

Всероссийский (третий) этап Всероссийской олимпиады  
студентов по теоретической механике

Казань, Казанский национальный исследовательский  
технологический университет  
3-7 декабря 2014 г.

Решения задач теоретического конкурса

Автор задач:

доцент кафедры ТМ и СМ КНИТУ Муштари Айрат Ильдарович

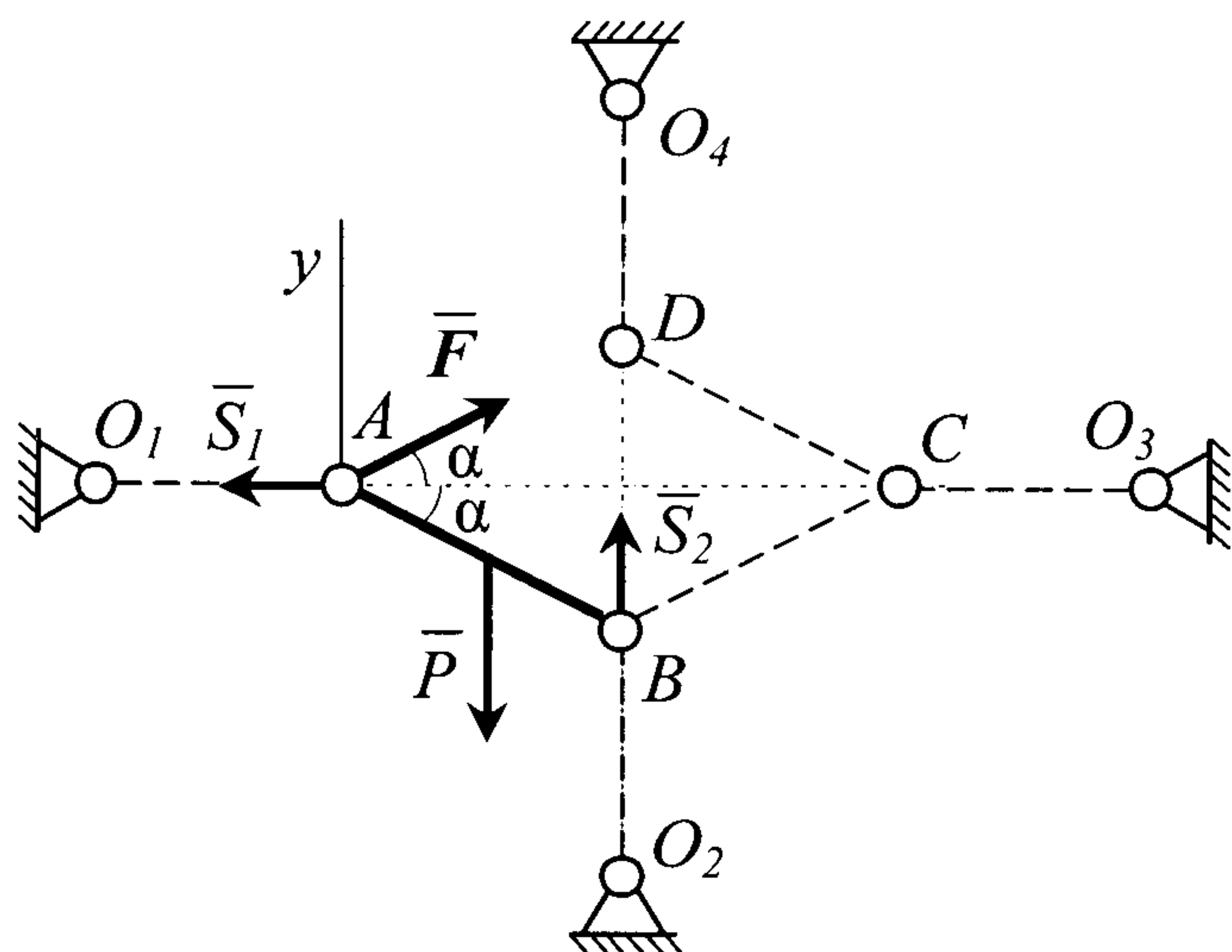


Рис. 1

*Решение задачи С1.*

1). *1 способ.* Рассмотрим равновесие системы, состоящей из стержней  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ . Силы, действующие на неё со стороны шарнирных стержней  $O_1A$ ,  $O_2B$ ,  $O_3C$ ,  $O_4D$ , образуют систему сходящихся сил, линии действия которых пересекаются в точке  $O$  (рис. 1). Поэтому моменты от них относительно точки  $O$  равны нулю. Достаточно записать одно уравнение равновесия:

$$\sum_k M_O(F_k) = P \cdot \frac{AO}{2} - F \cdot AO \sin 30^\circ = 0.$$

Отсюда  $F = P$ .

*2 способ.* Так как шарнирные стержни  $O_4D$  и  $CD$  невесомы, то, рассуждая формально, точка  $D$  находится в равновесии под действием системы сходящихся сил, состоящей из двух сил реакций этих стержней:  $\vec{S}_{O_4D} + \vec{S}_{CD} = 0$ . Но, так как эти два вектора имеют различные на-

правления, такое возможно, лишь если  $S_{O_4D} = S_{CD} = 0$ . С учетом этого, рассматривая равновесие шарнира  $C$  и рассуждая по аналогии, получим, что  $S_{O_3C} = S_{BC} = 0$ . Поэтому на точку  $B$  стержня  $AB$  действует лишь сила реакции  $\bar{S}_2$  со стороны шарнирного стержня  $O_2B$ .

Рассмотрим равновесие плоской системы сил, действующей на стержень  $AB$  (рис. 1). Помимо  $\bar{P}$ ,  $\bar{F}$ ,  $\bar{S}_2$  на него действует также реакция  $\bar{S}_1$  со стороны шарнирного стержня  $O_1A$ . Запишем два уравнения равновесия  $AB$ :

$$\sum_k F_{ky} = F \sin 30^\circ - P + S_2 = 0, \quad (1)$$

$$\sum_k M_A(F_k) = -P \cdot \frac{AB}{2} \cos 30^\circ + S_2 \cdot AB \cos 30^\circ = 0, \quad (2)$$

Из (2):  $S_2 = P/2$ . Тогда из (1):  $\frac{F}{2} - P + \frac{P}{2} = 0$ , откуда  $F = P$ .

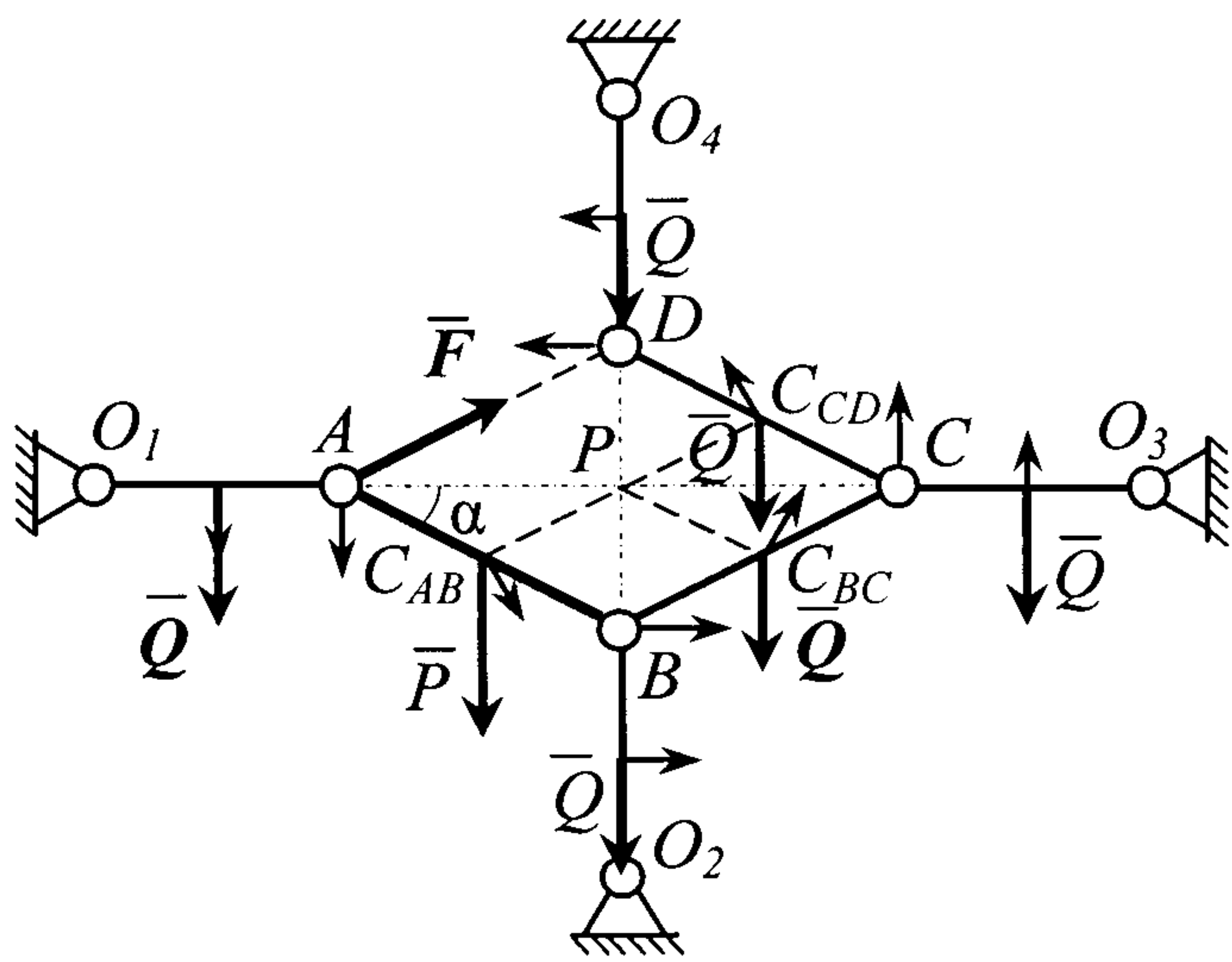


Рис. 2

2). Удобно применить принцип возможных перемещений. На рис. 2 возможные перемещения точек указаны тонкими векторами без подписей (чтобы не загромождать рисунок). Обозначим через  $\delta\bar{r}_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , возможные перемещения центров тяжести стержней с концами  $O_i$ , соответственно, а через  $\delta\bar{r}_{(AB)}$ ,  $\delta\bar{r}_{(BC)}$ ,  $\delta\bar{r}_{(CD)}$  возмож-

ные перемещения центров тяжести  $C_{AB}$ ,  $C_{BC}$ ,  $C_{CD}$  соответствующих стержней. Последние три стержня совершают мгновенное плоскопараллельное движение. Мгновенным центром вращения для каждого из этих стержней является точка  $P$  – центр ромба  $ABCD$ . Рассматривая возможное перемещение стержня  $AB$ , получим:

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{BP}{AP} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \delta s_B = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta s_A, \quad (3)$$

$$\frac{\delta s_A}{\delta s_{(AB)}} = \frac{AP}{C_{AB}P} = \sqrt{3}, \quad \delta s_A = \sqrt{3} \delta s_{(AB)}. \quad (4)$$

Аналогично рассмотрим возможные перемещения стержней  $BC$ ,  $CD$ :

$$\delta s_B = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta s_C, \quad \delta s_C = \sqrt{3} \delta s_{(BC)}. \quad (5)$$

$$\delta s_D = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta s_C, \quad \delta s_C = \sqrt{3} \delta s_{(CD)}. \quad (6)$$

Из сравнения (3), (4) с (5) и (6):

$$\delta s_A = \delta s_C = \sqrt{3} \delta s_B = \sqrt{3} \delta s_D = \sqrt{3} \delta s_{(AB)} = \sqrt{3} \delta s_{(BC)} = \sqrt{3} \delta s_{(CD)}.$$

Кроме того, для возможных перемещений центров тяжести стержней  $O_1A$  и  $O_3C$ :

$$\delta s_{(O_1A)} = \frac{\delta s_A}{2} = \frac{\delta s_C}{2} = \delta s_{(O_3C)}.$$

Уравнение принципа возможных перемещений:

$$\sum_k \delta A_{F_k} = Q \delta s_{(O_1A)} + F \delta s_A \cos 120^\circ + P \delta s_{(AB)} \cos 30^\circ + Q \delta s_{(O_2B)} \cos 90^\circ + \\ + Q \delta s_{(BC)} \cos 150^\circ - Q \delta s_{(O_3C)} + Q \delta s_{(CD)} \cos 150^\circ + Q \delta s_{(O_4D)} \cos 90^\circ = 0.$$

После упрощений и сокращений, получим

$$-F \delta s_A \cos 60^\circ + P \delta s_{(AB)} \cos 30^\circ - Q \delta s_{(BC)} \cos 30^\circ - Q \delta s_{(CD)} \cos 30^\circ = 0.$$

$$-F \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + P \frac{\sqrt{3}}{2} - 2Q \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

$$F = P - 2Q = \frac{2}{3} P.$$

**Ответ.** 1).  $F = P$ . 2).  $F = \frac{2}{3} P$ .

### Решение задачи С2.

1 способ (векторный). Обозначим силы упругости, действующие на точку  $M$  со стороны нитей 1 и 2 через  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  (рис. 3). Растяжения этих нитей равны  $MA$  и  $MB$ . Поэтому

$$\vec{F}_1 = c_1 \cdot \overline{MA} = c \cdot \overline{MA},$$

$$\vec{F}_2 = c_2 \cdot \overline{MB} = \frac{c}{2} \cdot \overline{MB}.$$

Учтем, что  $\overline{MA} = \overline{MO} + \overline{OA}$ ,  
 $\overline{MB} = \overline{MO} + \overline{OB}$ , причем из условия следует, что  $\overline{OB} = -2\overline{OA}$ . Тогда

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = c \left( \overline{MA} + \frac{\overline{MB}}{2} \right) = c \left( \overline{MO} + \overline{OA} + \frac{\overline{MO}}{2} - \overline{OA} \right) = \frac{3}{2} c \cdot \overline{MO} = -\frac{3}{2} c \vec{r}, \quad (1)$$

где  $\overline{OM} = \vec{r}$  – радиус-вектор точки  $M$ .

Разложим силу тяжести на составляющие:  $\vec{G} = \vec{G}_y + \vec{G}_z$ , здесь ось  $z$  перпендикулярна наклонной плоскости.

