline{G}_z$, здесь ось z перпендикулярна наклонной плоскости.

Точка M находится в равновесии под действием пространственной системы сходящихся сил. Уравнение её равновесия:

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{G} + \overline{N} + \overline{F}_{mp} = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) в векторной проекции на плоскость xy имеет вид:

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{G}_y + \overline{F}_{mp} = 0.$$

С учетом (1) получим:

$$\overline{F}_{mp} = -\overline{G}_y + \frac{3}{2}c\,\overline{r}.$$

$$\frac{2}{3c}\overline{F}_{mp} = -\frac{2}{3c}\overline{G}_y + \overline{r}. \qquad (3)$$

Вектор в правой части (2) обозначим через

$$\overline{r}_1 = -\frac{2}{3c}\overline{G}_y + \overline{r}. \qquad (4)$$

Обозначим через O_1 точку на плоскости xy, такую, что

$\overline{O_1O} = -\frac{2}{3c}\overline{G}_y$. С учетом $\bar{r} = \overline{OM}$ получим из (4): $\bar{r}_1 = \overline{O_1O} + \overline{OM} = \overline{O_1M}$, то есть $\bar{r}_1$ – радиус-вектор точки M, отсчитываемый от точки O_1.

Уточним положение O_1. В проекциях на x, y: $\overline{G}_y = (0, -mg\sin\alpha)$. Поэтому $\overline{OO_1} = -\overline{O_1O} = \frac{2}{3c}\cdot(0, -mg\sin\alpha) = \left(0,\ -\frac{2mg\sin\alpha}{3c}\right)$, то есть O_1 находится на оси y ниже точки O на расстояние $\frac{2mg\sin\alpha}{3c}$.

Из (3), (4):

$$\bar{r}_1 = \frac{2}{3c}\overline{F}_{mp}. \tag{5}$$

При равновесии точки M: $F_{mp} \le fN$. Из проекции уравнения равновесия (2) на ось z: $N = G_z = mg\cos\alpha$. Поэтому из (5) следует, что точка M находится в равновесии при

$$|\bar{r}_1| = \frac{2}{3c}\left|\overline{F}_{mp}\right| \le \frac{2}{3c} fN = \frac{2fmg\cos\alpha}{3c},$$

то есть M удалена от точки O_1 не более, чем на $\frac{2fmg\cos\alpha}{3c}$, то есть принадлежит кругу с центром O_1 этого радиуса.

2 способ (координатный).

Величины сил упругости:

$$F_1 = c_1\cdot MA,\quad F_2 = c_2\cdot MB. \tag{6}$$

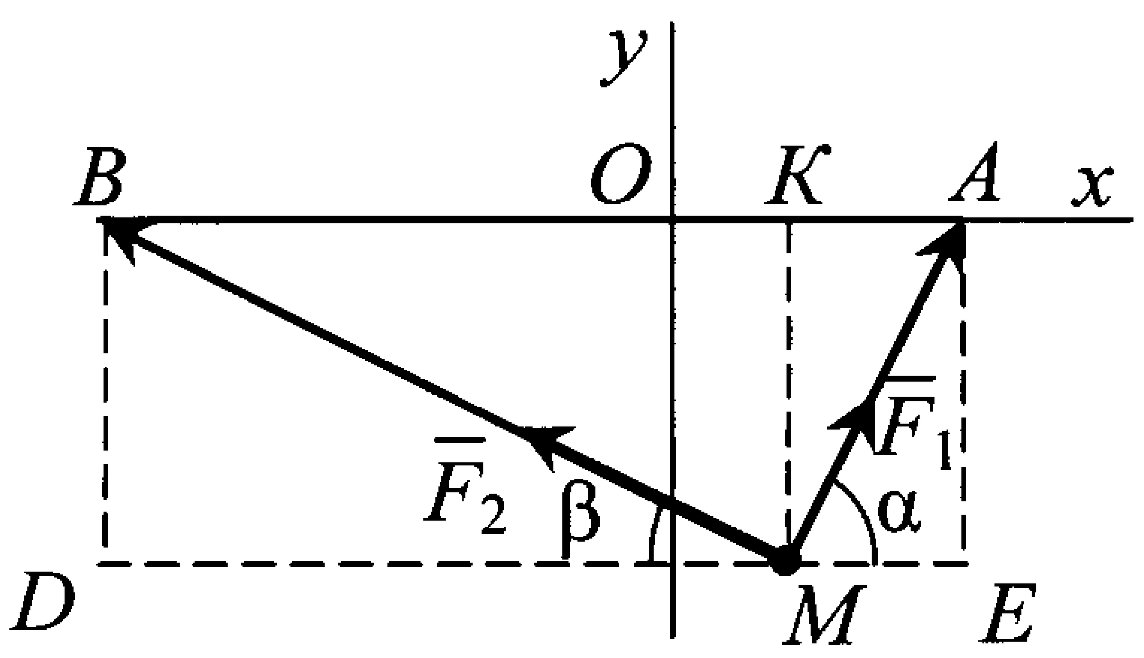

Рис. 4

Для определенности укажем точку M правее оси y и ниже оси x, без ограничения общности дальнейших выкладок (рис. 4). Выразим проекции силы $\overline{F_1}$ на оси x, y с использованием координат x_M, y_M точки M.

$$F_{1x} = F_1\cos\alpha,\ F_{1y} = F_1\sin\alpha.$$

Из треугольника AME:

$$\cos\alpha = \frac{ME}{MA}, \quad \sin\alpha = \frac{AE}{MA} = \frac{MK}{MA},$$

где $ME = OA - OK = a - x_M$, $MK = -y_M$. Отсюда получим:

$$F_{1x} = \frac{a - x_M}{MA} \cdot F_1, \quad F_{1y} = \frac{-y_M}{MA} F_1. \qquad (7)$$

Проводя аналогичные выкладки, из треугольника MBD получим, с учетом $MD = OB + OK = 2a + x_M$, $MK = -y_M$:

$$F_{2x} = \frac{2a + x_M}{MB} \cdot F_2, \quad F_{2y} = \frac{-y_M}{MB} F_2. \qquad (8)$$

Проецируем уравнение равновесия (2) на ось x:

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{mp,x} = 0.$$

С учетом (6), (7), (8) получим:

$$\frac{a - x_M}{MA} \cdot c_1 \cdot MA - \frac{2a + x_M}{MB} \cdot c_2 \cdot MB + F_{mp,x} = 0.$$

$$F_{mp,x} = -c(a - x_M) + \frac{c}{2}(2a + x_M) = cx_M + \frac{c}{2}x_M = \frac{3}{2}cx_M. \qquad (9)$$

Проецируем уравнение равновесия (2) на ось y:

$$F_{1y} + F_{2y} - G\sin\alpha + F_{mp,y} = 0.$$

С учетом (6), (7), (8) получим:

$$-\frac{y_M}{MA} \cdot c_1 \cdot MA - \frac{y_M}{MB} \cdot c_2 \cdot MB - G\sin\alpha + F_{mp,y} = 0.$$

$$F_{mp,y} = cy_M + \frac{c}{2}y_M + mg\sin\alpha = \frac{3}{2}cy_M + mg\sin\alpha. \qquad (10)$$

Тогда, используя (9), (10):

$$F_{mp}^2 = F_{mp,x}^2 + F_{mp,y}^2 = \left(\frac{3}{2}cx_M\right)^2 + \left(\frac{3}{2}cy_M + mg\sin\alpha\right)^2.$$

С другой стороны, $\left|F_{mp}\right| \le fN = fmg\cos\alpha$. Отсюда

$$\left(\frac{3}{2}cx_M\right)^2 + \left(\frac{3}{2}cy_M + mg\sin\alpha\right)^2 \le (fmg\cos\alpha)^2.$$

$$x_M{}^2 + \left(y_M + \frac{2mg\sin\alpha}{3c} \right)^2 \le \left(\frac{2f\,mg\cos\alpha}{3c} \right)^2.$$

Таким образом, точка M лежит к круге с центром $\left(0, -\dfrac{2mg\sin\alpha}{3c} \right)$ радиуса $\dfrac{2f\,mg\cos\alpha}{3c}$.

Ответ. Круг с центром в точке $\left(0, -\dfrac{2mg\sin\alpha}{3c} \right)$ радиуса $\dfrac{2fmg\cos\alpha}{3c}$.

Решение задачи К1.

Перепишем заданное соотношение $v = \sqrt{1 - ka_\tau}$ в виде дифференциального уравнения.

$$ka_\tau = 1 - v^2. \qquad (1)$$

Используем известное представление: $a_\tau = \dfrac{dv_\tau}{dt} = \dfrac{dv_\tau}{ds}\dfrac{ds}{dt} = v_\tau \dfrac{dv_\tau}{ds}$.

$$kv_\tau \frac{dv_\tau}{ds} = 1 - v^2.$$

$$k\frac{d(v^2)}{2(1 - v^2)} = ds.$$

Введем новую переменную $y = v^2$. При $t = 0$ из $a_\tau = 1/k$, с учетом (1), получаем $v(0) = 0$, то есть $y(0) = 0$.

$$-\frac{k}{2}\int_0^y \frac{dy}{y-1} = \int_0^s ds.$$

$$s = -\frac{k}{2}\ln\left|\frac{y-1}{-1}\right| = -\frac{k}{2}\ln|1-y| = -\frac{k}{2}\ln(1-y) = -\frac{k}{2}\ln(1-v^2).$$

Здесь, отбрасывая знак модуля, учли, что при $t = 0$: $1 - y = 1 > 0$, а функция $s = s(v)$ должна быть непрерывной.

$$1 - v^2 = \exp\left(-\frac{2s}{k}\right),$$

С учетом (1) получим:

$$ka_\tau = \exp\left(-\frac{2s}{k}\right).$$

При $s = k$ (м):

$$a_\tau = \frac{1}{ke^2}.$$

Замечание. К виду $ka_\tau = 1 - v^2$ может быть сведено, например, ДУ движения материальной точки при действии постоянной силы и силы сопротивления среды (при определенном подборе параметров).

Ответ. $a_\tau = \dfrac{1}{ke^2}$.

Решение задачи К2.