Точка  $M$  находится в равновесии под действием пространственной системы сходящихся сил. Уравнение её равновесия:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) в векторной проекции на плоскость  $xu$  имеет вид:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{G}_y + \vec{F}_{mp} = 0.$$

С учетом (1) получим:

$$\vec{F}_{mp} = -\vec{G}_y + \frac{3}{2} c \vec{r}.$$

$$\frac{2}{3c} \vec{F}_{mp} = -\frac{2}{3c} \vec{G}_y + \vec{r}. \quad (3)$$

Вектор в правой части (2) обозначим через

$$\vec{r}_1 = -\frac{2}{3c} \vec{G}_y + \vec{r}. \quad (4)$$

Обозначим через  $O_1$  точку на плоскости  $xu$ , такую, что

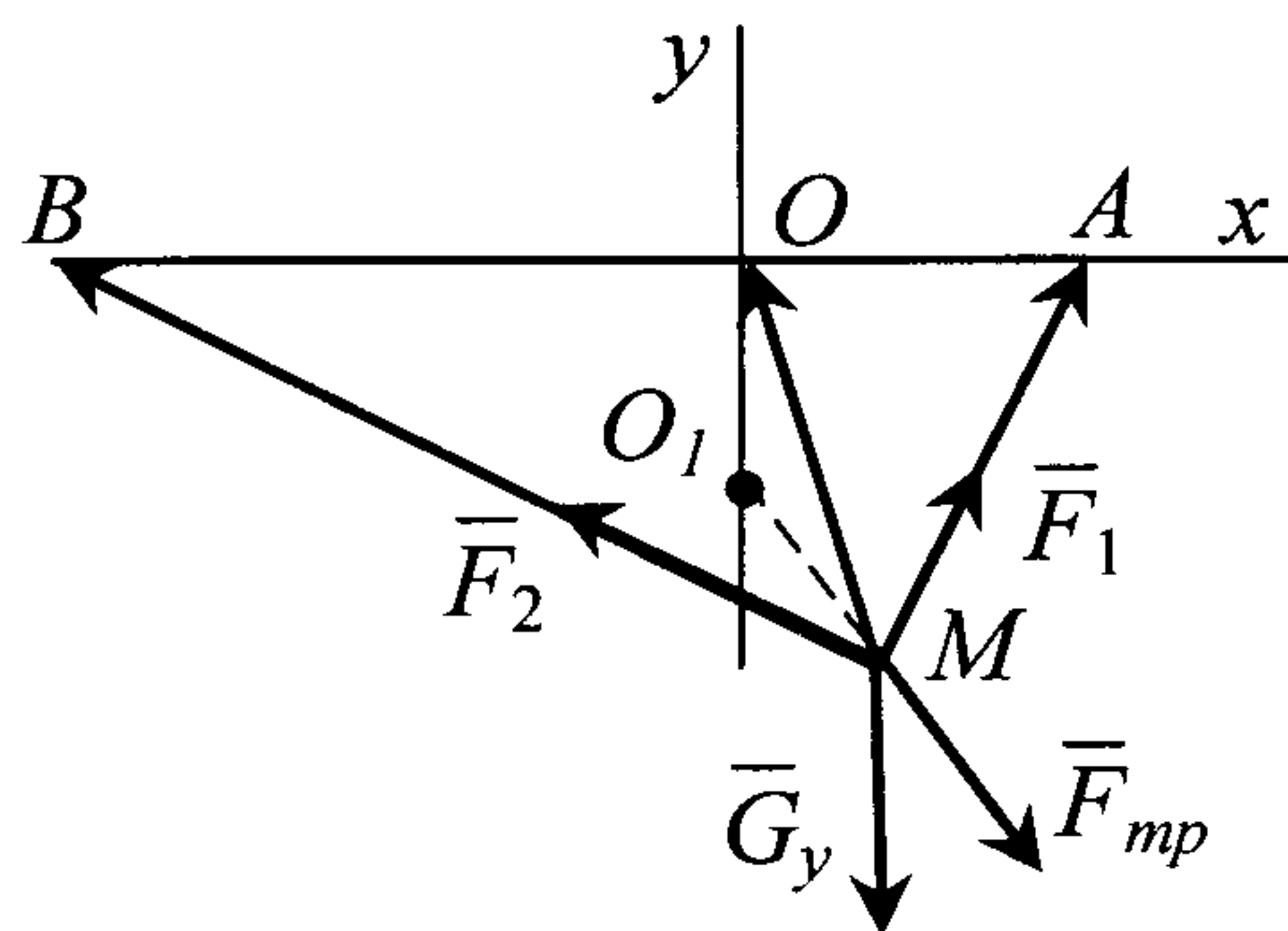


Рис. 3

$$\overline{O_1O} = -\frac{2}{3c}\overline{G}_y. \quad \text{С учетом } \overline{r} = \overline{OM} \quad \text{получим из (4):}$$

$\overline{r}_1 = \overline{O_1O} + \overline{OM} = \overline{O_1M}$ , то есть  $\overline{r}_1$  – радиус-вектор точки  $M$ , отсчитываемый от точки  $O_1$ .

Уточним положение  $O_1$ . В проекциях на  $x, y$ :  $\overline{G}_y = (0, -mg \sin \alpha)$ .

Поэтому  $\overline{OO_1} = -\overline{O_1O} = \frac{2}{3c} \cdot (0, -mg \sin \alpha) = \left(0, -\frac{2mg \sin \alpha}{3c}\right)$ , то есть  $O_1$

находится на оси  $y$  ниже точки  $O$  на расстояние  $\frac{2mg \sin \alpha}{3c}$ .

Из (3), (4):

$$\overline{r}_1 = \frac{2}{3c}\overline{F}_{mp}. \quad (5)$$

При равновесии точки  $M$ :  $F_{mp} \leq fN$ . Из проекции уравнения равновесия (2) на ось  $z$ :  $N = G_z = mg \cos \alpha$ . Поэтому из (5) следует, что точка  $M$  находится в равновесии при

$$|\overline{r}_1| = \frac{2}{3c}|\overline{F}_{mp}| \leq \frac{2}{3c}fN = \frac{2fmg \cos \alpha}{3c},$$

то есть  $M$  удалена от точки  $O_1$  не более, чем на  $\frac{2fmg \cos \alpha}{3c}$ , то есть принадлежит кругу с центром  $O_1$  этого радиуса.

2 способ (координатный).

Величины сил упругости:

$$F_1 = c_1 \cdot MA, \quad F_2 = c_2 \cdot MB. \quad (6)$$

Для определенности укажем точку  $M$  правее оси  $y$  и ниже оси  $x$ , без ограничения общности дальнейших выкладок (рис. 4). Выразим проекции силы  $\overline{F}_1$  на оси  $x, y$  с использованием координат  $x_M, y_M$  точки  $M$ .

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha, \quad F_{1y} = F_1 \sin \alpha.$$

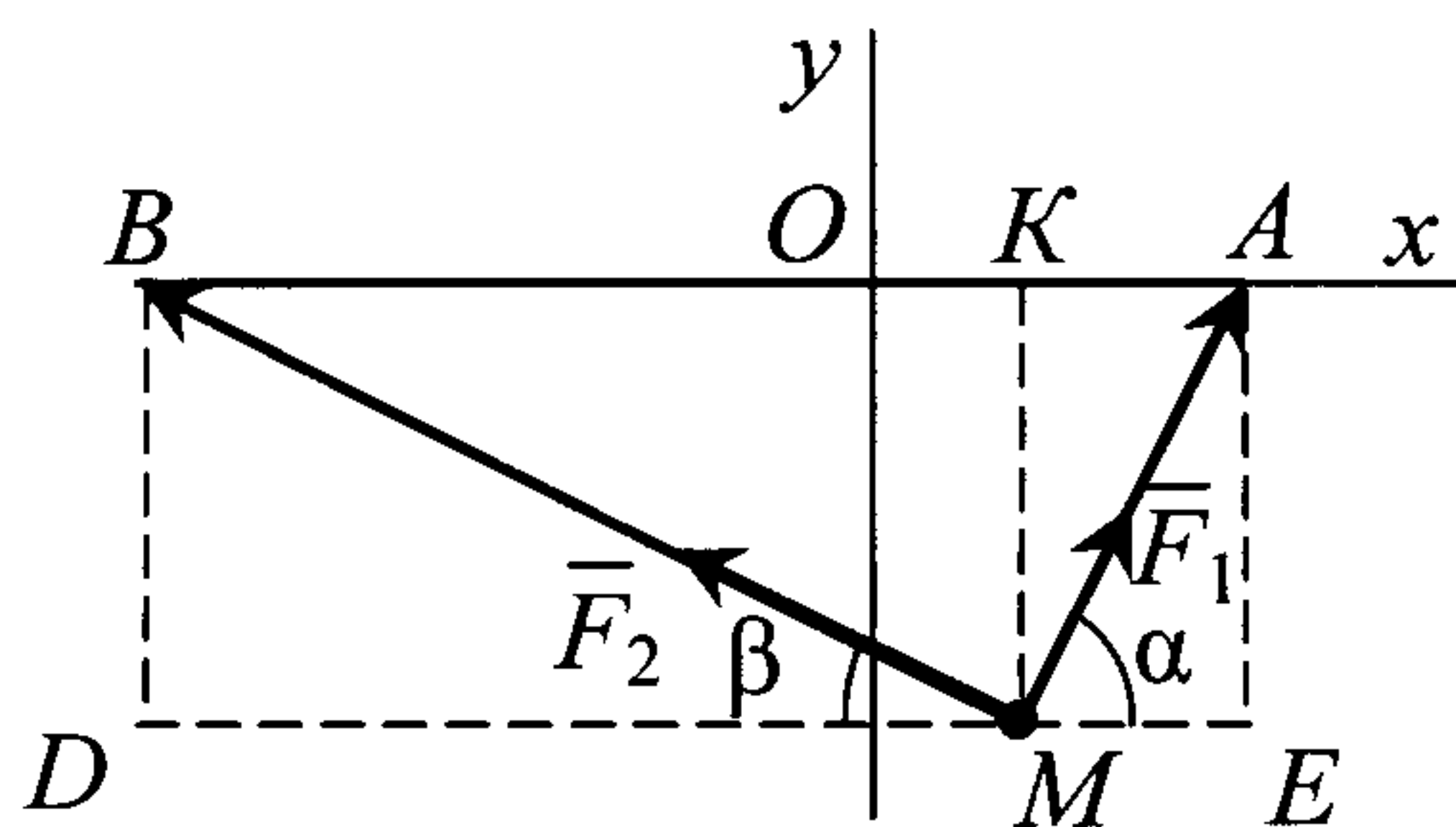


Рис. 4

Из треугольника  $AME$ :

$$\cos \alpha = \frac{ME}{MA}, \quad \sin \alpha = \frac{AE}{MA} = \frac{MK}{MA},$$

где  $ME = OA - OK = a - x_M$ ,  $MK = -y_M$ . Отсюда получим:

$$F_{1x} = \frac{a - x_M}{MA} \cdot F_1, \quad F_{1y} = \frac{-y_M}{MA} F_1. \quad (7)$$

Проводя аналогичные выкладки, из треугольника  $MBD$  получим, с учетом  $MD = OB + OK = 2a + x_M$ ,  $MK = -y_M$ :

$$F_{2x} = \frac{2a + x_M}{MB} \cdot F_2, \quad F_{2y} = \frac{-y_M}{MB} F_2. \quad (8)$$

Проецируем уравнение равновесия (2) на ось  $x$ :

$$F_{1x} + F_{2x} + F_{mp,x} = 0.$$

С учетом (6), (7), (8) получим:

$$\frac{a - x_M}{MA} \cdot c_1 \cdot MA - \frac{2a + x_M}{MB} \cdot c_2 \cdot MB + F_{mp,x} = 0.$$

$$F_{mp,x} = -c(a - x_M) + \frac{c}{2}(2a + x_M) = cx_M + \frac{c}{2}x_M = \frac{3}{2}cx_M. \quad (9)$$

Проецируем уравнение равновесия (2) на ось  $y$ :

$$F_{1y} + F_{2y} - G \sin \alpha + F_{mp,y} = 0.$$

С учетом (6), (7), (8) получим:

$$-\frac{y_M}{MA} \cdot c_1 \cdot MA - \frac{y_M}{MB} \cdot c_2 \cdot MB - G \sin \alpha + F_{mp,y} = 0.$$

$$F_{mp,y} = cy_M + \frac{c}{2}y_M + mg \sin \alpha = \frac{3}{2}cy_M + mg \sin \alpha. \quad (10)$$

Тогда, используя (9), (10):

$$F_{mp}^2 = F_{mp,x}^2 + F_{mp,y}^2 = \left(\frac{3}{2}cx_M\right)^2 + \left(\frac{3}{2}cy_M + mg \sin \alpha\right)^2.$$

С другой стороны,  $|F_{mp}| \leq fN = fmg \cos \alpha$ . Отсюда

$$\left(\frac{3}{2}cx_M\right)^2 + \left(\frac{3}{2}cy_M + mg \sin \alpha\right)^2 \leq (fmg \cos \alpha)^2.$$

$$x_M^2 + \left( y_M + \frac{2mg \sin \alpha}{3c} \right)^2 \leq \left( \frac{2fmg \cos \alpha}{3c} \right)^2.$$

Таким образом, точка  $M$  лежит к кругу с центром  $\left( 0, -\frac{2mg \sin \alpha}{3c} \right)$  радиуса  $\frac{2fmg \cos \alpha}{3c}$ .

**Ответ.** Круг с центром в точке  $\left( 0, -\frac{2mg \sin \alpha}{3c} \right)$  радиуса  $\frac{2fmg \cos \alpha}{3c}$ .

### **Решение задачи K1.**

Перепишем заданное соотношение  $v = \sqrt{1 - ka_\tau}$  в виде дифференциального уравнения.

$$ka_\tau = 1 - v^2. \quad (1)$$

Используем известное представление:  $a_\tau = \frac{dv_\tau}{dt} = \frac{dv_\tau}{ds} \frac{ds}{dt} = v_\tau \frac{dv_\tau}{ds}$ .

$$kv_\tau \frac{dv_\tau}{ds} = 1 - v^2.$$

$$k \frac{d(v^2)}{2(1 - v^2)} = ds.$$

Введем новую переменную  $y = v^2$ . При  $t = 0$  из  $a_\tau = 1/k$ , с учетом (1), получаем  $v(0) = 0$ , то есть  $y(0) = 0$ .

$$-\frac{k}{2} \int_0^y \frac{dy}{y-1} = \int_0^s ds.$$

$$s = -\frac{k}{2} \ln \left| \frac{y-1}{-1} \right| = -\frac{k}{2} \ln |1-y| = -\frac{k}{2} \ln(1-y) = -\frac{k}{2} \ln(1-v^2).$$

Здесь, отбрасывая знак модуля, учли, что при  $t = 0$ :  $1 - y = 1 > 0$ , а функция  $s = s(v)$  должна быть непрерывной.

$$1 - v^2 = \exp\left(-\frac{2s}{k}\right),$$

С учетом (1) получим:

$$ka_\tau = \exp\left(-\frac{2s}{k}\right).$$

При  $s = k$  (м):

$$a_\tau = \frac{1}{ke^2}.$$

*Замечание.* К виду  $ka_\tau = 1 - v^2$  может быть сведено, например, ДУ движения материальной точки при действии постоянной силы и силы сопротивления среды (при определенном подборе параметров).

**Ответ.**  $a_\tau = \frac{1}{ke^2}.$

### Решение задачи К2.

1). Стержень  $AM$  совершает плоскопараллельное движение. При этом  $\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{M/A}$ . При равноускоренном движении точки  $A$  и равноускоренном вращении  $AM$  в любой момент времени выполняется:  $v_A = at$ ,

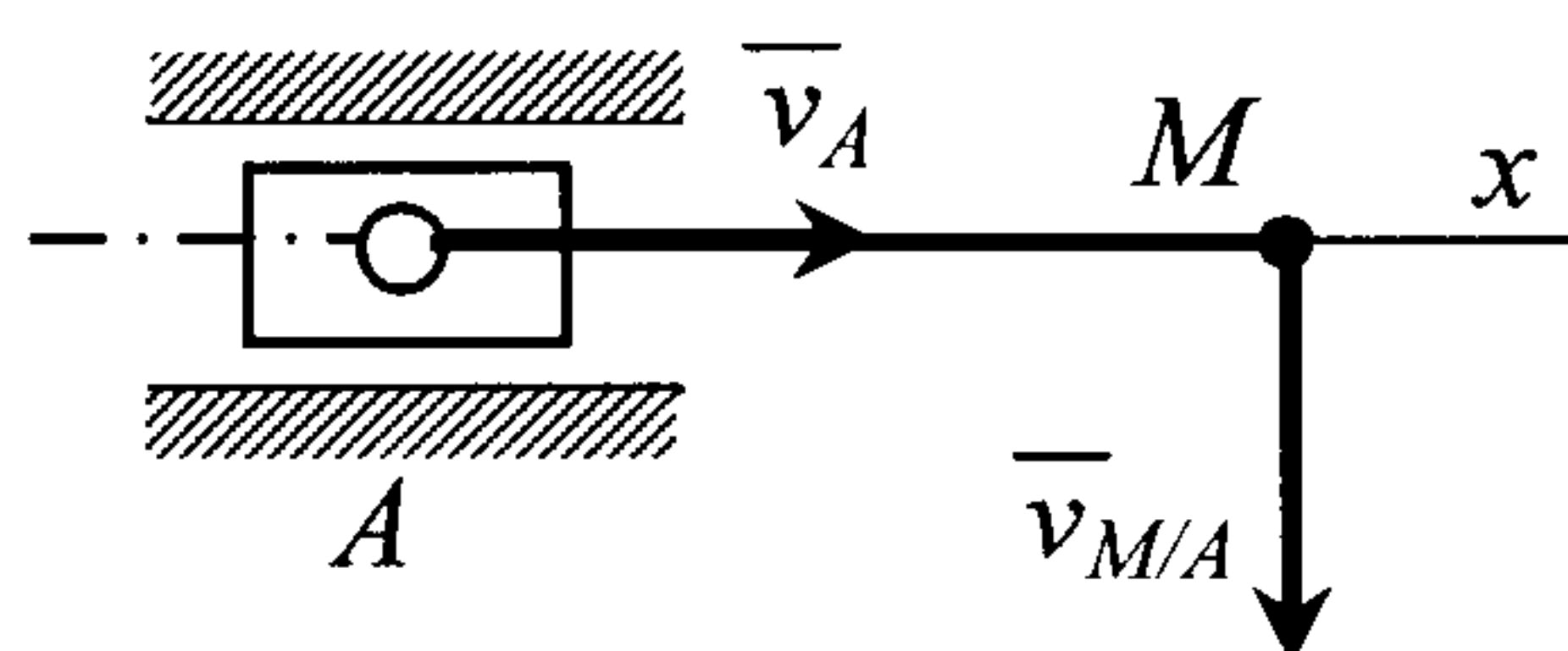


Рис. 5

угол поворота стержня  $AM$  равен  $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$ , его угловая скорость  $\omega = \varepsilon t$ ,

$$v_{M/A} = l\omega = l\varepsilon t.$$

$$v_{M/A} = l\varepsilon t.$$

В первый момент, когда точка  $M$  окажется на оси  $x$  (рис. 5),  $\varphi = \pi/2$ ,  $t = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}$ ,  $\bar{v}_{M/A}$  перпендикулярен  $\bar{v}_A$ .

$$v_M = \sqrt{v_A^2 + v_{M/A}^2} = \sqrt{(at)^2 + (l\varepsilon t)^2} = \sqrt{\frac{\pi(a^2 + l^2\varepsilon^2)}{\varepsilon}}.$$

2). 1-й способ (геометрический).

По теореме о сложении ускорений при плоском движении:



$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{M/A} = \bar{a}_A + \bar{a}_{M/A}^{\tau} + \bar{a}_{M/A}^n, \quad (1)$$

где  $a_A = a$ ,  $a_{M/A}^{\tau} = l\varepsilon$ ,  $a_{M/A}^n = l\omega^2$ .

Вначале приведем ход рассуждений, не приводящий к решению.

При  $t=0$  (рис. 6):  $\omega = \varepsilon \cdot 0 = 0$ ,  $a_{M/A}^n = 0$ , то есть  $\bar{a}_M$  параллелен оси  $x$ , далее  $v_A = v_{M/A} = 0$ , откуда  $v_M = 0$ . При  $t \rightarrow 0$ ,  $\varphi \rightarrow 0$  направление  $\bar{v}_{M/A}$ , а значит и  $\bar{v}_M$ , стремится к направлению оси  $x$ . Для определения нормального ускорения точки проецируем  $\bar{a}_M$  на ось, перпендикулярную  $\bar{v}_M$ . При  $t=0$ :  $a_n = (\bar{a}_M)_y = 0$ . Таким образом, применить формулу для радиуса кривизны  $\rho = v^2 / a_n$  при  $t=0$  не удастся из-за неопределенности вида  $0/0$ .

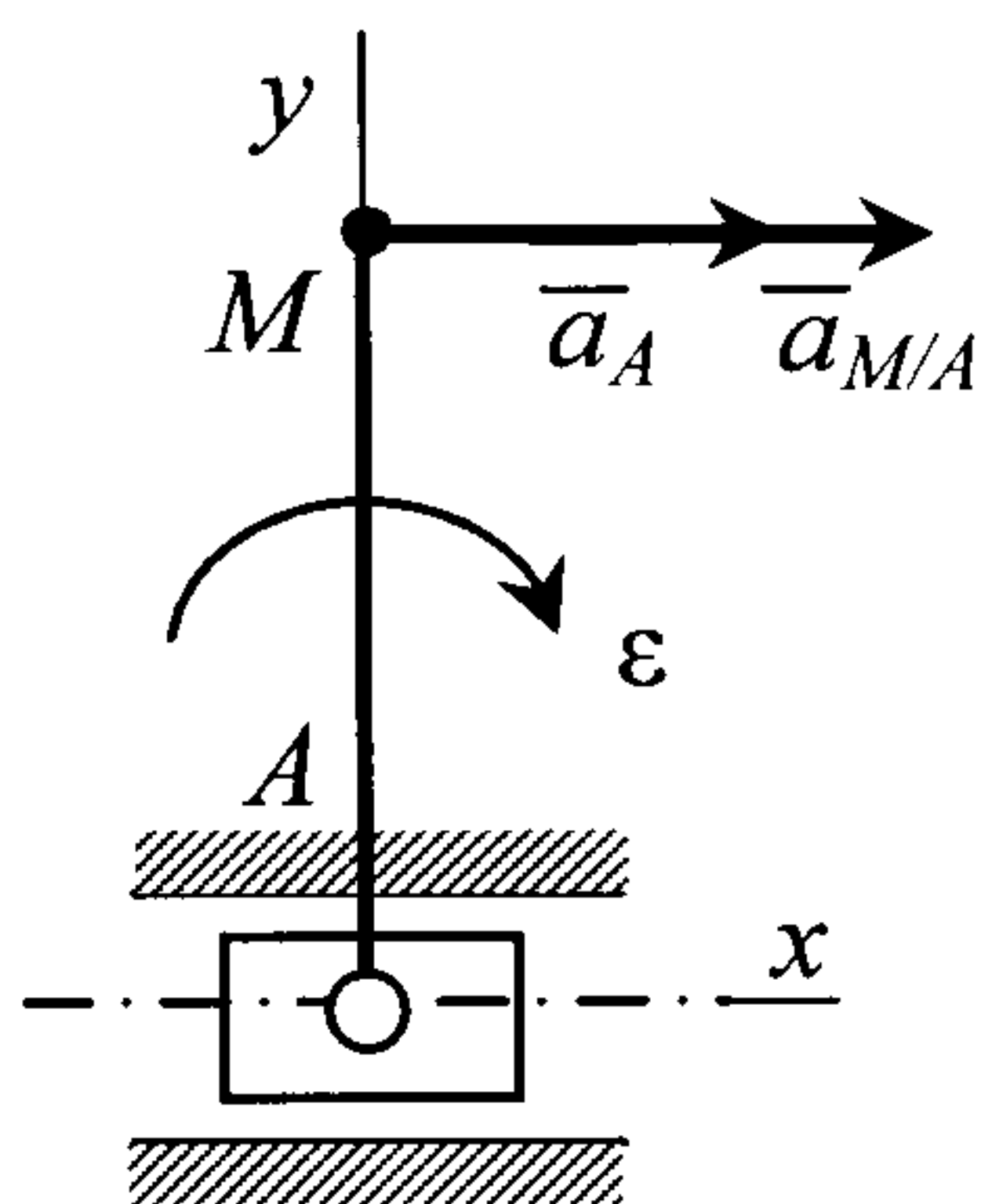


Рис. 6

К решению приводит следующее рассуждение (рис. 7). Положение точки  $M$  полностью определяется прямолинейным перемещением точки  $A$ , при котором  $s_A = \frac{at^2}{2}$ , и перемещением точки  $M$  при повороте  $AM$ , то есть длиной дуги  $M'M$ :  $s_{M'M} = l\varphi = l \frac{\varepsilon t^2}{2}$ . Установим связь между  $s_A$  и  $s_{M'M}$ :

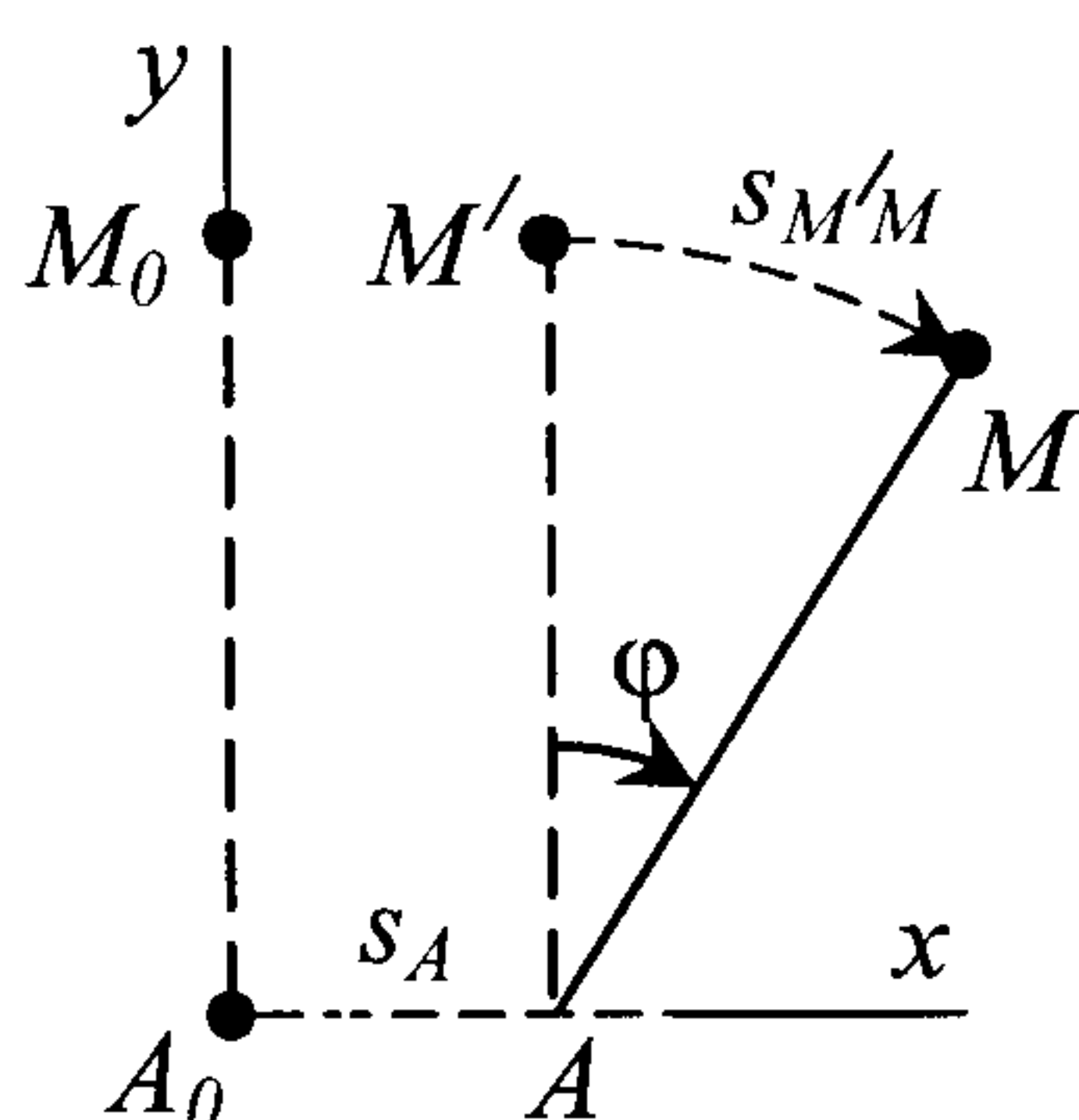


Рис. 7

$$s_{M'M} = l \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{l\varepsilon}{a} \cdot \frac{at^2}{2} = \frac{l\varepsilon}{a} s_A. \quad (2)$$

Таким образом, величина  $s_{M'M}$  связана с  $s_A$  коэффициентом, не зависящим от времени. Поэтому при заданных  $l$ ,  $a$ ,  $\varepsilon$  траектория точки  $M$  определяется однозначно. При этом вид траектории (кривой на плоскости  $xu$ ) не зависит от закона  $s_A = s_A(t)$ . При этом положение точки  $M$  на траектории определяется лишь значением  $s_A$ ,

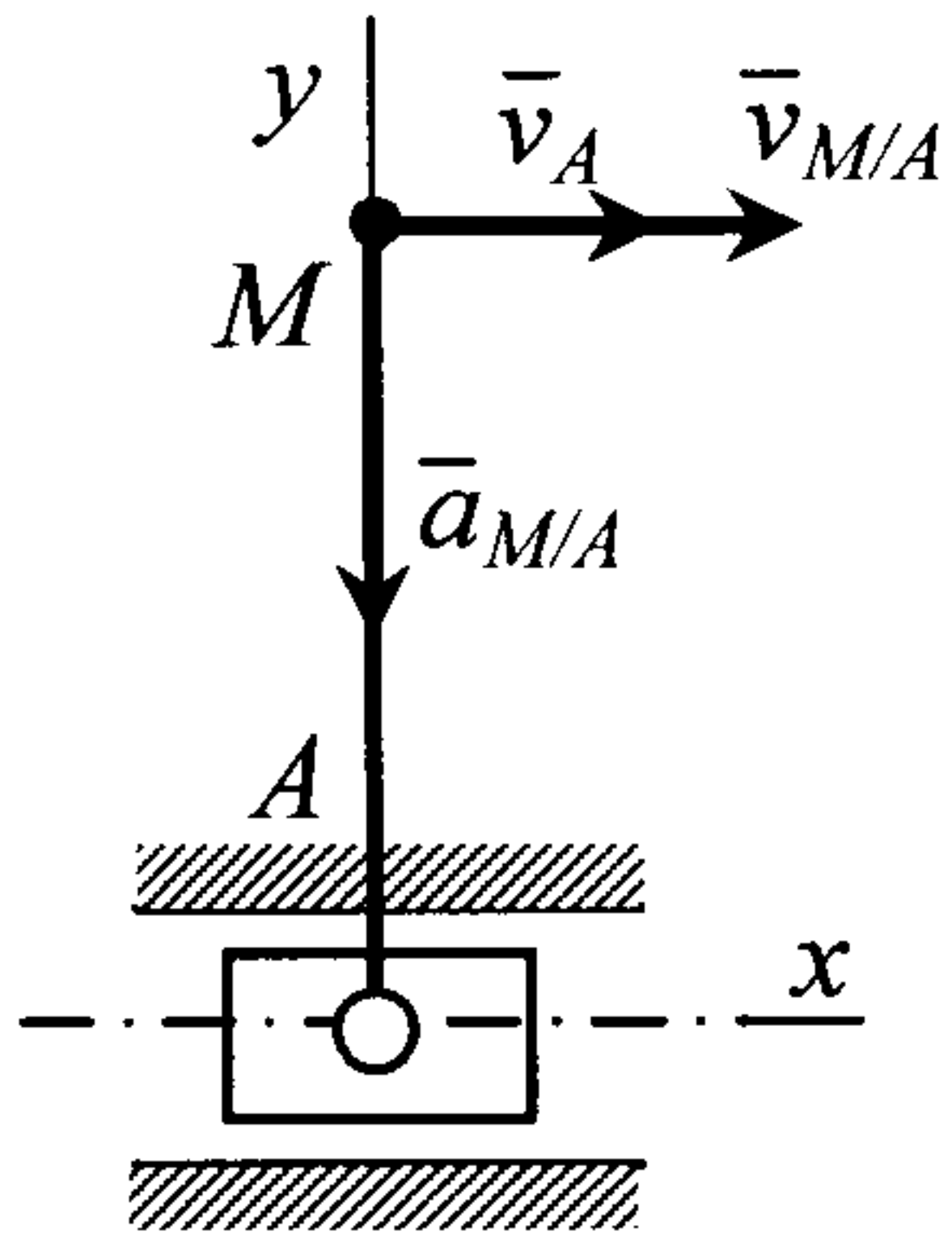


Рис. 8

Радиус кривизны траектории является геометрической характеристикой кривой. Для его определения неважно, каков закон движения  $s(t)$  точки по траектории. Этот закон может быть выбран произвольно. Удобно выбрать закон равномерного движения  $s_A = ut$ , где  $u > 0$  – некоторая константа. Тогда из (2):  $s_{M'/M} = \frac{l\varepsilon}{a} \cdot ut$ ,

$$\varphi = s_{M'/M} / l = \frac{\varepsilon}{a} \cdot ut. \text{ В записи теоремы о сложении скоростей:}$$

$$\bar{v}_M = \bar{v}_A + \bar{v}_{M/A}:$$

$$v_A = \dot{s}_A = u, \quad v_{M/A} = \dot{s}_{M'/M} = u \frac{l\varepsilon}{a}.$$