1). Стержень AM совершает плоскопараллельное движение. При этом $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{M/A}$. При равноускоренном движении точки A и равноускоренном вращении AM в любой момент времени выполняется: $v_A = at$, угол поворота стержня AM равен $\varphi = \dfrac{\varepsilon t^2}{2}$, его угловая скорость $\omega = \varepsilon t$, $v_{M/A} = l\omega = l\varepsilon t$.

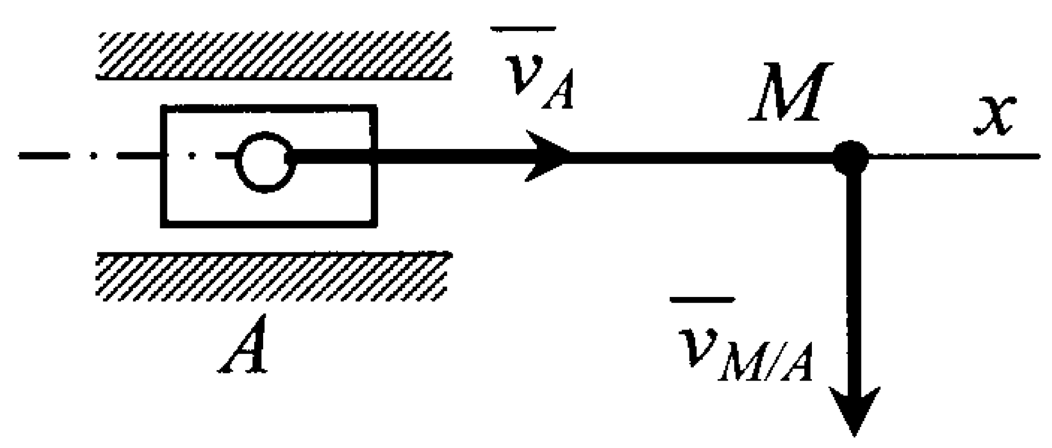

Рис. 5

В первый момент, когда точка M окажется на оси x (рис. 5), $\varphi = \pi/2$, $t = \sqrt{\dfrac{\pi}{\varepsilon}}$, $\bar{v}_{M/A}$ перпендикулярен $\bar{v}_A$.

$$v_M = \sqrt{v_A^2 + v_{M/A}^2} = \sqrt{(at)^2 + (l\varepsilon t)^2} = \sqrt{\frac{\pi(a^2 + l^2\varepsilon^2)}{\varepsilon}}.$$

2). *1-й способ (геометрический).*

По теореме о сложении ускорений при плоском движении:

$$\overline{a}_M = \overline{a}_A + \overline{a}_{M/A} = \overline{a}_A + \overline{a}^{\tau}_{M/A} + \overline{a}^{n}_{M/A}, \tag{1}$$

где $a_A = a$, $a^{\tau}_{M/A} = l\varepsilon$, $a^{n}_{M/A} = l\omega^2$.

Вначале приведем ход рассуждений, не приводящий к решению. При $t=0$ (рис. 6): $\omega = \varepsilon \cdot 0 = 0$, $a^{n}_{M/A} = 0$, то есть $\overline{a}_M$ параллелен оси *x*, далее $v_A = v_{M/A} = 0$, откуда $v_M = 0$. При $t \to 0$, $\varphi \to 0$ направление $\overline{v}_{M/A}$, а значит и $\overline{v}_M$, стремится к направлению оси *x*. Для определения нормального ускорения точки проецируем $\overline{a}_M$ на ось, перпендикулярную $\overline{v}_M$. При $t=0$: $a_n = (\overline{a}_M)_y = 0$. Таким образом, применить формулу для радиуса кривизны $\rho = v^2 / a_n$ при $t=0$ не удается из-за неопределенности вида $0/0$.

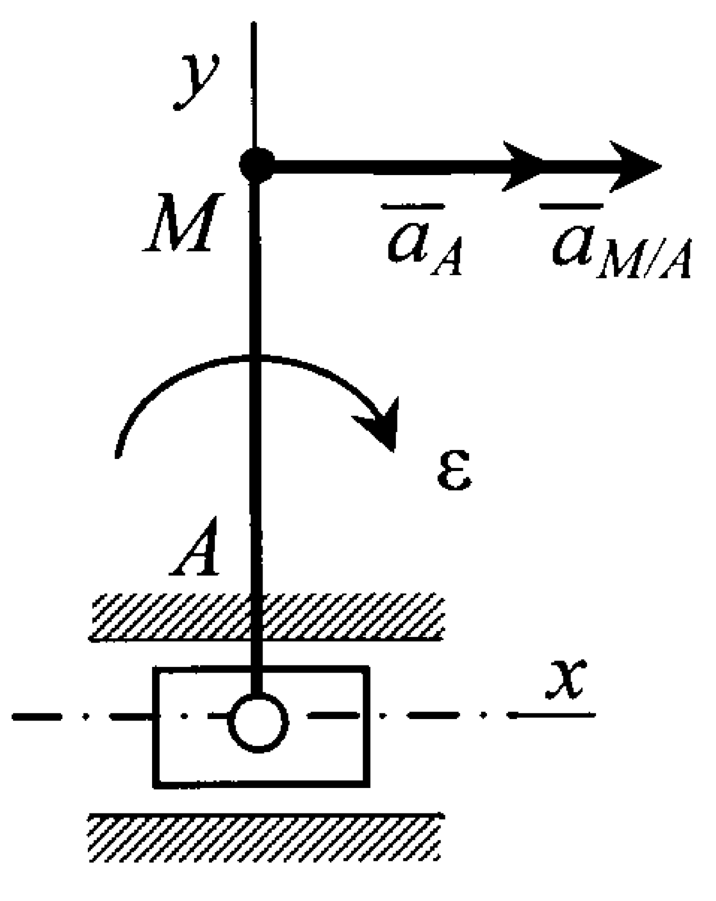

Рис. 6

К решению приводит следующее рассуждение (рис. 7). Положение точки *M* полностью определяется прямолинейным перемещением точки *A*, при котором $s_A = \dfrac{at^2}{2}$, и перемещением точки *M* при повороте *AM*, то есть длиной дуги $M'M$: $s_{M'M} = l\varphi = l\dfrac{\varepsilon t^2}{2}$. Установим связь между s_A и $s_{M'M}$:

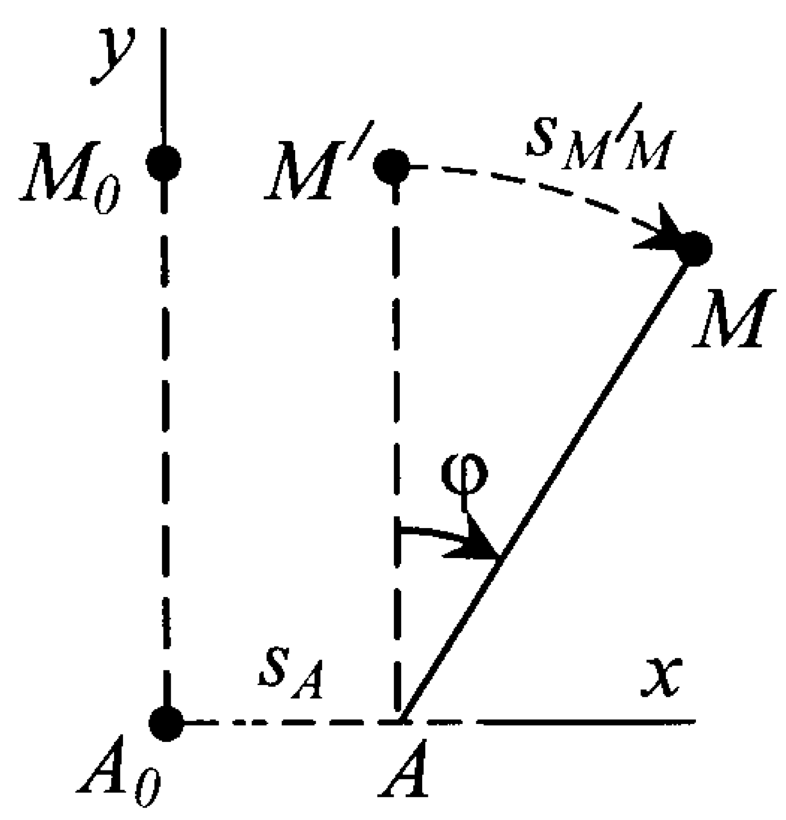

Рис. 7

$$s_{M'M} = l\frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{l\varepsilon}{a} \cdot \frac{at^2}{2} = \frac{l\varepsilon}{a} s_A. \tag{2}$$

Таким образом, величина $s_{M'M}$ связана с s_A коэффициентом, не зависящим от времени. Поэтому при заданных *l*, *a*, ε траектория точки *M* определяется однозначно. При этом вид траектории (кривой на плоскости *xy*) не зависит от закона $s_A = s_A(t)$. При этом положение точки *M* на траектории определяется лишь значением s_A,

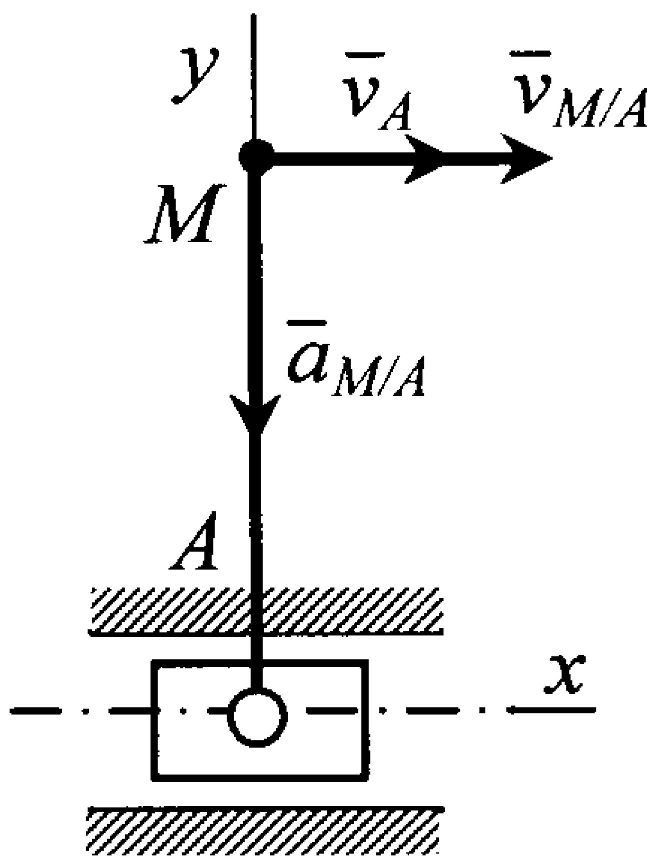

Рис. 8

Радиус кривизны траектории является геометрической характеристикой кривой. Для его определения неважно, каков закон движения $s(t)$ точки по траектории. Этот закон может быть выбран произвольно. Удобно выбрать закон равномерного движения $s_A = ut$, где $u > 0$ – некоторая константа. Тогда из (2): $s_{M'M} = \dfrac{l\varepsilon}{a} \cdot ut$, $\varphi = s_{M'M} / l = \dfrac{\varepsilon}{a} \cdot ut$. В записи теоремы о сложении скоростей:

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{M/A}:$$

$$v_A = \dot{s}_A = u, \quad v_{M/A} = \dot{s}_{M'M} = u\frac{l\varepsilon}{a}.$$

При $t = 0$ (рис. 8):

$$v_{M,x} = v_{A,x} + v_{M/A,x} = v_A + v_{M/A} = u + u\frac{l\varepsilon}{a} = u\left(\frac{a + l\varepsilon}{a}\right), \; v_{M,y} = 0.$$

Отсюда $v_M = u\left(\dfrac{a + l\varepsilon}{a}\right)$. Далее, в (1): $a_A = \ddot{s}_A = 0$, $a^{\tau}_{M/A} = l\dot{\varphi} = 0$, $a^n_{M/A} = l\dot{\varphi}^2 = l\dfrac{u^2\varepsilon^2}{a^2}$. Так как $\bar{a}^n_{M/A} \perp \bar{v}_M$, то нормальное ускорение точки M: $\bar{a}_n = \bar{a}^n_{M/A}$ и $a_n = l\dfrac{u^2\varepsilon^2}{a^2}$. Тогда радиус кривизны равен:

$$\rho = \frac{v_M^2}{a_n} = \frac{u^2\left(\dfrac{a + l\varepsilon}{a}\right)^2}{l\dfrac{u^2\varepsilon^2}{a^2}} = \frac{(a + l\varepsilon)^2}{l\varepsilon^2}.$$

2-й способ (аналитический).

Уравнения движения точки M в координатной форме (рис. 7):

$$x_M = s_A + l\sin\varphi = \frac{at^2}{2} + l\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad y_M = l\cos\varphi = l\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

$$v_x = \dot{x}_M = at + l\varepsilon t\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad v_y = \dot{y}_M = -l\varepsilon t\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(a + l\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}\right)^2 + \left(-l\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}\right)^2}\cdot t. \tag{3}$$

$$a_x = \ddot{x}_M = a + l\varepsilon\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} - l\varepsilon^2 t^2\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{4}$$

$$a_y = \ddot{y}_M = -l\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} - l\varepsilon^2 t^2\cos\frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

При $t \to 0$: $\sin\frac{\varepsilon t^2}{2} \approx \frac{\varepsilon t^2}{2}$, $\cos\frac{\varepsilon t^2}{2} \approx 1$. С учетом этого, при $t \to 0$ можно отбросить величины меньшего порядка малости $l\varepsilon\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}$ в (3) и $l\varepsilon^2 t^2\sin\frac{\varepsilon t^2}{2}$ в (4). Тогда получим для точки M на траектории, положение которой при $t \to 0$ стремится к начальному положению:

$$a_n = \frac{|a_x v_y - a_y v_x|}{v} = \frac{\left|(a + l\varepsilon)\left(-l\frac{\varepsilon^2 t^3}{2}\right) - \left(-l\frac{\varepsilon^2 t^2}{2} - l\varepsilon^2 t^2\right)(a + l\varepsilon)t\right|}{(a + l\varepsilon)t} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\cdot\frac{l\varepsilon^2 t^3}{t} = l\varepsilon^2 t^2.$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{[(a + l\varepsilon)t]^2}{l\varepsilon^2 t^2} = \frac{(a + l\varepsilon)^2}{l\varepsilon^2}.$$

Ответ. 1). $v_M = \sqrt{\frac{\pi(a^2 + l^2\varepsilon^2)}{\varepsilon}}$. 2). $\rho = \frac{(a + l\varepsilon)^2}{l\varepsilon^2}$.

Решение задачи Д1.

Для вывода платформы с вагоном из равновесия необходимо преодолеть силу трения со стороны грунтовой поверхности. При прикладывании к платформе силы $\overline{Q}_0$ реализуется предельное равновесие, при котором $F_{тр,\max} = fN$. Условие равновесия системы вдоль оси x, сонаправленной $\overline{Q}_0$: $\sum\limits_k F_{kx} = Q_0 - F_{тр} = 0$, откуда

$$fN = Q_0. \tag{1}$$

Запишем дифференциальное уравнение движения платформы с вагоном при действии силы $Q_1 = kQ_0$, в проекции на ось x. Строго говоря, при этом применяется теорема о движении центра масс механической системы. Так как трос AB считается нерастяжимым, то платформа и вагон движутся поступательно как единое тело. Поэтому запись этой теоремы идентична записи ДУ движения материальной точки:

$$(m_1 + m_2)a_x = Q_1 - F_{тр}.$$

Так как при движении $F_{тр} = fN$, то с учетом (1):

$$(m_1 + m_2)a_x = Q_1 - Q_0 = (k-1)Q_0.$$

$$a_x = \frac{(k-1)Q_0}{m_1 + m_2}. \tag{2}$$

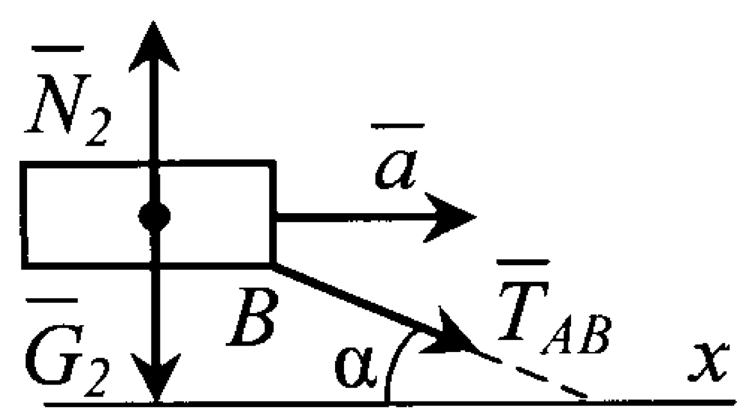

Рис. 9

ДУ движения вагона (рис. 9) в проекции на ось x:

$$m_2 a_x = T_{AB}\cos\alpha,$$

где T_{AB} – сила натяжения троса. С учетом (2):

$$T_{AB} = \frac{m_2 a_x}{\cos\alpha} = \frac{m_2(k-1)}{(m_1+m_2)\cos\alpha} Q_0.$$

Ответ. $T_{AB} = \dfrac{m_2(k-1)}{(m_1+m_2)\cos\alpha} Q_0.$

Решение задачи Д2.

Способ 1. При малых колебаниях диск поворачивается на угол $\varphi \approx 0$ (рис. 10). При этом конец пружины оказывается в положении

A'. Рассмотрим треугольник $AA'B$. Так как длина AB и радиус диска сопоставимы по величине, то длина $A'A$ мала по сравнению с AB. Тогда очевидно (из теоремы синусов), что угол при вершине B: $\delta \approx 0$. В силу $\varphi \approx 0$, угол при вершине A': $\beta \approx 180^o - (90^o + \alpha) - \delta \approx 90^o - \alpha$.

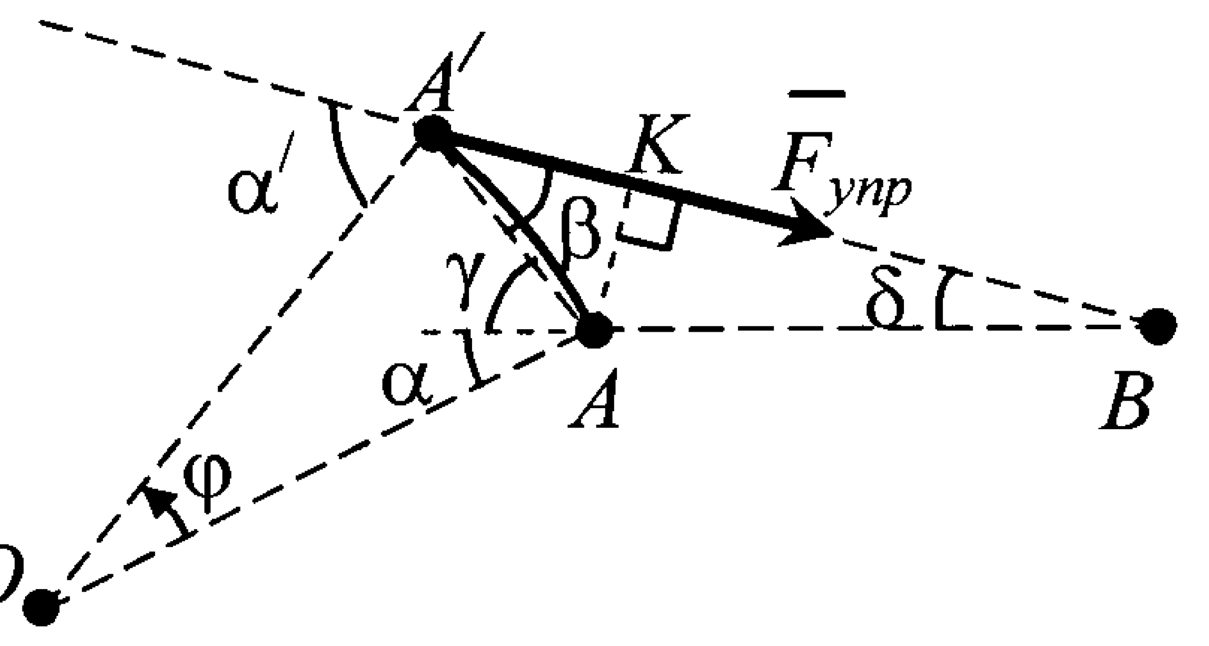

Рис. 10

Угол между лучом BA' и радиусом OA': $\alpha' = \alpha + \delta + \varphi \approx \alpha$. Поэтому $\sin\alpha' \approx \sin\alpha$.