При  $t = 0$  (рис. 8):

$$v_{M,x} = v_{A,x} + v_{M/A,x} = v_A + v_{M/A} = u + u \frac{l\varepsilon}{a} = u \left( \frac{a + l\varepsilon}{a} \right), \quad v_{M,y} = 0.$$

Отсюда  $v_M = u \left( \frac{a + l\varepsilon}{a} \right)$ . Далее, в (1):  $a_A = \ddot{s}_A = 0$ ,  $a_{M/A}^{\tau} = l\ddot{\varphi} = 0$ ,

$a_{M/A}^n = l\dot{\varphi}^2 = l \frac{u^2 \varepsilon^2}{a^2}$ . Так как  $\bar{a}_{M/A}^n \perp \bar{v}_M$ , то нормальное ускорение точки  $M$ :

$\bar{a}_n = \bar{a}_{M/A}^n$  и  $a_n = l \frac{u^2 \varepsilon^2}{a^2}$ . Тогда радиус кривизны равен:

$$\rho = \frac{v_M^2}{a_n} = \frac{u^2 \left( \frac{a + l\varepsilon}{a} \right)^2}{l \frac{u^2 \varepsilon^2}{a^2}} = \frac{(a + l\varepsilon)^2}{l\varepsilon^2}.$$

2-й способ (аналитический).

Уравнения движения точки  $M$  в координатной форме (рис. 7):

$$x_M = s_A + l \sin \varphi = \frac{at^2}{2} + l \sin \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad y_M = l \cos \varphi = l \cos \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

$$v_x = \dot{x}_M = at + l\varepsilon t \cos \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad v_y = \dot{y}_M = -l\varepsilon t \sin \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(a + l\varepsilon \cos \frac{\varepsilon t^2}{2}\right)^2 + \left(-l\varepsilon \sin \frac{\varepsilon t^2}{2}\right)^2} \cdot t. \quad (3)$$

$$a_x = \ddot{x}_M = a + l\varepsilon \cos \frac{\varepsilon t^2}{2} - l\varepsilon^2 t^2 \sin \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (4)$$

$$a_y = \ddot{y}_M = -l\varepsilon \sin \frac{\varepsilon t^2}{2} - l\varepsilon^2 t^2 \cos \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

При  $t \rightarrow 0$ :  $\sin \frac{\varepsilon t^2}{2} \approx \frac{\varepsilon t^2}{2}$ ,  $\cos \frac{\varepsilon t^2}{2} \approx 1$ . С учетом этого, при  $t \rightarrow 0$

можно отбросить величины меньшего порядка малости  $l\varepsilon \sin \frac{\varepsilon t^2}{2}$  в (3)

и  $l\varepsilon^2 t^2 \sin \frac{\varepsilon t^2}{2}$  в (4). Тогда получим для точки  $M$  на траектории, поло-

жение которой при  $t \rightarrow 0$  стремится к начальному положению:

$$a_n = \frac{|a_x v_y - a_y v_x|}{v} = \frac{\left| (a + l\varepsilon) \left( -l \frac{\varepsilon^2 t^3}{2} \right) - \left( -l \frac{\varepsilon^2 t^2}{2} - l\varepsilon^2 t^2 \right) (a + l\varepsilon) t \right|}{(a + l\varepsilon)t} =$$

$$= \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) \cdot \frac{l\varepsilon^2 t^3}{t} = l\varepsilon^2 t^2.$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{[(a + l\varepsilon)t]^2}{l\varepsilon^2 t^2} = \frac{(a + l\varepsilon)^2}{l\varepsilon^2}.$$

**Ответ.** 1).  $v_M = \sqrt{\frac{\pi(a^2 + l^2 \varepsilon^2)}{\varepsilon}}$ . 2).  $\rho = \frac{(a + l\varepsilon)^2}{l\varepsilon^2}$ .

### Решение задачи Д1.

Для вывода платформы с вагоном из равновесия необходимо преодолеть силу трения со стороны грунтовой поверхности. При прикладывании к платформе силы  $\bar{Q}_0$  реализуется предельное равновесие, при котором  $F_{mp, \max} = fN$ . Условие равновесия системы вдоль оси  $x$ , сонаправленной  $\bar{Q}_0$ :  $\sum_k F_{kx} = Q_0 - F_{mp} = 0$ , откуда

$$fN = Q_0. \quad (1)$$

Запишем дифференциальное уравнение движения платформы с вагоном при действии силы  $Q_1 = kQ_0$ , в проекции на ось  $x$ . Строго говоря, при этом применяется теорема о движении центра масс механической системы. Так как трос  $AB$  считается нерастяжимым, то платформа и вагон движутся поступательно как единое тело. Поэтому запись этой теоремы идентична записи ДУ движения материальной точки:

$$(m_1 + m_2)a_x = Q_1 - F_{mp}.$$

Так как при движении  $F_{mp} = fN$ , то с учетом (1):

$$(m_1 + m_2)a_x = Q_1 - Q_0 = (k - 1)Q_0.$$

$$a_x = \frac{(k - 1)Q_0}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

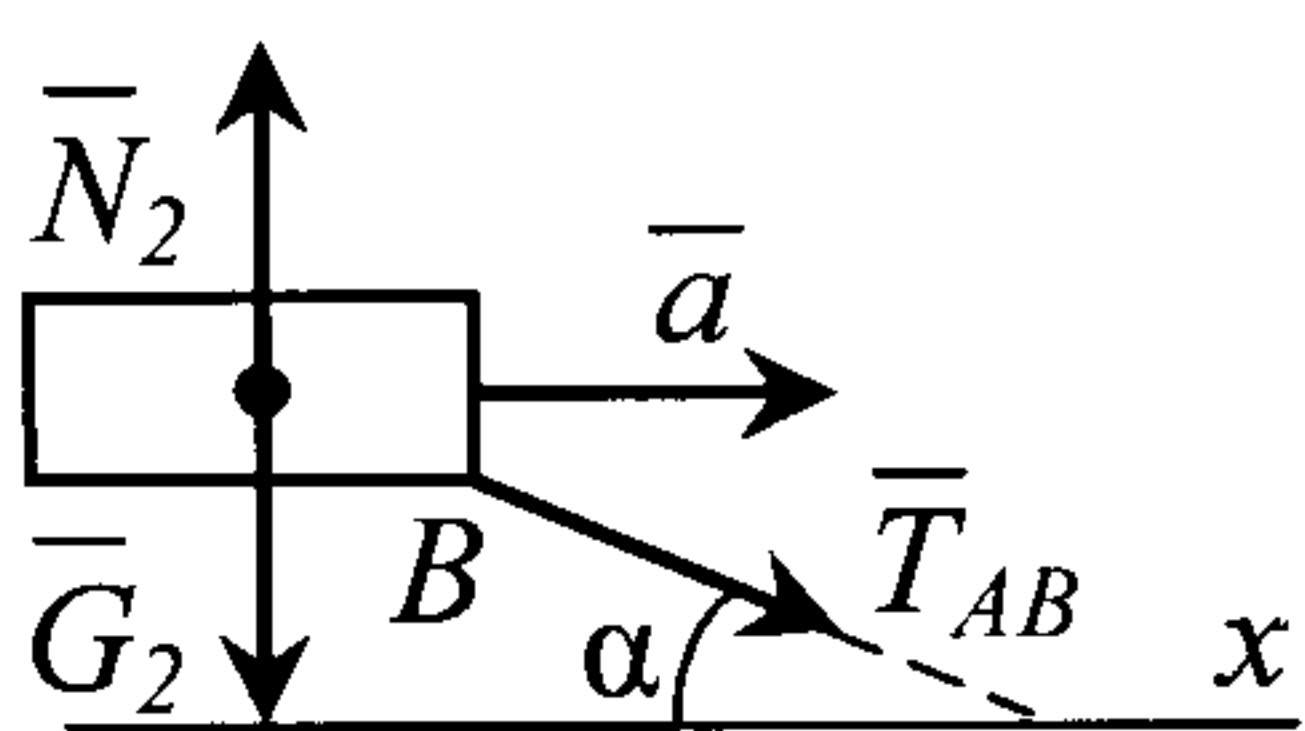


Рис. 9

ДУ движения вагона (рис. 9) в проекции на ось  $x$ :

$$m_2 a_x = T_{AB} \cos \alpha,$$

где  $T_{AB}$  – сила натяжения троса. С учетом (2):

$$T_{AB} = \frac{m_2 a_x}{\cos \alpha} = \frac{m_2 (k - 1)}{(m_1 + m_2) \cos \alpha} Q_0.$$

**Ответ.**  $T_{AB} = \frac{m_2 (k - 1)}{(m_1 + m_2) \cos \alpha} Q_0.$

### Решение задачи Д2.

*Способ 1.* При малых колебаниях диск поворачивается на угол  $\varphi \approx 0$  (рис. 10). При этом конец пружины оказывается в положении

$A'$ . Рассмотрим треугольник  $AA'B$ . Так как длина  $AB$  и радиус диска сопоставимы по величине, то длина  $A'A$  мала по сравнению с  $AB$ . Тогда очевидно (из теоремы синусов), что угол при вершине  $B$ :  $\delta \approx 0$ . В силу  $\varphi \approx 0$ , угол при вершине  $A'$ :  $\beta \approx 180^\circ - (90^\circ + \alpha) - \delta \approx 90^\circ - \alpha$ .

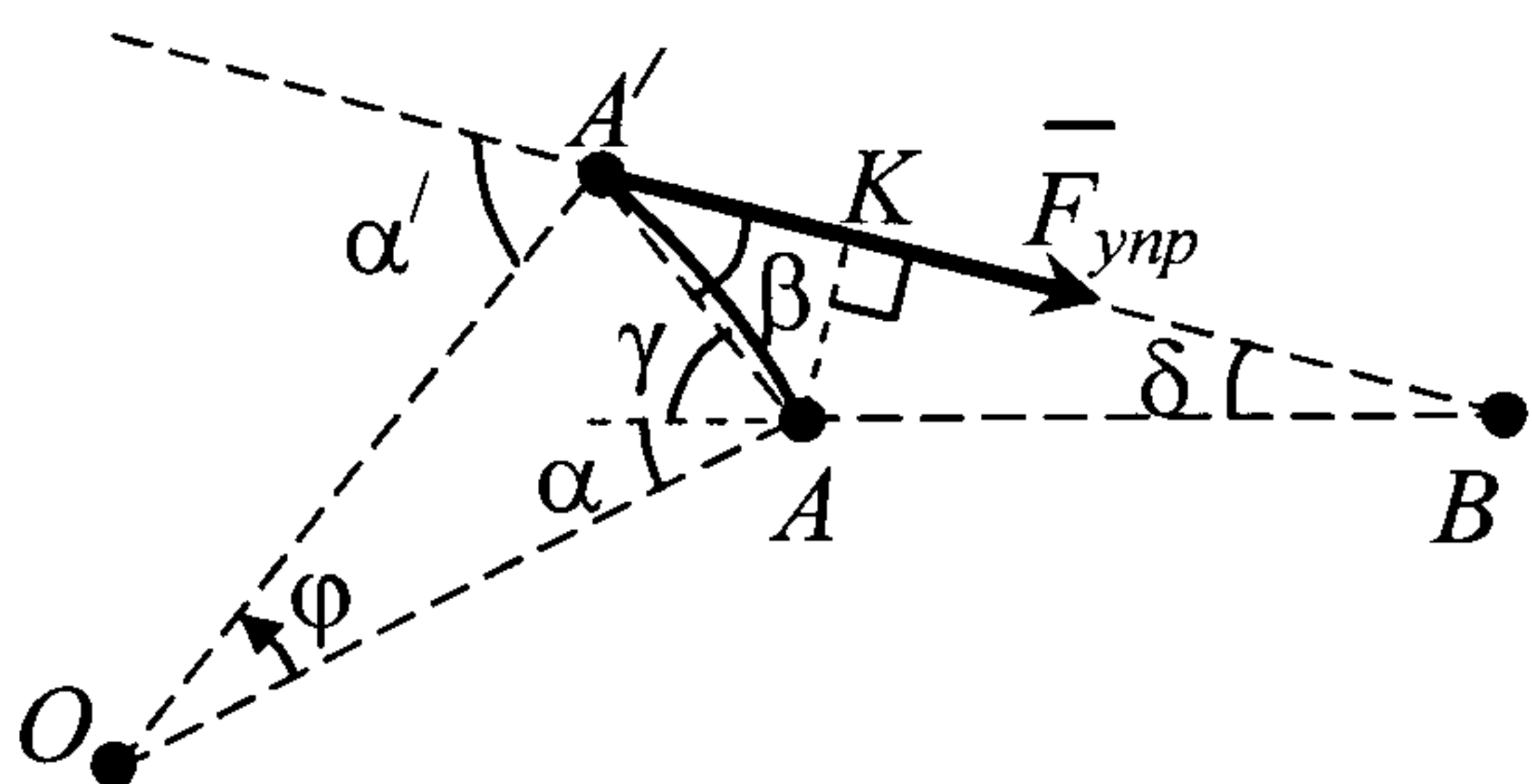


Рис. 10

Угол между лучом  $BA'$  и радиусом  $OA'$ :  $\alpha' = \alpha + \delta + \varphi \approx \alpha$ . Поэтому  $\sin \alpha' \approx \sin \alpha$ .

Изменение длины пружины равно  $\lambda = A'B - AB$ . Построим  $AK$  – перпендикуляр к  $A'B$ . При  $\varphi \approx 0$  дугу  $A'A$  можно приближенно считать

отрезком длиной  $A'A = R\varphi$ , где  $R$  – радиус диска. Тогда  $A'B = A'K + KB = A'A \cos \beta + AB \cos \delta \approx R\varphi \sin \alpha + AB$ . Отсюда

$$\lambda \approx R\varphi \sin \alpha. \quad (1)$$

Значит, при малых колебаниях диска, пренебрегая величинами меньшего порядка малости, можно принять:

$$F_{\text{упр}} = cR\varphi \sin \alpha.$$

Дифференциальное уравнение вращения диска вокруг неподвижной оси  $Oz$ :

$$J_z \ddot{\varphi} = M_z(\bar{F}_{\text{упр}}). \quad (2)$$

$$J_z = mR^2 / 2, \quad M_z(\bar{F}_{\text{упр}}) = -F_{\text{упр}} R \sin \alpha' \approx -cR^2 \varphi \sin^2 \alpha.$$

Тогда из (2):

$$\ddot{\varphi} + \frac{2c \sin^2 \alpha}{m} \varphi = 0. \quad (3)$$

Это ДУ малых свободных колебаний, совершаемых по закону

$\varphi = A \sin(kt + \gamma)$  с циклической частотой  $k = \sqrt{\frac{2c \sin^2 \alpha}{m}}$  и периодом,

равным:

$$T = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2m}{c}}.$$

*Способ 2.* Приведем строгий вывод решения задачи с использованием уравнения Лагранжа 2 рода. Действующие на систему силы потенциальны, поэтому

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}. \quad (4)$$

$$T = \frac{1}{2} J_z \dot{\varphi}^2 = \frac{mR^2}{4} \dot{\varphi}^2.$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{mR^2}{2} \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Обозначим  $AB = l$ ,  $A'B = r$ . Потенциальная энергия:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{c}{2} (r - l)^2. \\ - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} &= - \frac{c}{2} \cdot 2(r - l) \frac{dr}{d\varphi}. \end{aligned} \quad (5)$$

По теореме косинусов для треугольника  $AA'B$ :

$$r^2 = l^2 + AA'^2 - 2l \cdot AA' \cos \angle A'AB.$$

$$\cos \angle A'AB = -\cos \gamma = -\cos \left( \frac{180^\circ - \varphi}{2} - \alpha \right) = -\sin \left( \frac{\varphi}{2} + \alpha \right).$$

Из равнобедренного треугольника  $OAA'$ :  $AA' = 2R \sin \frac{\varphi}{2}$ . Тогда

$$r^2 = l^2 + 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 4Rl \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \alpha \right). \quad (6)$$

Продифференцируем (6) по  $\varphi$ :

$$2r \frac{dr}{d\varphi} = 4R^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + 2Rl \left[ \cos \frac{\varphi}{2} \sin \left( \frac{\varphi}{2} + \alpha \right) + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left( \frac{\varphi}{2} + \alpha \right) \right]. \quad (7)$$

При  $\varphi \approx 0$ , учитывая  $r \approx l$ ,  $\cos \frac{\varphi}{2} \approx 1$  и пренебрегая слагаемыми меньшего порядка малости, получим из (7):

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{2l} \frac{4Rl \sin \alpha}{2} = R \sin \alpha. \quad (8)$$

При  $\varphi \approx 0$ , с учетом  $\sin \frac{\varphi}{2} \approx \frac{\varphi}{2}$  и пренебрегая величиной  $\varphi^2$ , получим из (6):

$$r^2 = l^2 + 2Rl\varphi \sin \alpha. \quad (9)$$

Учтем (8), (9) в (5):

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = -c \frac{r^2 - l^2}{r + l} \frac{dr}{d\varphi} = -c \frac{2Rl\varphi \sin \alpha}{2l} R \sin \alpha = -cR^2 \varphi \sin^2 \alpha.$$

Подставляя всё в уравнение (4), получим:

$$\begin{aligned} \frac{mR^2}{2} \ddot{\varphi} &= -cR^2 \varphi \sin^2 \alpha. \\ \ddot{\varphi} + \frac{2c \sin^2 \alpha}{m} \varphi &= 0, \end{aligned}$$

что совпадает с (3), и так далее как в 1 способе.

*Способ 3.* Возможно менее строгое, но более короткое обоснование соотношения (1). Рассмотрим сложное движение точки  $A$ , при котором переносное движение связано с поворотом  $AB$ , а относительное – с изменением длины  $AB$ . При этом абсолютная скорость точки  $A$  направлена по касательной к окружности диска. Спроецируем  $\bar{v}_a = \bar{v}_e + \bar{v}_r$  на прямую  $AB$ . Далее пренебрегаем малым изменением угла при определении проекций (не углубляясь в строгие обоснования). Получим:  $v_a \sin \alpha = v_r$ , т.е.  $\frac{Rd\varphi}{dt} \sin \alpha = \frac{d\lambda}{dt}$ ,  $R \sin \alpha d\varphi = d\lambda$ . Интегрируя при нулевых начальных условиях, получим (1), и так далее как в 1 способе.

**Ответ.**  $T = \frac{\pi}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{2m}{c}}$ .

**Решение задачи ДЗ.**

1). Обозначим через  $\bar{v}_{1r}$  скорость  $M_1$  относительно пирамиды. Направим оси  $x, y$  в плоскости основания  $ABK$  (рис. 11), ось  $z$  перпендикулярно ей.

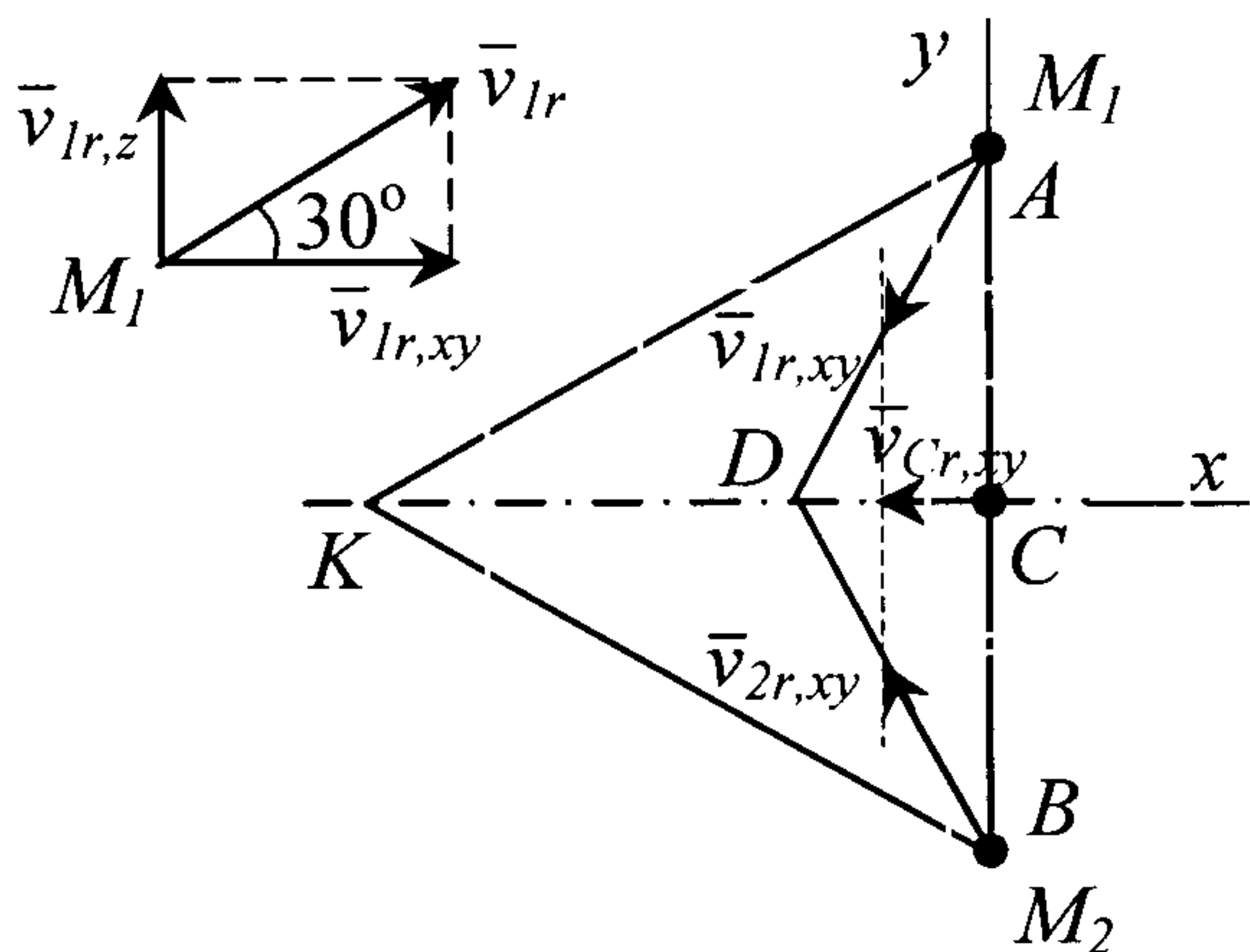


Рис.11

$$\bar{v}_{1r} = \bar{v}_{1r,xy} + \bar{v}_{1r,z},$$

где скорость набора высоты  $v_{1r,z} = v$ , а проекция в плоскости  $xy$ :

$$v_{1r,xy} = v_{1r,z} \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3} v. \quad (1)$$

Для точки  $M_2$  также  $v_{2r,xy} = \sqrt{3} v$ .

Для механической системы, включающей пирамиду и точки  $M_1, M_2$ , сумма проекций внешних сил на плоскость  $xy$  равна нулю. Поэтому

из закона сохранения количества движения:  $\bar{v}_{C,xy} = 0$ , где  $C$  – центр масс системы. При этом его относительная скорость (относительно пирамиды)  $\bar{v}_{Cr,xy}$ , в силу симметрии точек  $M_1, M_2$  и их движений, направлена вдоль оси  $x$ . Из разложения  $\bar{v}_{C,xy} = \bar{v}_{Ce,xy} + \bar{v}_{Cr,xy} = 0$ , где переносная скорость  $\bar{v}_{Ce,xy} = \bar{v}_D$ , получаем:

$$\bar{v}_D = -\bar{v}_{Cr,xy}. \quad (2)$$

(т.е. пирамида смещается в сторону, противоположную относительному движению центра масс).

В системе координат, связанной с пирамидой, количество движения системы можно записать двумя способами и затем приравнять:  $2m\bar{v}_{Cr} = m\bar{v}_{1r} + m\bar{v}_{2r}$ , где  $m$  – масса каждой из двух материальных точек. Проецируем на  $x$ :  $-2mv_{Cr} = -mv_{1r} \cos 60^\circ - mv_{2r} \cos 60^\circ$ , откуда из (1):

$$v_{Cr,xy} = (v_{1r,xy} + v_{1r,xy}) / 4 = (\sqrt{3} / 2) v.$$



Тогда, с учетом (2), искомая скорость равна по модулю:

$$v_D = v_{Cr,xy} = (\sqrt{3}/2) v.$$

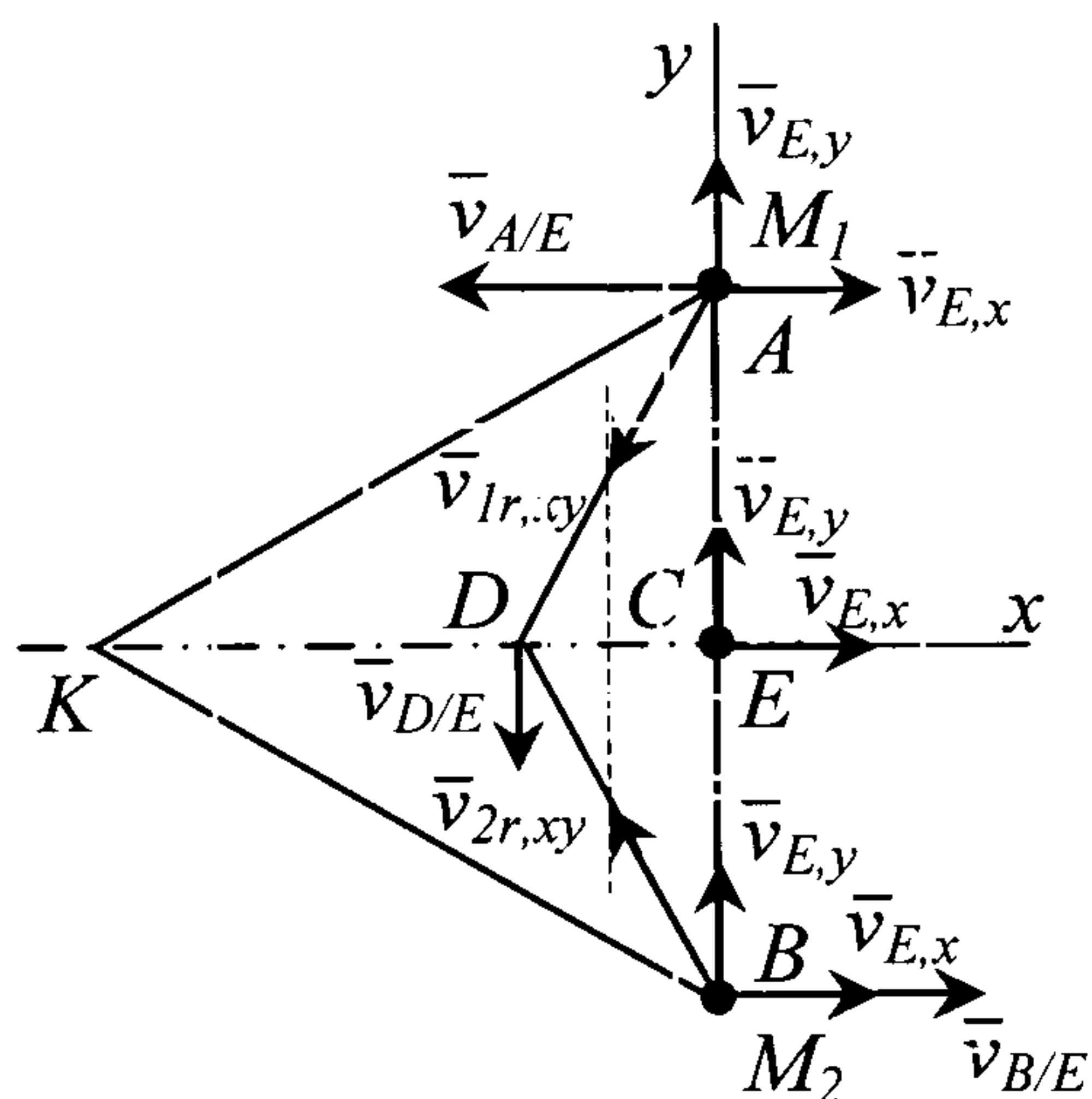


Рис.12

2). Как в части 1,  $v_{ir,xy} = \text{ctg} 30^\circ \cdot v_{ir,z}$ ,  $i=1,2$ . С учетом разных скоростей точек  $M_1, M_2$ :

$$v_{1r,xy} = \sqrt{3} v, \quad v_{2r,xy} = 2\sqrt{3} v. \quad (3)$$

Так как  $v_{1r,xy} \neq v_{2r,xy}$ , можно предположить, что движение пирамиды характеризуется не только поступательной, но и вращательной составляющими (рис.12).