Изменение длины пружины равно $\lambda = A'B - AB$. Построим AK – перпендикуляр к $A'B$. При $\varphi \approx 0$ дугу $A'A$ можно приближенно считать отрезком длиной $A'A = R\varphi$, где R – радиус диска. Тогда $A'B = A'K + KB = A'A\cos\beta + AB\cos\delta \approx R\varphi\sin\alpha + AB$. Отсюда

$$\lambda \approx R\varphi\sin\alpha. \qquad (1)$$

Значит, при малых колебаниях диска, пренебрегая величинами меньшего порядка малости, можно принять:

$$F_{упр} = cR\varphi\sin\alpha.$$

Дифференциальное уравнение вращения диска вокруг неподвижной оси Oz:

$$J_z\ddot{\varphi} = M_z(\overline{F}_{упр}). \qquad (2)$$

$$J_z = mR^2/2, \quad M_z(\overline{F}_{упр}) = -F_{упр}R\sin\alpha' \approx -cR^2\varphi\sin^2\alpha.$$

Тогда из (2):

$$\ddot{\varphi} + \frac{2c\sin^2\alpha}{m}\varphi = 0. \qquad (3)$$

Это ДУ малых свободных колебаний, совершаемых по закону $\varphi = A\sin(kt + \gamma)$ с циклической частотой $k = \sqrt{\dfrac{2c\sin^2\alpha}{m}}$ и периодом, равным:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2m}{c}}\,.$$

Способ 2. Приведем строгий вывод решения задачи с использованием уравнения Лагранжа 2 рода. Действующие на систему силы потенциальны, поэтому

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\,. \tag{4}$$

$$T = \frac{1}{2}J_z\dot\varphi^2 = \frac{mR^2}{4}\dot\varphi^2\,.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = \frac{mR^2}{2}\ddot\varphi\,, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0\,.$$

Обозначим $AB = l,\ A'B = r$. Потенциальная энергия:

$$\Pi = \frac{c}{2}(r-l)^2\,.$$

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -\frac{c}{2}\cdot 2(r-l)\frac{dr}{d\varphi}\,. \tag{5}$$

По теореме косинусов для треугольника $AA'B$:

$$r^2 = l^2 + AA'^2 - 2l\cdot AA'\cos\angle A'AB\,.$$

$$\cos\angle A'AB = -\cos\gamma = -\cos\left(\frac{180^o - \varphi}{2} - \alpha\right) = -\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right).$$

Из равнобедренного треугольника OAA': $AA' = 2R\sin\frac{\varphi}{2}$. Тогда

$$r^2 = l^2 + 4R^2\sin^2\frac{\varphi}{2} + 4Rl\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right). \tag{6}$$

Продифференцируем (6) по φ:

$$2r\frac{dr}{d\varphi} = 4R^2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 2Rl\left[\cos\frac{\varphi}{2}\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right) + \sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right)\right]. \tag{7}$$

При $\varphi \approx 0$, учитывая $r \approx l$, $\cos\frac{\varphi}{2} \approx 1$ и пренебрегая слагаемыми меньшего порядка малости, получим из (7):

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{2l}\frac{4Rl\sin\alpha}{2} = R\sin\alpha\,. \tag{8}$$

При $\varphi \approx 0$, с учетом $\sin\frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$ и пренебрегая величиной φ^2, получим из (6):

$$r^2 = l^2 + 2Rl\varphi\sin\alpha\,. \tag{9}$$

Учтем (8), (9) в (5):

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -c\frac{r^2 - l^2}{r + l}\frac{dr}{d\varphi} = -c\frac{2Rl\varphi\sin\alpha}{2l}R\sin\alpha = -cR^2\varphi\sin^2\alpha\,.$$

Подставляя всё в уравнение (4), получим:

$$\frac{mR^2}{2}\ddot{\varphi} = -cR^2\varphi\sin^2\alpha\,.$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2c\sin^2\alpha}{m}\varphi = 0,$$

что совпадает с (3), и так далее как в 1 способе.

Способ 3. Возможно менее строгое, но более короткое обоснование соотношения (1). Рассмотрим сложное движение точки A, при котором переносное движение связано с поворотом AB, а относительное – с изменением длины AB. При этом абсолютная скорость точки A направлена по касательной к окружности диска. Спроецируем $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$ на прямую AB. Далее пренебрегаем малым изменением угла при определении проекций (не углубляясь в строгие обоснования). Получим: $v_a\sin\alpha = v_r$, т.е. $\frac{Rd\varphi}{dt}\sin\alpha = \frac{d\lambda}{dt}$, $R\sin\alpha\, d\varphi = d\lambda$. Интегрируя при нулевых начальных условиях, получим (1), и так далее как в 1 способе.

Ответ. $T = \dfrac{\pi}{\sin\alpha}\sqrt{\dfrac{2m}{c}}$.

Решение задачи Д3.

1). Обозначим через $\bar{v}_{1r}$ скорость M_1 относительно пирамиды. Направим оси x, y в плоскости основания ABK (рис. 11), ось z перпендикулярно ей.

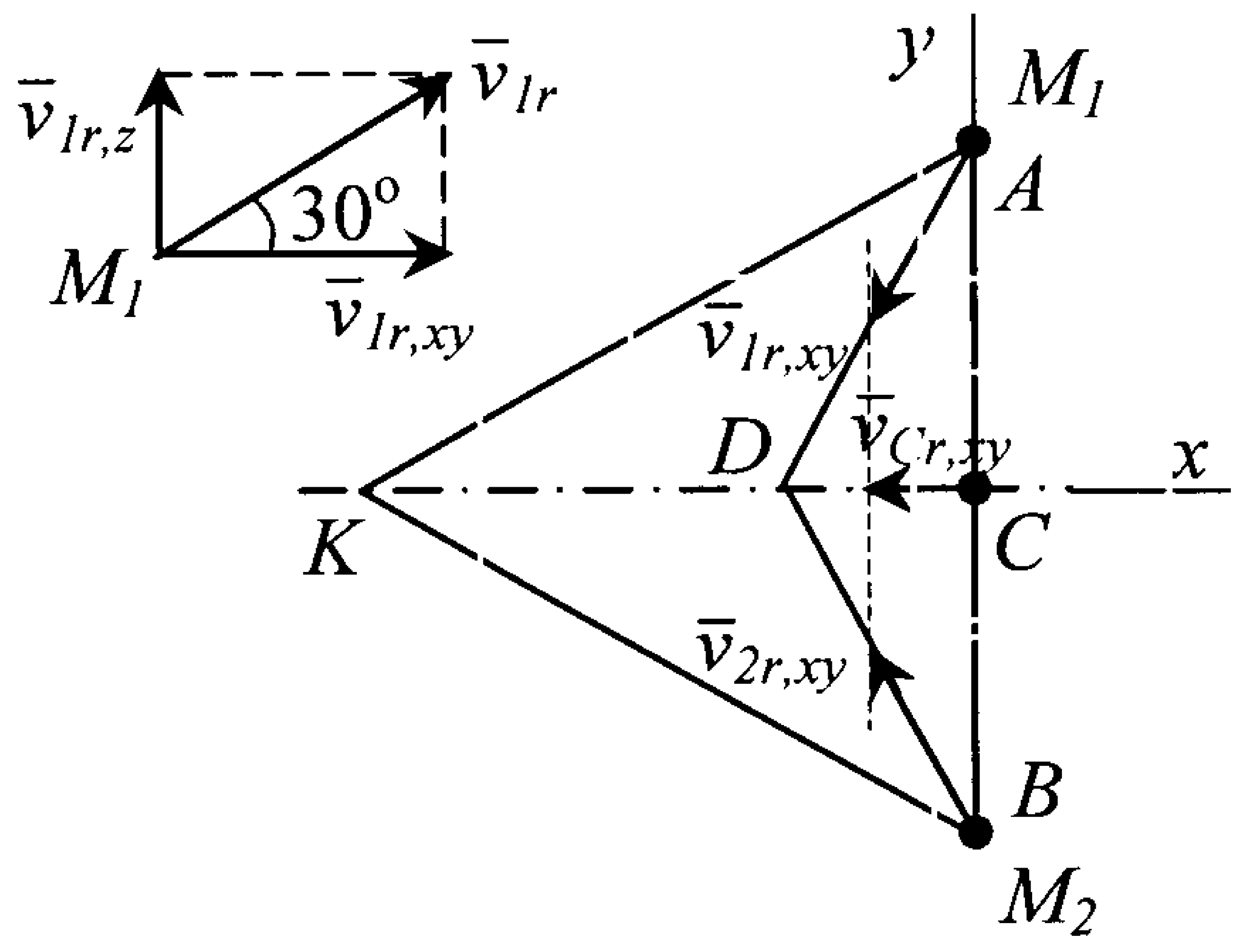

Рис.11

$$\bar{v}_{1r} = \bar{v}_{1r,xy} + \bar{v}_{1r,z},$$

где скорость набора высоты $v_{1r,z} = v$, а проекция в плоскости xy:

$$v_{1r,xy} = v_{1r,z}\,\mathrm{ctg}\,30^0 = \sqrt{3}\,v. \quad (1)$$

Для точки M_2 также $v_{2r,xy} = \sqrt{3}\,v$.

Для механической системы, включающей пирамиду и точки M_1, M_2, сумма проекций внешних сил на плоскость xy равна нулю. Поэтому из закона сохранения количества движения: $\bar{v}_{C,xy} = 0$, где C – центр масс системы. При этом его относительная скорость (относительно пирамиды) $\bar{v}_{Cr,xy}$, в силу симметрии точек M_1 , M_2 и их движений, направлена вдоль оси x. Из разложения $\bar{v}_{C,xy} = \bar{v}_{Ce,xy} + \bar{v}_{Cr,xy} = 0$, где переносная скорость $\bar{v}_{Ce,xy} = \bar{v}_D$, получаем:

$$\bar{v}_D = -\bar{v}_{Cr,xy}. \quad (2)$$

(т.е. пирамида смещается в сторону, противоположную относительному движению центра масс).

В системе координат, связанной с пирамидой, количество движения системы можно записать двумя способами и затем приравнять: $2m\bar{v}_{Cr} = m\bar{v}_{1r} + m\bar{v}_{2r}$, где m – масса каждой из двух материальных точек. Проецируем на x: $-2mv_{Cr} = -mv_{1r}\cos 60^o - mv_{2r}\cos 60^o$,
откуда из (1):

$$v_{Cr,xy} = (v_{1r,xy} + v_{1r,xy})/4 = (\sqrt{3}/2)\,v.$$

Тогда, с учетом (2), искомая скорость равна по модулю:

$$v_D = v_{Cr,xy} = (\sqrt{3}/2)\, v\,.$$

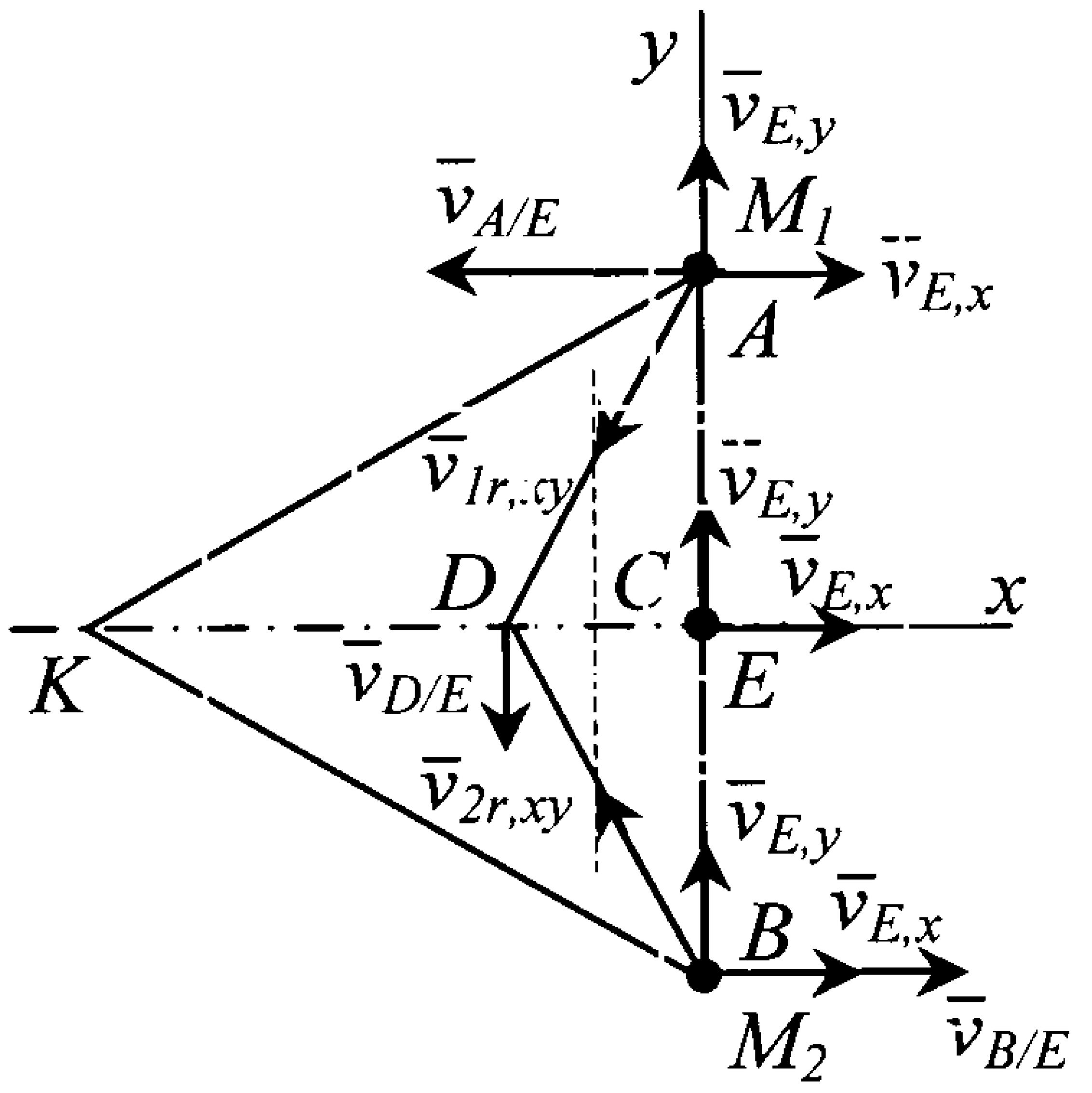

Рис.12

2). Как в части 1, $v_{ir,xy} = \mathrm{ctg}\,30^0 \cdot v_{ir,z}$, $i = 1{,}2$. С учетом разных скоростей точек M_1, M_2:

$$v_{1r,xy} = \sqrt{3}\, v\,,\ v_{2r,xy} = 2\sqrt{3}\, v\,. \qquad (3)$$

Так как $v_{1r,xy} \neq v_{2r,xy}$, можно предположить, что движение пирамиды характеризуется не только поступательной, но и вращательной составляющими (рис.12).

Обозначим через E точку пирамиды, в которой в момент начала движения располагается центр масс C. Движение точек M_1, M_2 в плоскости xy рассмотрим как сложное, причем их переносные движения – движения точек A, B, соответственно, при плоскопараллельном движении пирамиды:

$$\bar{v}_{1,xy} = \bar{v}_E + \bar{v}_{A/E} + \bar{v}_{1r,xy}\,,\quad \bar{v}_{2,xy} = \bar{v}_E + \bar{v}_{B/E} + \bar{v}_{2r,xy}\,. \qquad (4)$$

$$v_{A/E} = v_{B/E} = l\omega\,, \qquad (5)$$

где $l = AE = BE$.

Так как $\sum\limits_k F_{k,xy}^{(e)} = 0$, то выполняется закон сохранения количества движения системы $\bar{Q}_{xy} = \bar{Q}_{0,xy}$. Так как вначале система была в покое, получим:

$$m\bar{v}_{1,xy} + m\bar{v}_{2,xy} = 0\,. \qquad (6)$$

Проецируем (6) на ось x, учитывая (3), (4), (5):

$$(v_{Ex} - v_{A/E} - v_{1r,xy} \cdot \cos 60^0) + (v_{Ex} + v_{B/E} - v_{2r,xy} \cdot \cos 60^0) = 0\,.$$

$$2v_{Ex} - \sqrt{3}\, v \cdot \frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\, v \cdot \frac{1}{2} = 0\,.$$

$$v_{Ex} = \frac{3\sqrt{3}}{4} v . \qquad (7)$$

Проецируем (6) на ось y, учитывая (3), (4), (5):

$$(v_{Ey} - v_{1r,xy} \sin 60^0) + (v_{Ey} + v_{2r,xy} \sin 60^0) = 0 .$$

$$2v_{Ey} - \sqrt{3}\, v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}\, v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 .$$

$$v_{Ey} = -\frac{3}{4} v . \qquad (8)$$

Применим закон сохранения кинетического момента относительно неподвижной точки C. (О том, что центр масс C неподвижен в рамках сложного движения, было сказано в решении части 1.)

$$K_{Cz} = const = 0 .$$

$$M_{Cz}(m\bar{v}_{1,xy}) + M_{Cz}(m\bar{v}_{2,xy}) = 0 .$$

Учтем здесь (4), (3), (5):

$$- m v_{Ex} l + m v_{A/E} l + m v_{1r,xy} \cos 60^0 \cdot l +$$

$$+ m v_{Ex} l + m v_{B/E} l - m v_{2r,xy} \cos 60^0 \cdot l = 0 .$$

$$2 l \omega + \sqrt{3}\, v \cdot \frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\, v \cdot \frac{1}{2} = 0 .$$

$$\omega = \frac{\sqrt{3}\, v}{4l} . \qquad (9)$$

При плоскопараллельном движении пирамиды:

$$\bar{v}_D = \bar{v}_E + \bar{v}_{D/E} , \qquad (10)$$

где $v_{DE} = DE \cdot \omega$. Здесь, из геометрии, $DE = \frac{l}{\sqrt{3}}$. Проецируем (10) на оси x, y, подставляя (7), (8), (9):

$$v_{D,x} = v_{E,x} = \frac{3\sqrt{3}}{4} v .$$

$$v_{D,y} = v_{E,y} - v_{D/E} = -\frac{3v}{4} - \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3} v}{4l} = -v .$$

$$v_D = \sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2} = v\sqrt{\frac{9\cdot 3}{16}+1} = \frac{\sqrt{43}}{4}v\,.$$

Замечание 1. Выбор точки E в качестве полюса при плоскопараллельном движении удобен тем, что $v_{A/E}$ и $v_{B/E}$ взаимно сокращаются при проецировании закона сохранения количества движения. Если в качестве полюса выбрать точку D, то решение технически усложнилось бы.

Замечание 2. Возможен несколько иной подход к решению. Центр масс C неподвижен, а прямая $M_1\ M_2$ не поворачивается, как следует из закона сохранения кинетического момента. Поэтому относительная скорость точки C противоположна скорости точки E пирамиды, а относительная угловая скорость поворота прямой $M_1\ M_2$ (относительно пирамиды) равна по величине и противоположна по направлению угловой скорости пирамиды при её абсолютном движении. В системе координат, связанной с пирамидой, можно только из кинематических соотношений определить относительную скорость C и относительную угловую скорость прямой M_1M_2. Далее, как и в приведенном решении, используем $\bar{v}_D = \bar{v}_E + \bar{v}_{D/E}$.

Ответ. 1). $v_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2}v$. 2). $v_D = \dfrac{\sqrt{43}}{4}v$.

Решение задачи Д4.

1). Обозначим через φ угол между AB и вертикалью. Вначале (рис.13): $\sin\varphi_0 = a/l = \sqrt{3}/4$, $\cos\varphi_0 = \sqrt{1-\sin^2\varphi_0} = \sqrt{13}/4$. В момент, когда точка C в 1-й раз проходит через D: $\sin\varphi_1 = a/(l/2) = \sqrt{3}/2$, $\varphi_1 = 60^o$.