Обозначим через  $E$  точку пирамиды, в которой в момент начала движения располагается центр масс  $C$ . Движение

точек  $M_1, M_2$  в плоскости  $xy$  рассмотрим как сложное, причем их переносные движения – движения точек  $A, B$ , соответственно, при плоскопараллельном движении пирамиды:

$$\bar{v}_{1,xy} = \bar{v}_E + \bar{v}_{A/E} + \bar{v}_{1r,xy}, \quad \bar{v}_{2,xy} = \bar{v}_E + \bar{v}_{B/E} + \bar{v}_{2r,xy}. \quad (4)$$

$$v_{A/E} = v_{B/E} = l\omega, \quad (5)$$

где  $l = AE = BE$ .

Так как  $\sum_k F_{k,xy}^{(e)} = 0$ , то выполняется закон сохранения количества движения системы  $\bar{Q}_{xy} = \bar{Q}_{0,xy}$ . Так как вначале система была в покое, получим:

$$m\bar{v}_{1,xy} + m\bar{v}_{2,xy} = 0. \quad (6)$$

Проецируем (6) на ось  $x$ , учитывая (3), (4), (5):

$$(v_{Ex} - v_{A/E} - v_{1r,xy} \cdot \cos 60^\circ) + (v_{Ex} + v_{B/E} - v_{2r,xy} \cdot \cos 60^\circ) = 0.$$

$$2v_{Ex} - \sqrt{3} v \cdot \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} v \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

$$v_{Ex} = \frac{3\sqrt{3}}{4}v. \quad (7)$$

Проецируем (6) на ось  $y$ , учитывая (3), (4), (5):

$$(v_{Ey} - v_{1r,xy} \sin 60^0) + (v_{Ey} + v_{2r,xy} \sin 60^0) = 0.$$

$$2v_{Ey} - \sqrt{3}v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3}v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

$$v_{Ey} = -\frac{3}{4}v. \quad (8)$$

Применим закон сохранения кинетического момента относительно неподвижной точки  $C$ . (О том, что центр масс  $C$  неподвижен в рамках сложного движения, было сказано в решении части 1.)

$$K_{Cz} = const = 0.$$

$$M_{Cz}(m\bar{v}_{1,xy}) + M_{Cz}(m\bar{v}_{2,xy}) = 0.$$

Учтем здесь (4), (3), (5):

$$-mv_{Ex}l + mv_{A/E}l + mv_{1r,xy} \cos 60^0 \cdot l + \\ + mv_{Ex}l + mv_{B/E}l - mv_{2r,xy} \cos 60^0 \cdot l = 0.$$

$$2l\omega + \sqrt{3}v \cdot \frac{1}{2} - 2\sqrt{3}v \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

$$\omega = \frac{\sqrt{3}v}{4l}. \quad (9)$$

При плоскопараллельном движении пирамиды:

$$\bar{v}_D = \bar{v}_E + \bar{v}_{D/E}, \quad (10)$$

где  $v_{DE} = DE \cdot \omega$ . Здесь, из геометрии,  $DE = \frac{l}{\sqrt{3}}$ . Проецируем (10) на оси  $x, y$ , подставляя (7), (8), (9):

$$v_{D,x} = v_{E,x} = \frac{3\sqrt{3}}{4}v.$$

$$v_{D,y} = v_{E,y} - v_{D/E} = -\frac{3v}{4} - \frac{l}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}v}{4l} = -v.$$

$$v_D = \sqrt{v_{Dx}^2 + v_{Dy}^2} = v \sqrt{\frac{9 \cdot 3}{16} + 1} = \frac{\sqrt{43}}{4} v.$$

*Замечание 1.* Выбор точки  $E$  в качестве полюса при плоскопараллельном движении удобен тем, что  $v_{A/E}$  и  $v_{B/E}$  взаимно сокращаются при проецировании закона сохранения количества движения. Если в качестве полюса выбрать точку  $D$ , то решение технически усложнилось бы.

*Замечание 2.* Возможен несколько иной подход к решению. Центр масс  $C$  неподвижен, а прямая  $M_1 M_2$  не поворачивается, как следует из закона сохранения кинетического момента. Поэтому относительная скорость точки  $C$  противоположна скорости точки  $E$  пирамиды, а относительная угловая скорость поворота прямой  $M_1 M_2$  (относительно пирамиды) равна по величине и противоположна по направлению угловой скорости пирамиды при её абсолютном движении. В системе координат, связанной с пирамидой, можно только из кинематических соотношений определить относительную скорость  $C$  и относительную угловую скорость прямой  $M_1 M_2$ . Далее, как и в приведенном решении, используем  $\bar{v}_D = \bar{v}_E + \bar{v}_{D/E}$ .

**Ответ.** 1).  $v_D = \frac{\sqrt{3}}{2} v$ . 2).  $v_D = \frac{\sqrt{43}}{4} v$ .

#### **Решение задачи Д4.**

1). Обозначим через  $\varphi$  угол между  $AB$  и вертикалью. Вначале (рис.13):  $\sin \varphi_0 = a/l = \sqrt{3}/4$ ,  $\cos \varphi_0 = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_0} = \sqrt{13}/4$ . В момент, когда точка  $C$  в 1-й раз проходит через  $D$ :  $\sin \varphi_1 = a/(l/2) = \sqrt{3}/2$ ,  $\varphi_1 = 60^\circ$ .

По теореме об изменении кинетической энергии для стержня  $AB$ :

$$T_1 - T_0 = A_{G,1}. \quad (1)$$

$$A_{G,1} = mg \cdot C_0 C_1 \cos \varphi_0 = \left(\sqrt{13}/8\right) mgl. \quad (2)$$

Скорость  $\bar{v}_{C_1}$  направлена вдоль  $A_1B_1$  (рис. 14). По направлениям  $\bar{v}_{A_1}$ ,  $\bar{v}_{C_1}$  строим точку  $P_1$  – МЦС стержня.

$$C_1P_1 = A_1C_1 \operatorname{tg} 30^\circ = l/(2\sqrt{3}).$$

$$J_{P_1z} = J_{C_1z} + m \cdot C_1P_1^2 = (ml^2/12) + (ml^2/12) = ml^2/6.$$

$$T_1 = J_{P_1z} \omega_1^2 / 2 = ml^2 \omega_1^2 / 12. \quad (3)$$

Учитываем (2), (3) в (1) при  $T_0 = 0$ :  $\omega_1^2 = (3\sqrt{13}g)/(2l)$ , откуда

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{13}g}{2l}}. \quad (4)$$

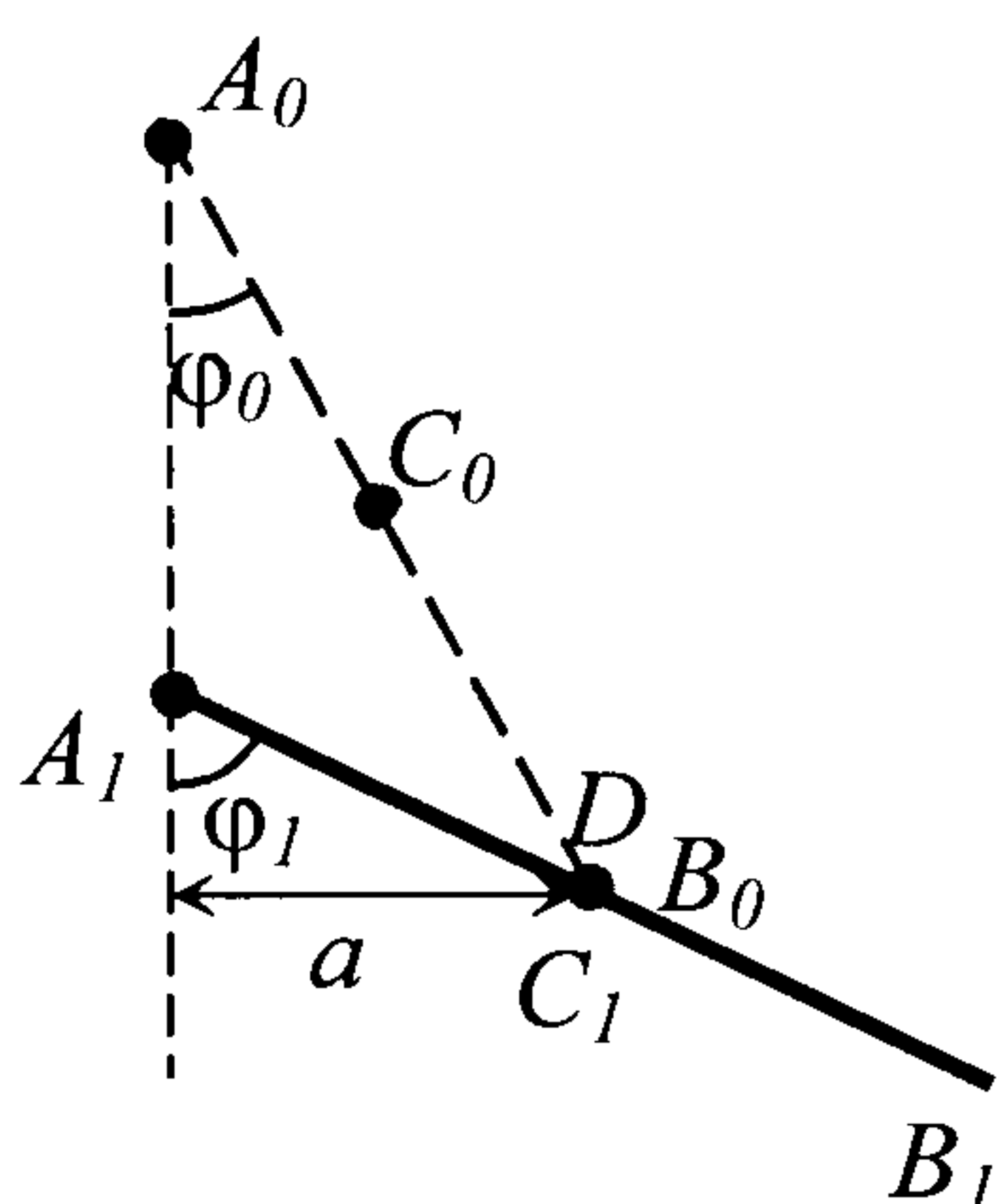


Рис. 13

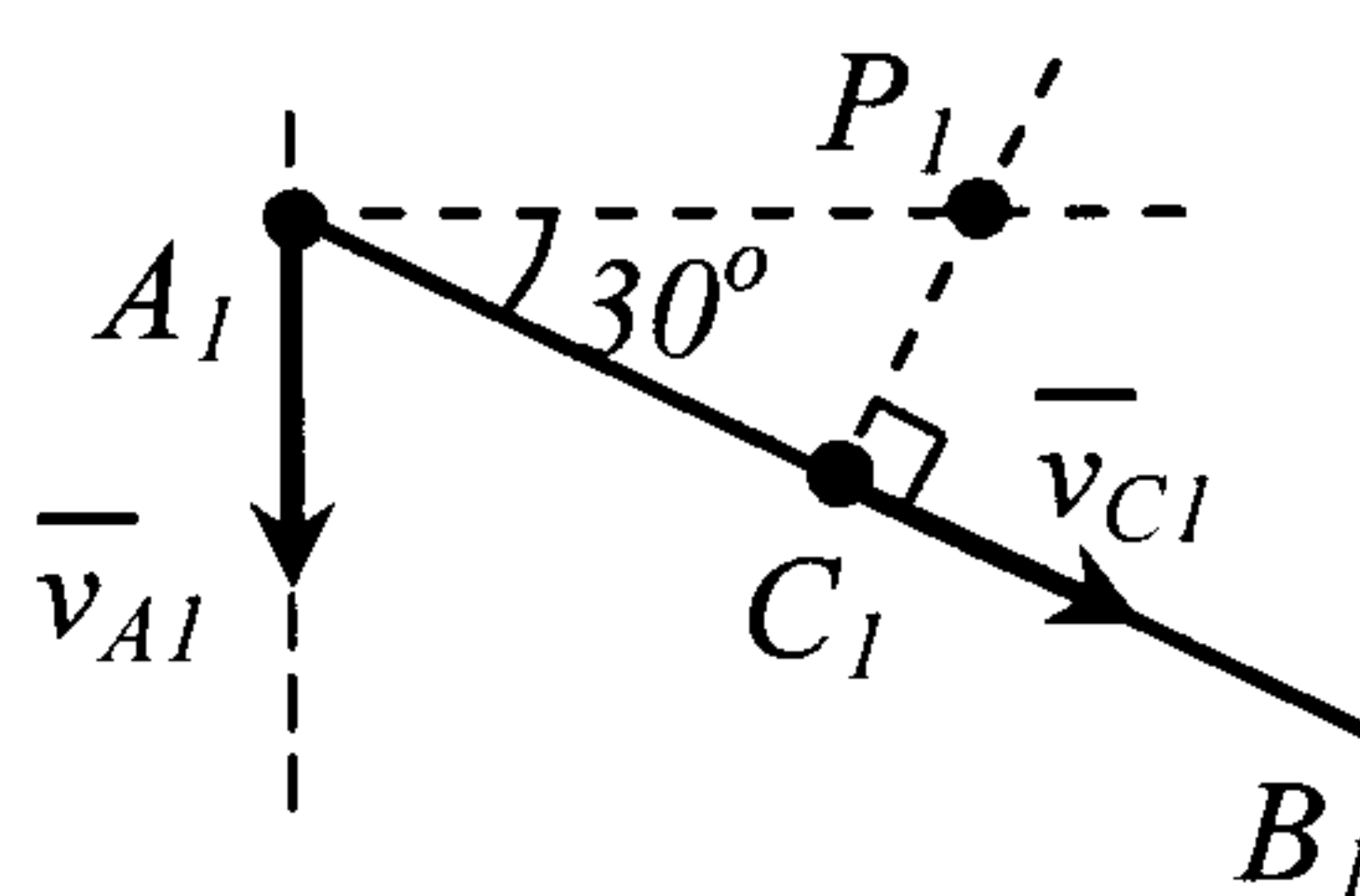


Рис. 14

При 2-м прохождении точки  $C$  через  $D$ :  $\varphi_2 = 120^\circ$  (см. рис.16, замечание 3). МЦС  $P_2$  строится аналогично,  $C_2P_2 = C_1P_1$ ,  $J_{P_2z} = J_{P_1z}$ .  $T_2 = ml^2 \omega_2^2 / 12$ . Очевидно,  $A_{G,2} = A_{G,1}$ .  $T_2 - T_0 = A_{G,2}$ . Поэтому  $T_2 = T_1$ , т.е.  $ml^2 \omega_2^2 / 12 = ml^2 \omega_1^2 / 12$ . Т.е. угловые скорости при 2-м и 1-м прохождении  $C$  через  $D$ :

$$\omega_2 = \omega_1. \quad (5)$$

2). Отметим, что (5) верно при любой начальной угловой скорости  $AB$ .

При плоском движении  $AB$  (для упрощения записи индексы «1» и «2» опускаем):

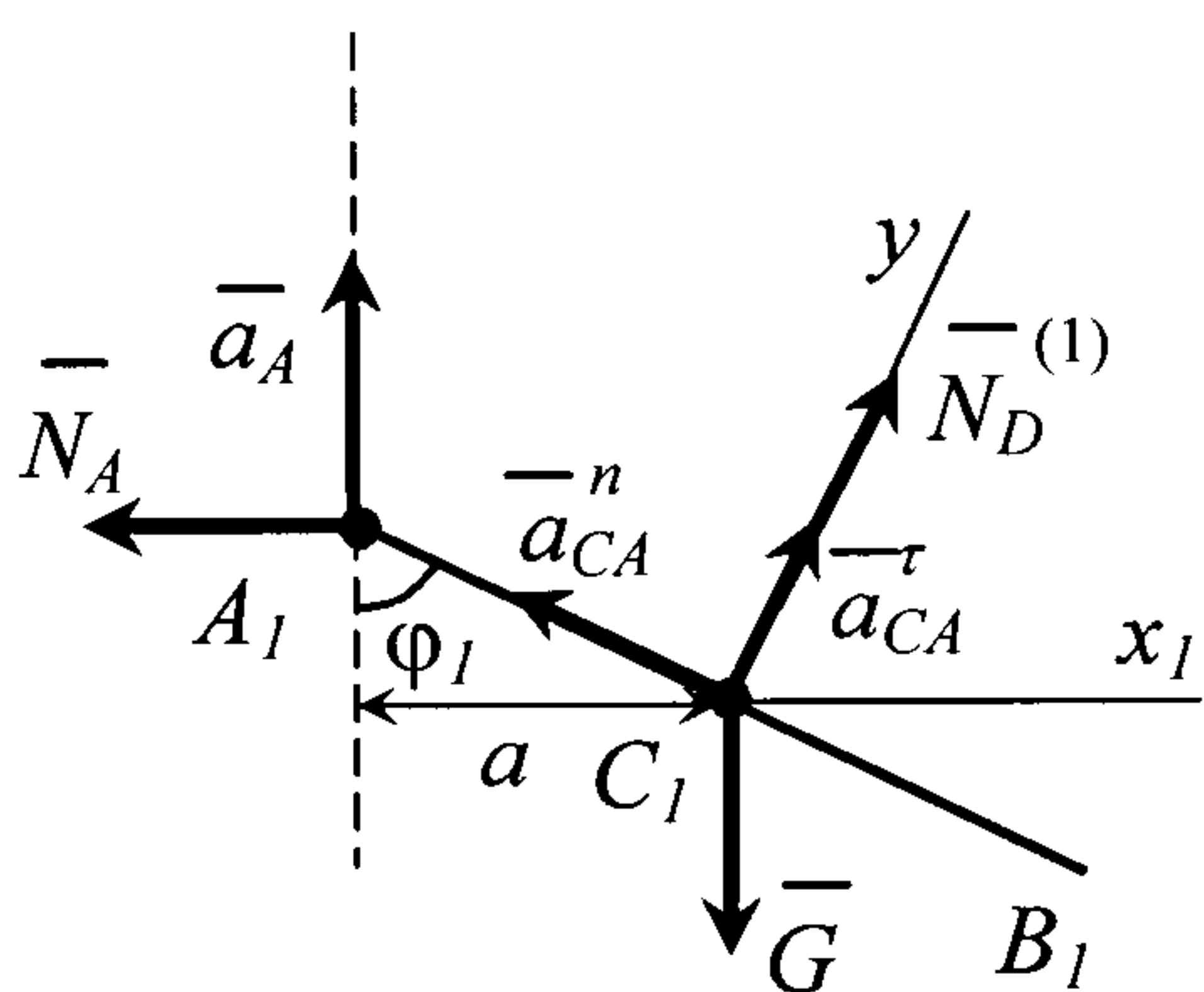


Рис. 15

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^\tau + \bar{a}_{CA}^n. \quad (6)$$

Из  $ma_{Cx_1} = \sum_i F_{ix_1}^e$ , с учетом (6), и  $J_{Cz}\ddot{\phi} = \sum_i M_{Cz}(\bar{F}_i^e)$ , для  $A_1B_1$  получим (рис.15):

$$m(a_{CA}^\tau \cos 60^\circ - a_{CA}^n \cos 30^\circ) = -N_A + N_{D,y} \cos 60^\circ. \quad (7)$$

$$J_{C_1z}\ddot{\phi} = N_A \cdot 0.5l \cos 60^\circ. \quad (8)$$

$a_{CA}^\tau = (l/2)\ddot{\phi}$ ,  $a_{CA}^n = (l/2)\omega^2$ . Из (8):  $N_A = (ml/3)\ddot{\phi}$ . Учитываем в (7), с индексами «1»:

$$m\left((l/4)\ddot{\phi}_1 - (\sqrt{3}l/4)\omega_1^2\right) = -(ml/3)\ddot{\phi}_1 + N_{D,y}^{(1)}/2. \quad (9)$$

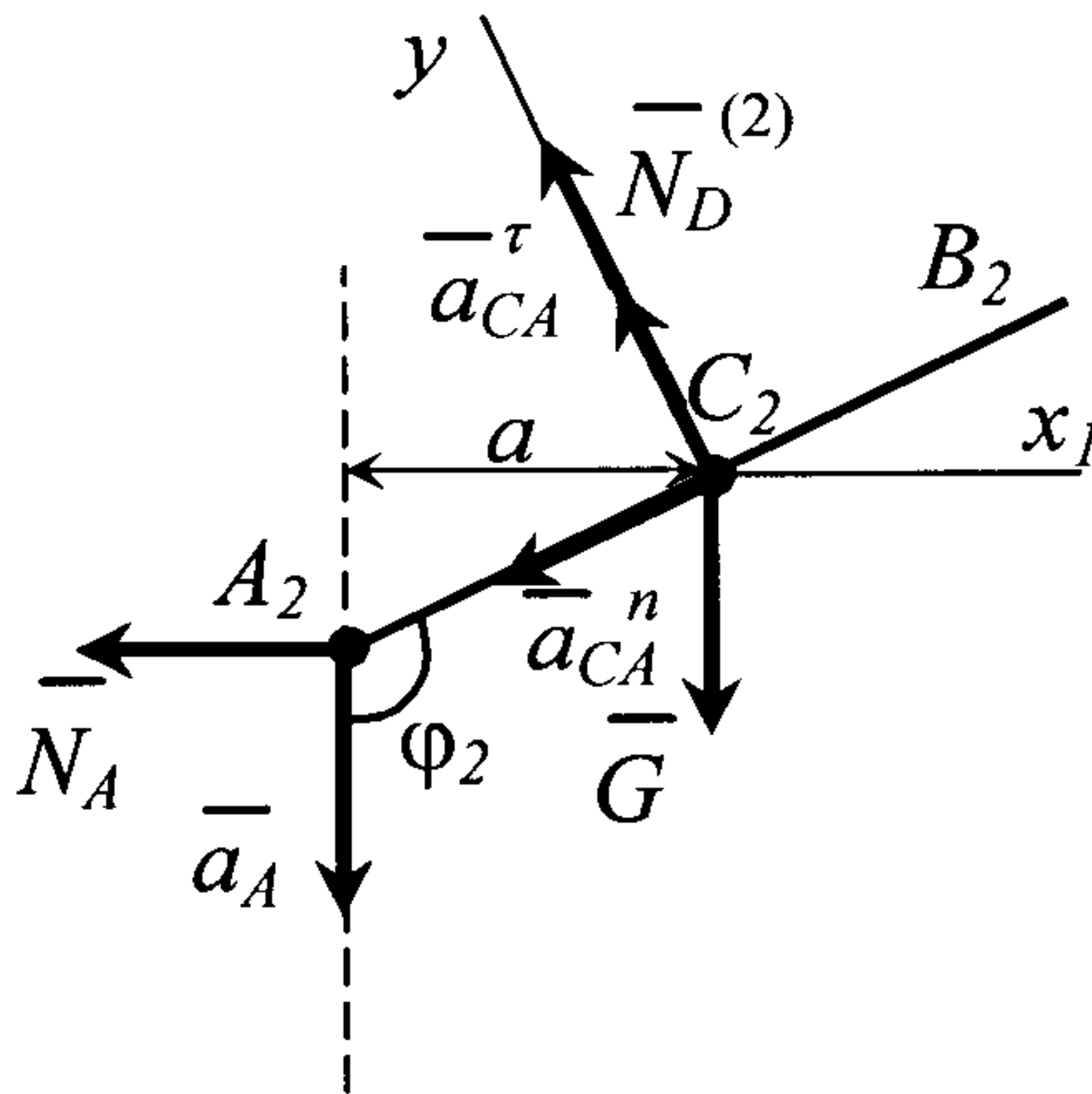


Рис. 16

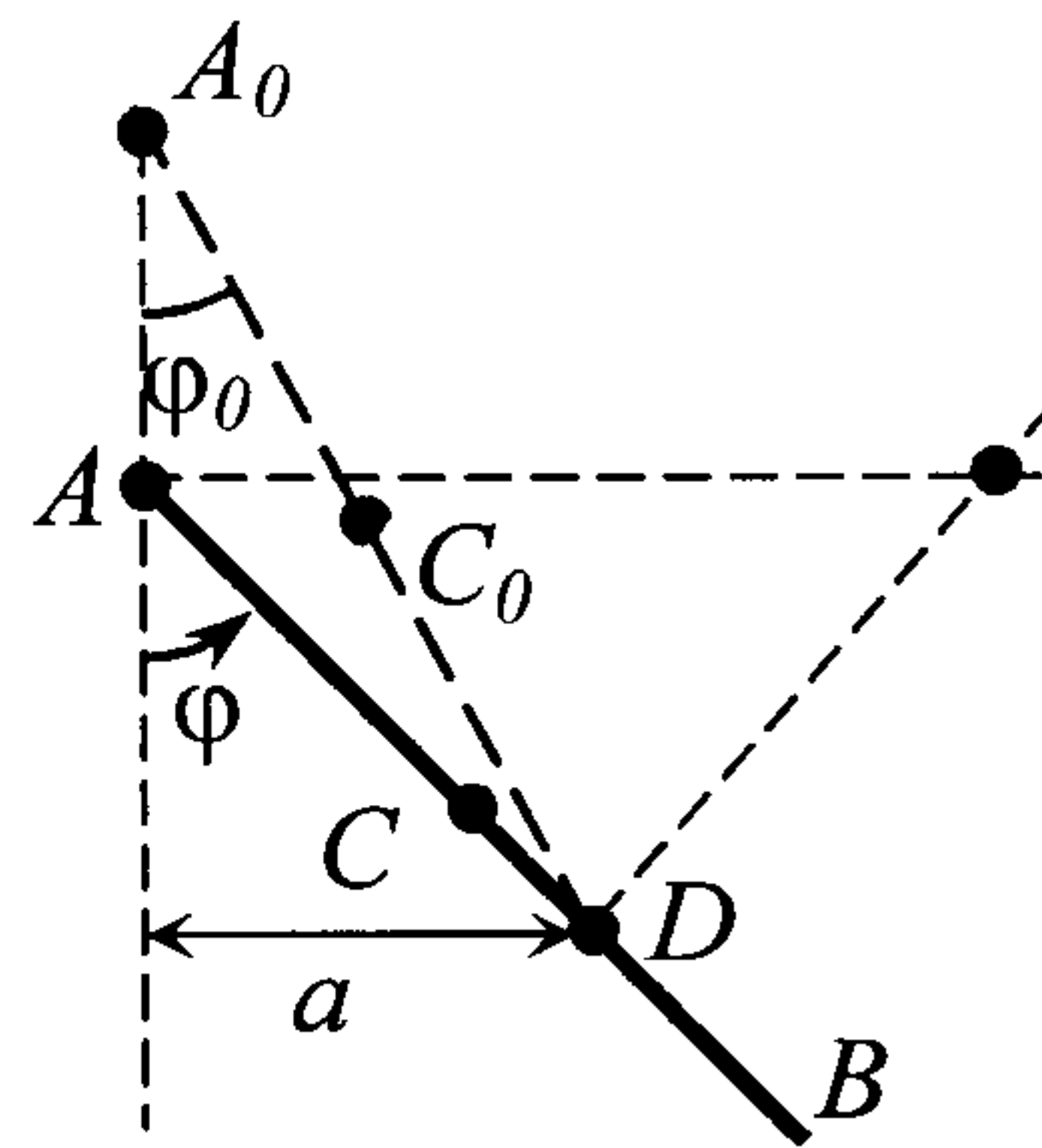


Рис. 17

Схожие соотношения запишем для положения  $A_2B_2$  (рис. 16):

$$m(-a_{CA}^\tau \cos 60^\circ - a_{CA}^n \cos 30^\circ) = -N_A - N_{D,y} \cos 60^\circ. \quad (10)$$

$$J_{C_2z}\ddot{\phi} = -N_A \cdot 0.5l \cos 60^\circ. \quad (11)$$

$$a_{CA}^\tau = (l/2)\ddot{\phi}, \quad a_{CA}^n = (l/2)\omega^2. \quad N_A = -(ml/3)\ddot{\phi}.$$

Из (10), с индексами «2»:

$$m\left(- (l/4)\ddot{\phi}_2 - (\sqrt{3}l/4)\omega_2^2\right) = (ml/3)\ddot{\phi}_2 - N_{D,y}^{(2)}/2. \quad (12)$$

Вычтем (12) из (9). С учетом (5), после сокращений:

$$S = N_{D,y}^{(1)} + N_{D,y}^{(2)} = \frac{7}{6} ml(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2). \quad (13)$$

Найдем  $\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2$ . Рассмотрим произвольное положение  $AB$ , определяемое углом  $\varphi$  (рис. 17).

$$\left( J_{Pz} \omega^2 / 2 \right) - T_0 = A_G. \quad (14)$$

$$CD = AD - AC = \frac{a}{\sin \varphi} - \frac{l}{2} = \left( \frac{\sqrt{3}}{4 \sin \varphi} - \frac{1}{2} \right) l. \quad (15)$$

$$A_G = mg(C_0 D \cos \varphi_0 - CD \cos \varphi) = const + mgl \left( -\frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{2} \cos \varphi \right). \quad (16)$$

Дифференцируем (14) по времени, с учетом (16), и сокращаем  $\dot{\varphi}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{Pz}}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2} J_{Pz} \cdot 2\dot{\varphi} \cdot \ddot{\varphi} &= \frac{dA_G}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}, \\ \frac{dJ_{Pz}}{d\varphi} \cdot \frac{\omega^2}{2} + J_{Pz} \ddot{\varphi} &= mgl \left( \frac{\sqrt{3}}{4 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{2} \sin \varphi \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Запишем (17) при  $\varphi = \varphi_1 = 60^\circ$  и  $\varphi = \varphi_2 = 120^\circ$ :

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_1) \cdot \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{ml^2}{6} \ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{4\sqrt{3}} mgl. \quad (18)$$

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_2) \cdot \frac{\omega_2^2}{2} + \frac{ml^2}{6} \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{4\sqrt{3}} mgl. \quad (19)$$

Рассмотрим функцию  $J_{Pz}(\varphi) = J_{Cz} + m \cdot PC^2$ . Для  $\varphi = \pi/2 - \phi$  и  $\varphi = \pi/2 + \phi$ , где  $\phi$  – произвольный угол, длина  $PC$  одинакова (в силу симметрии относительно горизонтали, проходящей через  $D$ ). Поэтому  $J_{Pz}(\pi/2 - \phi) = J_{Pz}(\pi/2 + \phi)$ , т.е. функция  $J_{Pz}(\varphi)$  симметрична относительно  $\varphi = \pi/2$ . Из геометрического смысла производной:

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\pi/2 - \phi) = -\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\pi/2 + \phi),$$

(см. замечание 6). При  $\phi = \pi/6$ :  $\frac{dJ_{Pz}}{d\phi}(\phi_1) = -\frac{dJ_{Pz}}{d\phi}(\phi_2)$ . Учтя (5), сложим (18) и (19):

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} ml^2(\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) &= \frac{1}{2\sqrt{3}} mgl, \\ ml(\ddot{\phi}_1 + \ddot{\phi}_2) &= \sqrt{3} mg. \end{aligned} \quad (20)$$

Подставив (20) в (13), получим ответ на второй вопрос задачи:

$$S = \frac{7\sqrt{3}}{6} mg.$$

*Замечание 1.* Прокомментируем один принципиально неверный способ решения, использование которого приводит, однако, к верному ответу.