По теореме об изменении кинетической энергии для стержня AB:

$$T_1 - T_0 = A_{G,1}\,. \tag{1}$$

$$A_{G,1} = mg\cdot C_0C_1\cos\varphi_0 = \left(\sqrt{13}/8\right)mgl\,. \tag{2}$$

Скорость $\bar{v}_{C_1}$ направлена вдоль A_1B_1 (рис. 14). По направлениям $\bar{v}_{A_1}$, $\bar{v}_{C_1}$ строим точку P_1 – МЦС стержня.

$$C_1P_1 = A_1C_1\ \mathrm{tg}\,30^o = l/(2\sqrt{3}).$$

$$J_{P_1z} = J_{C_1z} + m\cdot C_1P_1^2 = \left(ml^2/12\right)+\left(ml^2/12\right) = ml^2/6.$$

$$T_1 = J_{P_1z}\omega_1^2/2 = ml^2\omega_1^2/12. \qquad (3)$$

Учитываем (2), (3) в (1) при $T_0 = 0$: $\omega_1^2 = \left(3\sqrt{13}g\right)/(2l)$, откуда

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{13}}{2}\frac{g}{l}}. \qquad (4)$$

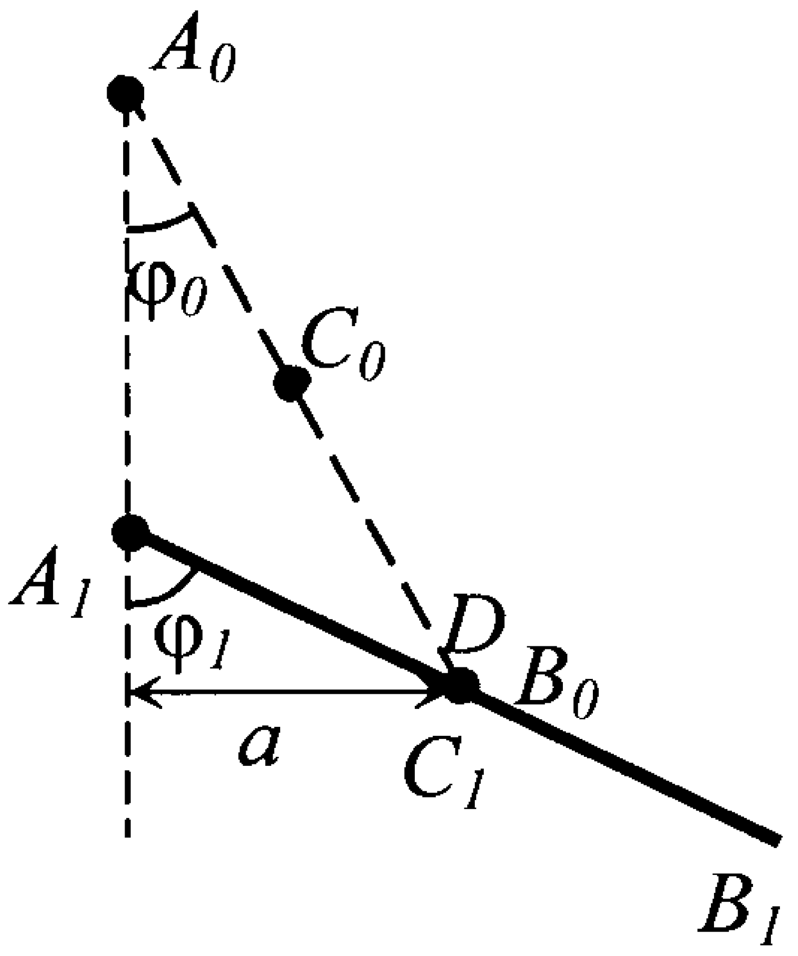

Рис. 13

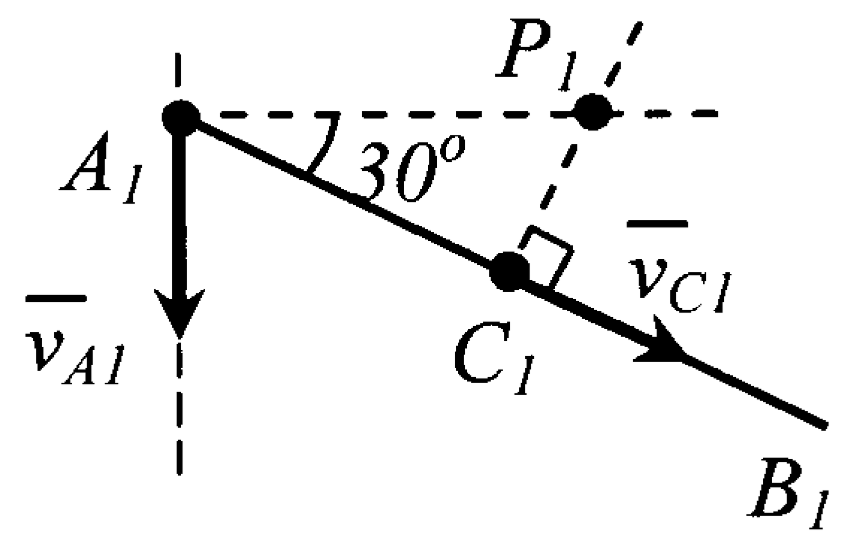

Рис. 14

При 2-м прохождении точки C через D: $\varphi_2 = 120^o$ (см. рис.16, замечание 3). МЦС P_2 строится аналогично, $C_2P_2 = C_1P_1$, $J_{P_2z} = J_{P_1z}$. $T_2 = ml^2\omega_2^2/12$. Очевидно, $A_{G,2} = A_{G,1}$. $T_2 - T_0 = A_{G,2}$. Поэтому $T_2 = T_1$, т.е. $ml^2\omega_2^2/12 = ml^2\omega_1^2/12$. Т.е. угловые скорости при 2-м и 1-м прохождениях C через D:

$$\omega_2 = \omega_1. \qquad (5)$$

2). Отметим, что (5) верно при любой начальной угловой скорости AB.

При плоском движении AB (для упрощения записи индексы «1» и «2» опускаем):

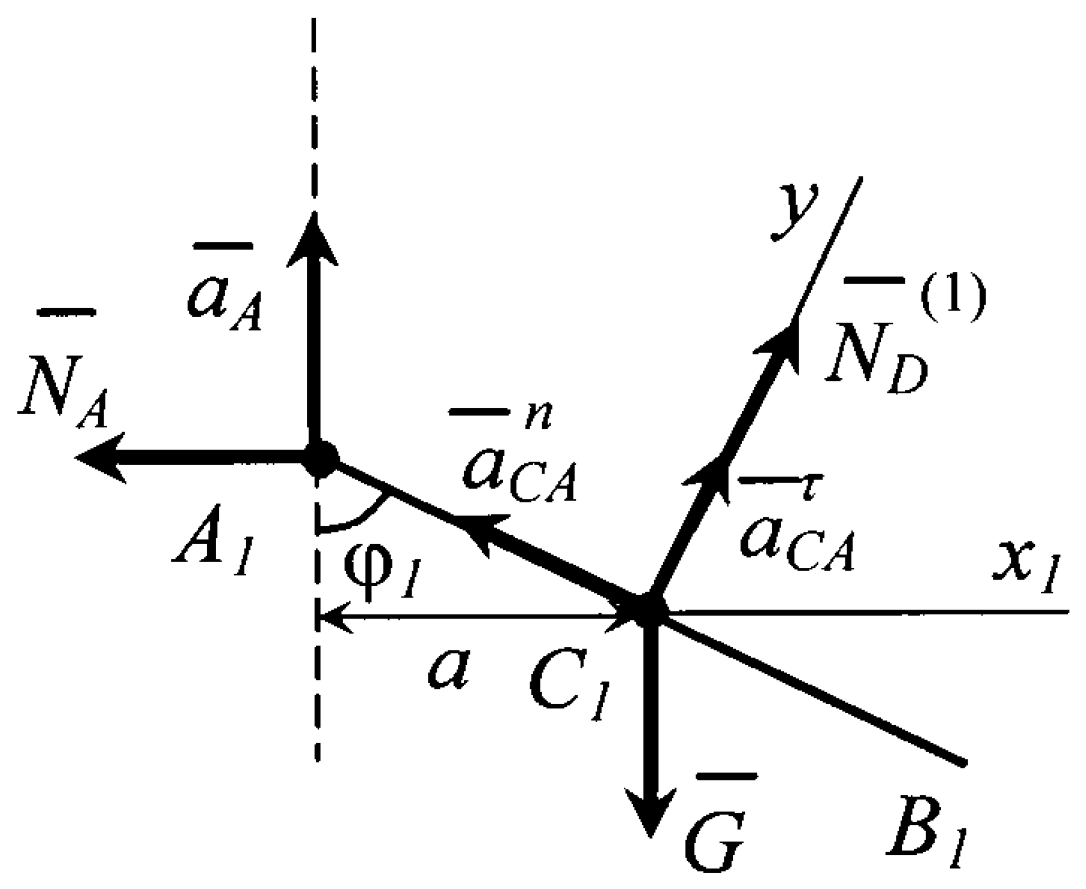

Рис. 15

$$\overline{a}_C = \overline{a}_A + \overline{a}_{CA}^{\tau} + \overline{a}_{CA}^{n}. \qquad (6)$$

Из $ma_{Cx_1} = \sum_i F_{ix_1}^e$, с учетом (6), и $J_{Cz}\ddot{\varphi} = \sum_i M_{Cz}(\overline{F}_i^e)$, для A_1B_1 получим (рис.15):

$$m\left(a_{CA}^{\tau}\cos 60^o - a_{CA}^{n}\cos 30^o\right) = -N_A + N_{D,y}\cos 60^o. \qquad (7)$$

$$J_{C_1z}\ddot{\varphi} = N_A \cdot 0.5l\cos 60^o. \qquad (8)$$

$a_{CA}^{\tau} = (l/2)\ddot{\varphi}$, $a_{CA}^{n} = (l/2)\omega^2$. Из (8): $N_A = (ml/3)\,\ddot{\varphi}$. Учитываем в (7), с индексами «1»:

$$m\left((l/4)\ddot{\varphi}_1 - (\sqrt{3}l/4)\omega_1^2\right) = -(ml/3)\,\ddot{\varphi}_1 + N_{D,y}^{(1)}/2. \qquad (9)$$

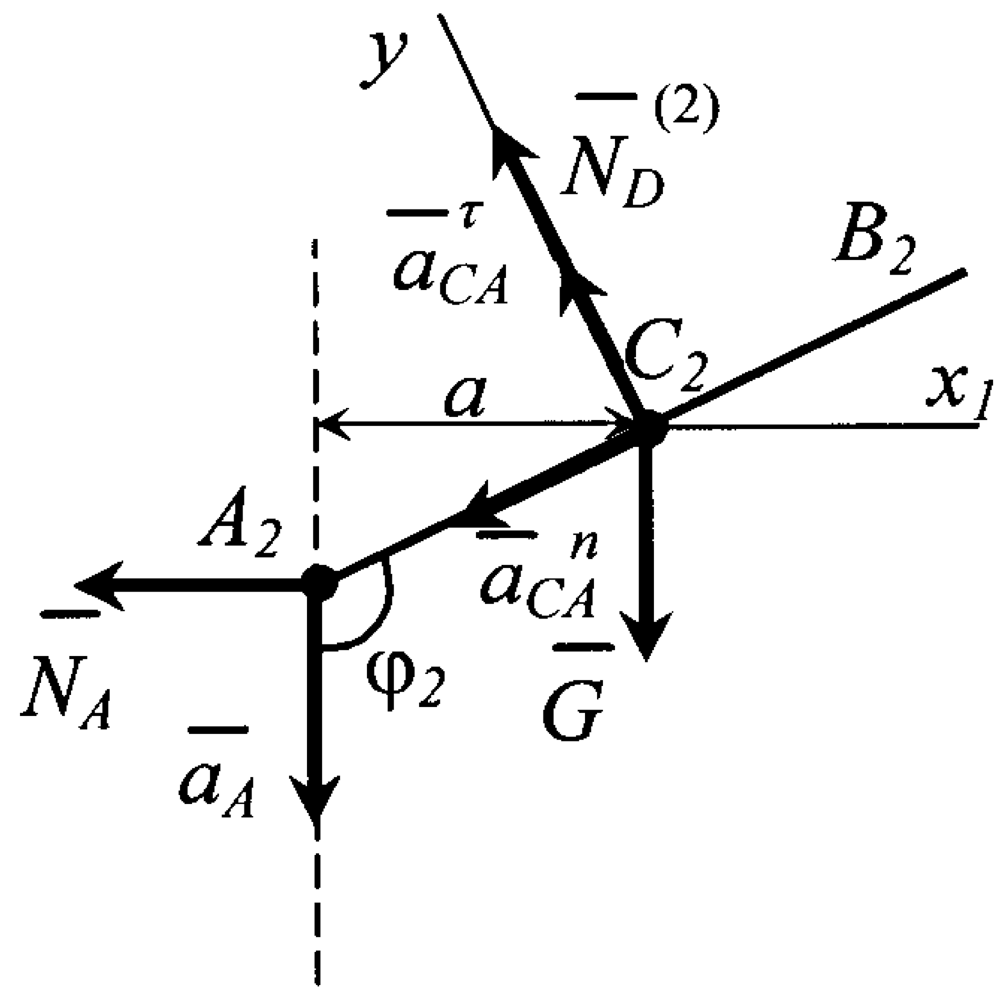

Рис. 16

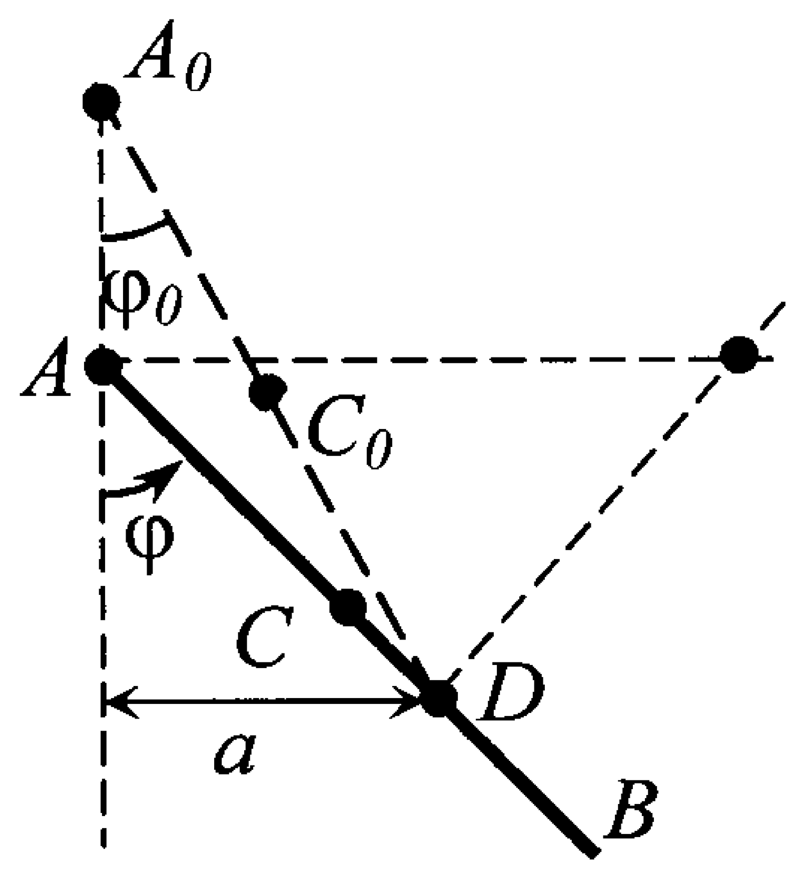

Рис. 17

Схожие соотношения запишем для положения A_2B_2 (рис. 16):

$$m\left(-a_{CA}^{\tau}\cos 60^o - a_{CA}^{n}\cos 30^o\right) = -N_A - N_{D,y}\cos 60^o. \qquad (10)$$

$$J_{C_2z}\ddot{\varphi} = -N_A \cdot 0.5l\cos 60^o. \qquad (11)$$

$$a_{CA}^{\tau} = (l/2)\ddot{\varphi},\ a_{CA}^{n} = (l/2)\omega^2.\ N_A = -(ml/3)\,\ddot{\varphi}.$$

Из (10), с индексами «2»:

$$m\left(-(l/4)\ddot{\varphi}_2 - (\sqrt{3}l/4)\omega_2^2\right) = (ml/3)\,\ddot{\varphi}_2 - N_{D,y}^{(2)}/2. \qquad (12)$$

Вычтем (12) из (9). С учетом (5), после сокращений:

$$S = N_{D,y}^{(1)} + N_{D,y}^{(2)} = \frac{7}{6} ml(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2). \tag{13}$$

Найдем $\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2$. Рассмотрим произвольное положение AB, определяемое углом φ (рис. 17).

$$\left(J_{Pz}\omega^2/2\right) - T_0 = A_G. \tag{14}$$

$$CD = AD - AC = \frac{a}{\sin\varphi} - \frac{l}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4\sin\varphi} - \frac{1}{2}\right) l. \tag{15}$$

$$A_G = mg(C_0 D\cos\varphi_0 - CD\cos\varphi) = const\ + mgl\left(-\frac{\sqrt{3}}{4} ctg\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi\right). \tag{16}$$

Дифференцируем (14) по времени, с учетом (16), и сокращаем $\dot{\varphi}$:

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2} J_{Pz} \cdot 2\dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} = \frac{dA_G}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi},$$

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2} + J_{Pz}\ddot{\varphi} = mgl\left(\frac{\sqrt{3}}{4\sin^2\varphi} - \frac{1}{2}\sin\varphi\right). \tag{17}$$

Запишем (17) при $\varphi = \varphi_1 = 60^o$ и $\varphi = \varphi_2 = 120^o$:

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_1) \cdot \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{ml^2}{6} \ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{4\sqrt{3}} mgl. \tag{18}$$

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_2) \cdot \frac{\omega_2^2}{2} + \frac{ml^2}{6} \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{4\sqrt{3}} mgl. \tag{19}$$

Рассмотрим функцию $J_{Pz}(\varphi) = J_{Cz} + m \cdot PC^2$. Для $\varphi = \pi/2 - \phi$ и $\varphi = \pi/2 + \phi$, где ϕ – произвольный угол, длина PC одинакова (в силу симметрии относительно горизонтали, проходящей через D). Поэтому $J_{Pz}(\pi/2 - \phi) = J_{Pz}(\pi/2 + \phi)$, т.е. функция $J_{Pz}(\varphi)$ симметрична относительно $\varphi = \pi/2$. Из геометрического смысла производной:

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\pi/2 - \phi) = -\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\pi/2 + \phi),$$

(см. замечание 6). При $\phi = \pi/6$: $\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_1) = -\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_2)$. Учтя (5), сложим (18) и (19):

$$\frac{1}{6}ml^2(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) = \frac{1}{2\sqrt{3}}mgl\,,.$$

$$ml(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2) = \sqrt{3}\,mg. \qquad (20)$$

Подставив (20) в (13), получим ответ на второй вопрос задачи:

$$S = \frac{7\sqrt{3}}{6}mg.$$

Замечание 1. Прокомментируем один принципиально неверный способ решения, использование которого приводит, однако, к верному ответу.

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно движущейся точки *A* (см., например, Н.Н.Никитин. Курс теоретической механики. 5-е изд. 1990, стр.311): $\frac{d\overline{K}_A}{dt} = M\overline{v}_C \times \overline{v}_A + \sum_i \overline{M}_A(\overline{F}_i^e)$. В качестве движущейся точки можно выбрать МЦС:

$$\frac{d\overline{K}_P}{dt} = M\overline{v}_C \times \overline{v}_P + \sum_i \overline{M}_P(\overline{F}_i^e).$$

В ряде олимпиадных задач используется частный случай этой теоремы, когда $\overline{v}_C \times \overline{v}_P = 0$:

$$\frac{dK_{Pz}}{dt} = \sum_i M_{Pz}(\overline{F}_i^e). \qquad (21)$$

Соотношение (21) верно, если в данный момент времени система находится в покое, либо $\overline{v}_C \parallel \overline{v}_P$ (например, в задачах о движении стержня, два конца которого опираются на вертикальную и горизонтальную плоскости, а также в задачах о качении диска по плоскости без проскальзывания).

Однако в данной задаче $\bar{v}_C, \bar{v}_P$ не параллельны. Поэтому применять (21) для определения $\ddot{\varphi}_{(1)}$, $\ddot{\varphi}_{(2)}$ нельзя. Ошибочное использование (21) применительно к данной задаче выглядит так. $\dfrac{dK_{Pz}}{dt} = \dfrac{dJ_{Pz}}{dt} \cdot \dot{\varphi} + J_{Pz}\ddot{\varphi} = \dfrac{dJ_{Pz}}{d\varphi} \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} + J_{Pz}\ddot{\varphi}$ (это верная запись). При $\varphi = \varphi_1 = 60^o$: $\sum\limits_i M_{P_1 z}(\overline{F}_i^e) = M_{P_1 z}(\overline{G}) = G \cdot C_1 P_1 \cos 60^o = mgl/(4\sqrt{3})$ (это верно). Однако при подстановке в (21) будет ошибка:

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_1) \cdot \omega_1^2 + \frac{ml^2}{6}\ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{4\sqrt{3}} mgl,$$

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_2) \cdot \omega_2^2 + \frac{ml^2}{6}\ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{4\sqrt{3}} mgl.$$

Это очень похоже на (18), (19), но неверно: отсутствуют коэффициенты $1/2$ в первых слагаемых. Заметим, что при сложении этих двух ошибочных соотношений получится верная запись (20).

Замечание 2. Условие о том, что начальная угловая скорость стержня AB направлена против часовой стрелки, введено для того, чтобы задача имела смысл. Иначе, если бы начальная угловая скорость была по часовой стрелке, то контакт стержня AB с муфтой был бы сразу утрачен.

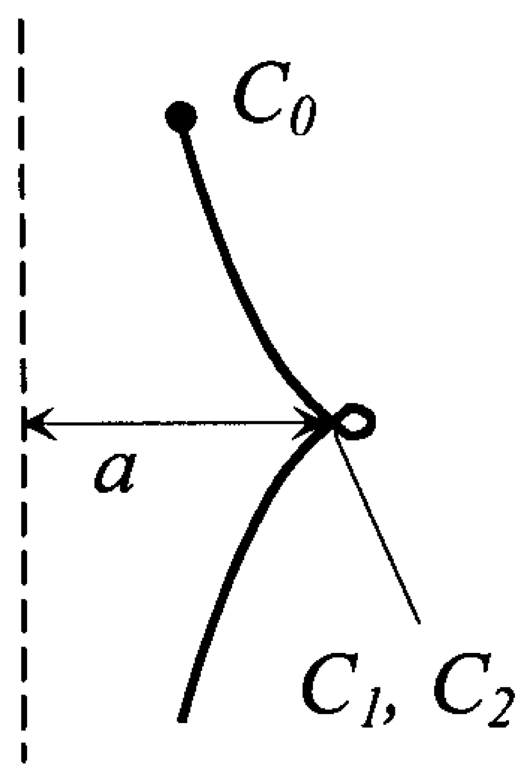

Рис. 18

Замечание 3. Траектория точки C имеет форму петли (рис. 18). Несложно проверить, что начальное положение C_0 является наиболее высоким из всех возможных положений точки C во время движения. Поэтому для любого положения точки C после начала движения имеет место строгое неравенство: $A_G > 0$. Значит, и $T > 0$, $\omega^2 > 0$. Т.е. при $t > 0$ исключена возможность $\omega = 0$. Значит, направление угловой скорости стержня все время будет таким же, как и вначале, т.е. против часовой стрелки. (Колебательное движение стержня тем самым исключено.) После 1-го прохождения точки

C через D: $A_G > const > 0$. Поэтому $\omega > const > 0$. Поэтому 2-е прохождение точки C через D спустя некоторое конечное время неизбежно произойдет, причем положение стержня при этом будет именно таким, как на рис. 16.

Замечание 4. В решении удалось обойтись без записывания ДУ плоского движения $ma_{Cy_1} = \sum_i F^e_{iy_1}$ (где y_1 перпендикулярна x_1), которое содержит неизвестное ускорение a_A.

Замечание 5. В соотношениях $a^\tau_{CA} = (l/2)\ddot{\varphi}$ для положений A_1B_1 и A_2B_2 брался знак «плюс» в правых частях, так как направления векторов $\bar{a}^\tau_{CA}$ были выбраны на рис. 15, 16 в соответствии с положительным направлением отсчета угла φ.

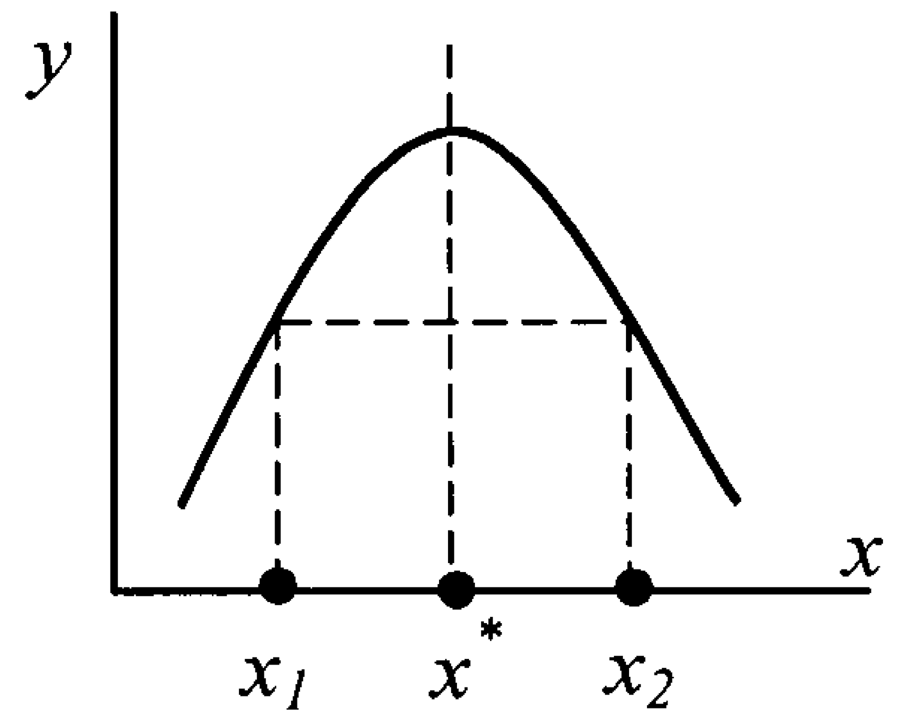

Рис. 19

Замечание 6. На рис. 19 изображен график произвольной функции $y = f(x)$, симметричной относительно $x = x^*$. Для значений $x_1 = x^* - a$, $x_2 = x^* + a$ тангенсы углов наклона касательных отличаются знаком, поэтому $\frac{df}{dx}(x_1) = -\frac{df}{dx}(x_2)$. Таким свойством обладает функция $J_{Pz}(\varphi)$. Поэтому

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_1) = -\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_2).$$

Если этого свойства не заметить, то решение загромождается. При этом получится:

$$J_{Pz}(\varphi) = \left[\frac{1}{12} + \frac{3\cos^2\varphi}{16\sin^4\varphi} + \left(\frac{\sqrt{3}}{4\sin\varphi} - \frac{1}{2}\right)^2\right] ml^2.$$

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}=\left[-\frac{3(\sin^2\varphi\cos\varphi+2\cos^3\varphi)}{8\sin^5\varphi}\quad-\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sin\varphi}-1\right)\frac{\sqrt{3}\cos\varphi}{4\sin^2\varphi}\right]ml^2.$$

Тогда из (18), (19) можно получить:

$$\ddot{\varphi}_1=\frac{\sqrt{3}g}{2l}+\frac{5}{2\sqrt{3}}\omega_1^2,\quad \ddot{\varphi}_2=\frac{\sqrt{3}g}{2l}-\frac{5}{2\sqrt{3}}\omega_2^2.$$

Вторые слагаемые в выражениях для $\ddot{\varphi}_1$ и $\ddot{\varphi}_2$ сокращаются при их сложении в (20).

Добавим, что если находить $N_{D,y}^{(1)}$, $N_{D,y}^{(2)}$ по отдельности, то можно получить:

$$N_{D,y}^{(1)}=ml\left(\frac{7}{6}\ddot{\varphi}_1-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_1^2\right)=\frac{m}{12\sqrt{3}}\left(21g+17\,l\omega_1^2\right),$$

$$N_{D,y}^{(2)}=ml\left(\frac{7}{6}\ddot{\varphi}_2+\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_2^2\right)=\frac{m}{12\sqrt{3}}\left(21g-17\,l\omega_2^2\right). \qquad (22)$$

Замечание 7. Очевидно, $N_{D,y}^{(1)}>0$. Минимальная $\omega_2=\omega_1$, очевидно, достигается, если *AB* вначале был в покое. Тогда, с учетом (4), из (22):

$$N_{D,y}^{(2)}=\frac{14-17\sqrt{13}}{8\sqrt{3}}mg<0.$$

При ненулевой начальной угловой скорости, очевидно, ω будет больше. Поэтому тем более будет $N_{D,y}^{(2)}<0$, т.е. на самом деле $\overline{N}_D^{(2)}$ противонаправлен оси y. (В основном решении заранее установить этот факт без дополнительных исследований не представлялось возможным.) Отсюда величина

$$S=N_{D,y}^{(1)}+N_{D,y}^{(2)}=N_D^{(1)}-N_D^{(2)}$$

представляет собой разность модулей реакций муфты при 1-м и 2-м прохождении *C* через *D*, т.е. отражает различие величин N_D в этих двух случаях. В задаче показано, что эта разность не равна нулю (как это может показаться из-за некоей симметрии двух положений и одинаковых угловых скоростей). Кроме того, показано, что эта разность не зависит от начальной угловой скорости.

Замечание 8. Более длинное решение получается при использовании только геометрического подхода. При этом нужно решать систему алгебраических уравнений относительно пяти неизвестных a_A, a_r, $\ddot{\varphi}$, N_A, N_D. Это три ДУ плоского движения (24), (33), (25) и два кинематических соотношения (проекции на оси координат (29), (31) равенства (28) двух представлений $\bar{a}_C$).

Ответ. 1). $\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{13}}{2}\frac{g}{l}}$. 2). $S = \frac{7\sqrt{3}}{6}mg$.