Теорема об изменении кинетического момента системы относительно движущейся точки  $A$  (см., например, Н.Н.Никитин. Курс теоретической механики. 5-е изд. 1990, стр.311):

$$\frac{d\bar{K}_A}{dt} = M\bar{v}_C \times \bar{v}_A + \sum_i \bar{M}_A(\bar{F}_i^e).$$

выбрать МЦС:

$$\frac{d\bar{K}_P}{dt} = M\bar{v}_C \times \bar{v}_P + \sum_i \bar{M}_P(\bar{F}_i^e).$$

В ряде олимпиадных задач используется частный случай этой теоремы, когда  $\bar{v}_C \times \bar{v}_P = 0$ :

$$\frac{dK_{Pz}}{dt} = \sum_i M_{Pz}(\bar{F}_i^e). \quad (21)$$

Соотношение (21) верно, если в данный момент времени система находится в покое, либо  $\bar{v}_C \parallel \bar{v}_P$  (например, в задачах о движении стержня, два конца которого опираются на вертикальную и горизонтальную плоскости, а также в задачах о качении диска по плоскости без проскальзывания).

Однако в данной задаче  $\bar{v}_C, \bar{v}_P$  не параллельны. Поэтому применять (21) для определения  $\ddot{\varphi}_{(1)}, \ddot{\varphi}_{(2)}$  нельзя. Ошибочное использование (21) применительно к данной задаче выглядит так.

$$\frac{dK_{Pz}}{dt} = \frac{dJ_{Pz}}{dt} \cdot \dot{\varphi} + J_{Pz} \ddot{\varphi} = \frac{dJ_{Pz}}{d\varphi} \dot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} + J_{Pz} \ddot{\varphi} \quad (\text{это верная запись}).$$

$$\varphi = \varphi_1 = 60^\circ: \sum_i M_{P_{1z}}(\bar{F}_i^e) = M_{P_{1z}}(\bar{G}) = G \cdot C_1 P_1 \cos 60^\circ = mgl / (4\sqrt{3}) \quad (\text{это}$$

верно). Однако при подстановке в (21) будет ошибка:

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_1) \cdot \omega_1^2 + \frac{ml^2}{6} \ddot{\varphi}_1 = \frac{1}{4\sqrt{3}} mgl,$$

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_2) \cdot \omega_2^2 + \frac{ml^2}{6} \ddot{\varphi}_2 = \frac{1}{4\sqrt{3}} mgl.$$

Это очень похоже на (18), (19), но неверно: отсутствуют коэффициенты  $1/2$  в первых слагаемых. Заметим, что при сложении этих двух ошибочных соотношений получится верная запись (20).

*Замечание 2.* Условие о том, что начальная угловая скорость стержня  $AB$  направлена против часовой стрелки, введено для того, чтобы задача имела смысл. Иначе, если бы начальная угловая скорость была по часовой стрелке, то контакт стержня  $AB$  с муфтой был бы сразу утрачен.

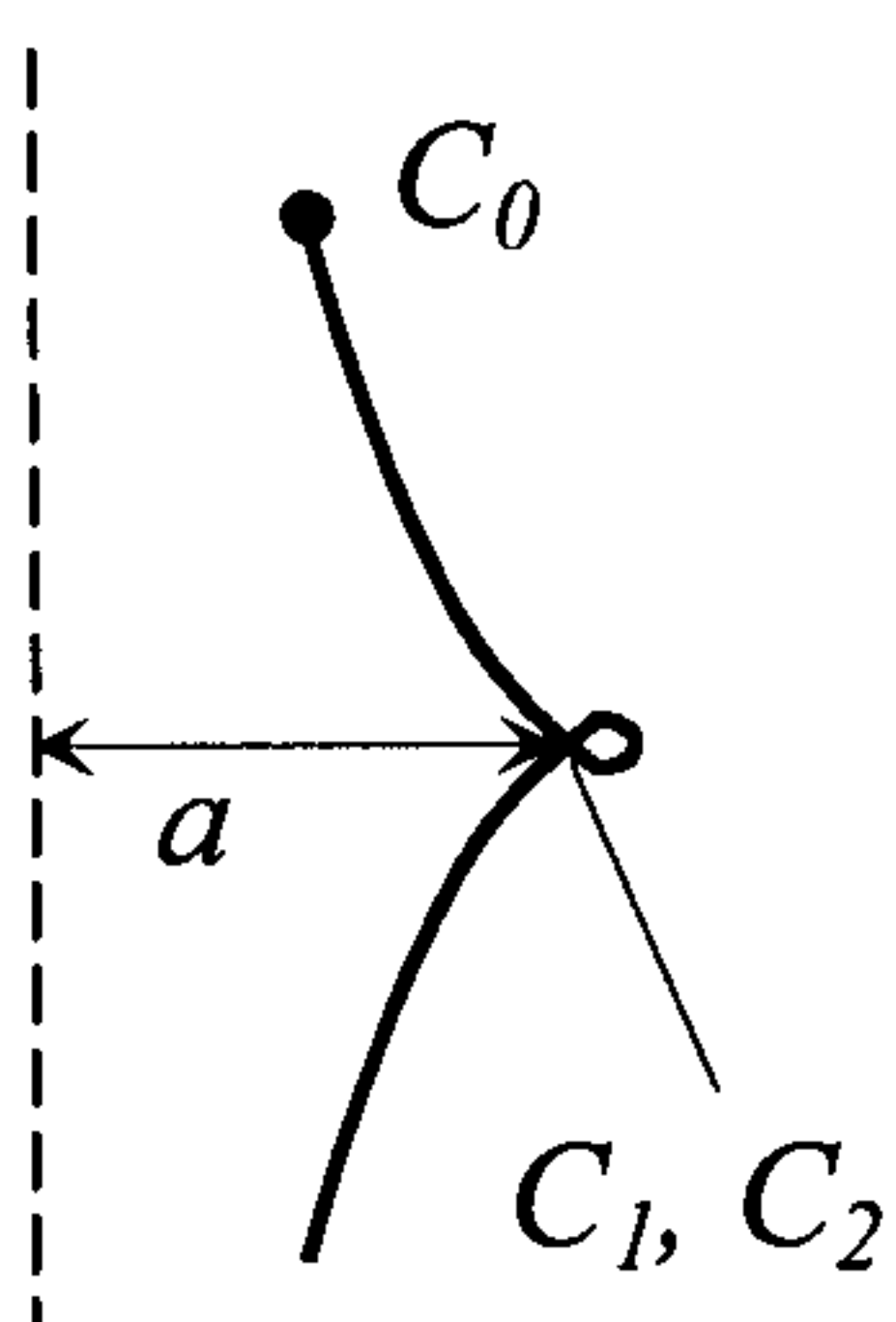


Рис. 18

*Замечание 3.* Траектория точки  $C$  имеет форму петли (рис. 18). Несложно проверить, что начальное положение  $C_0$  является наиболее высоким из всех возможных положений точки  $C$  во время движения. Поэтому для любого положения точки  $C$  после начала движения имеет место строгое неравенство:  $A_G > 0$ . Значит, и  $T > 0$ ,  $\omega^2 > 0$ . Т.е. при  $t > 0$  исключена возможность  $\omega = 0$ . Значит, направление угловой скорости стержня все время будет таким же, как и вначале, т.е. против часовой стрелки. (Колебательное движение стержня тем самым исключено.) После 1-го прохождения точки

же, как и вначале, т.е. против часовой стрелки. (Колебательное движение стержня тем самым исключено.) После 1-го прохождения точки



С через  $D$ :  $A_G > const > 0$ . Поэтому  $\omega > const > 0$ . Поэтому 2-е прохождение точки  $C$  через  $D$  спустя некоторое конечное время неизбежно произойдет, причем положение стержня при этом будет именно таким, как на рис. 16.

*Замечание 4.* В решении удалось обойтись без записывания ДУ плоского движения  $ma_{Cy_1} = \sum_i F_{iy_1}^e$  (где  $y_1$  перпендикулярна  $x_1$ ), которое содержит неизвестное ускорение  $a_A$ .

*Замечание 5.* В соотношениях  $a_{CA}^r = (l/2)\ddot{\varphi}$  для положений  $A_1B_1$  и  $A_2B_2$  брался знак «плюс» в правых частях, так как направления векторов  $\bar{a}_{CA}^r$  были выбраны на рис. 15, 16 в соответствии с положительным направлением отсчета угла  $\varphi$ .

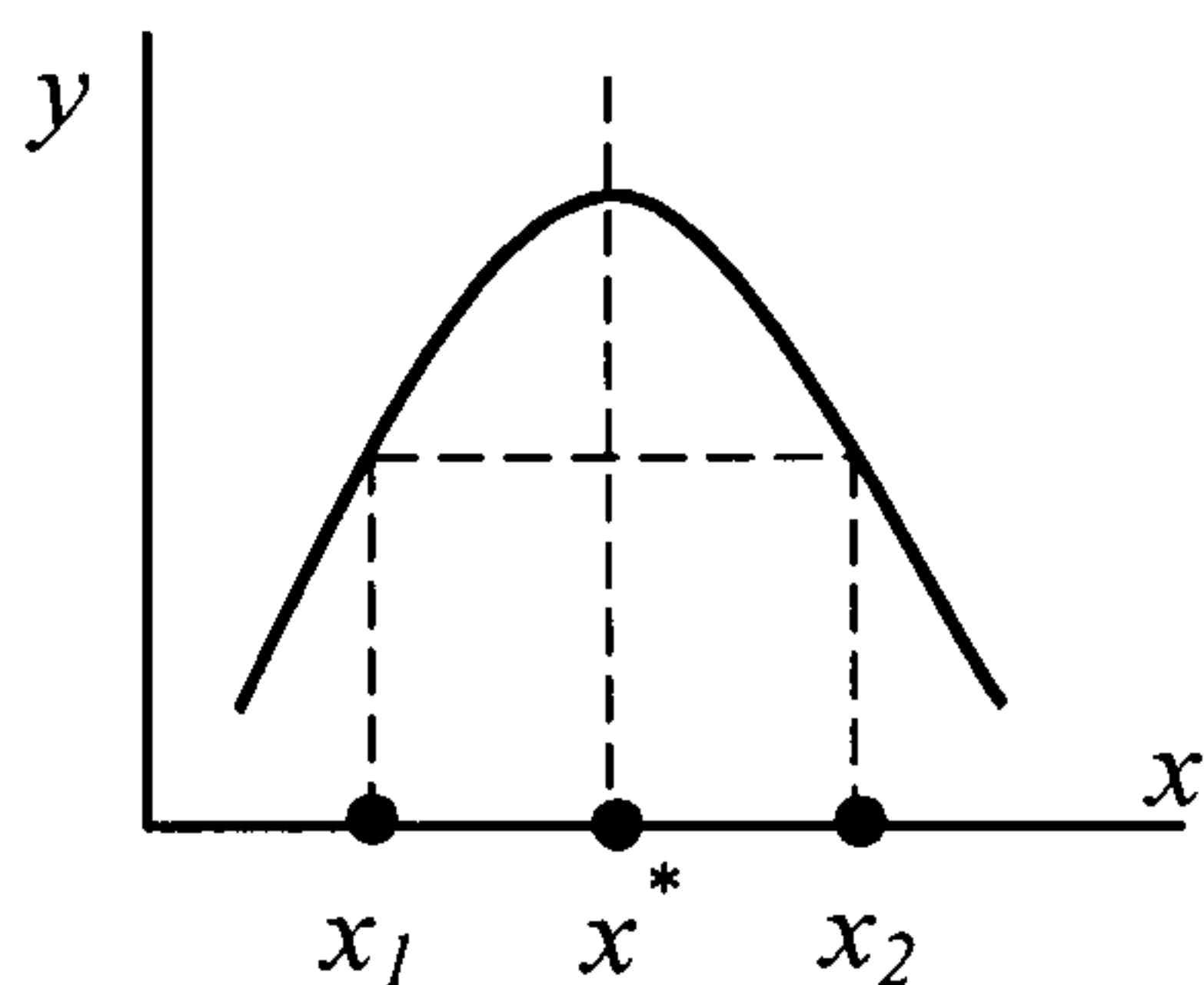


Рис. 19

*Замечание 6.* На рис. 19 изображен график произвольной функции  $y = f(x)$ , симметричной относительно  $x = x^*$ . Для значений  $x_1 = x^* - a$ ,  $x_2 = x^* + a$  тангенсы углов наклона касательных отличаются знаком, поэтому  $\frac{df}{dx}(x_1) = -\frac{df}{dx}(x_2)$ . Таким свойством обладает функция  $J_{Pz}(\varphi)$ . Поэтому

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_1) = -\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi}(\varphi_2).$$

Если этого свойства не заметить, то решение загромождается. При этом получится:

$$J_{Pz}(\varphi) = \left[ \frac{1}{12} + \frac{3 \cos^2 \varphi}{16 \sin^4 \varphi} + \left( \frac{\sqrt{3}}{4 \sin \varphi} - \frac{1}{2} \right)^2 \right] ml^2.$$

$$\frac{dJ_{Pz}}{d\varphi} = \left[ -\frac{3(\sin^2 \varphi \cos \varphi + 2 \cos^3 \varphi)}{8 \sin^5 \varphi} - \left( \frac{\sqrt{3}}{2 \sin \varphi} - 1 \right) \frac{\sqrt{3} \cos \varphi}{4 \sin^2 \varphi} \right] ml^2.$$

Тогда из (18), (19) можно получить:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{\sqrt{3}g}{2l} + \frac{5}{2\sqrt{3}}\omega_1^2, \quad \ddot{\varphi}_2 = \frac{\sqrt{3}g}{2l} - \frac{5}{2\sqrt{3}}\omega_2^2.$$

Вторые слагаемые в выражениях для  $\ddot{\varphi}_1$  и  $\ddot{\varphi}_2$  сокращаются при их сложении в (20).

Добавим, что если находить  $N_{D,y}^{(1)}$ ,  $N_{D,y}^{(2)}$  по отдельности, то можно получить:

$$\begin{aligned} N_{D,y}^{(1)} &= ml \left( \frac{7}{6} \ddot{\varphi}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_1^2 \right) = \frac{m}{12\sqrt{3}} (21g + 17l\omega_1^2), \\ N_{D,y}^{(2)} &= ml \left( \frac{7}{6} \ddot{\varphi}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_2^2 \right) = \frac{m}{12\sqrt{3}} (21g - 17l\omega_2^2). \end{aligned} \quad (22)$$

*Замечание 7.* Очевидно,  $N_{D,y}^{(1)} > 0$ . Минимальная  $\omega_2 = \omega_1$ , очевидно, достигается, если  $AB$  вначале был в покое. Тогда, с учетом (4), из (22):

$$N_{D,y}^{(2)} = \frac{14 - 17\sqrt{13}}{8\sqrt{3}} mg < 0.$$

При ненулевой начальной угловой скорости, очевидно,  $\omega$  будет больше. Поэтому тем более будет  $N_{D,y}^{(2)} < 0$ , т.е. на самом деле  $\bar{N}_D^{(2)}$  противоположен оси  $y$ . (В основном решении заранее установить этот факт без дополнительных исследований не представлялось возможным.) Отсюда величина

$$S = N_{D,y}^{(1)} + N_{D,y}^{(2)} = N_D^{(1)} - N_D^{(2)}$$

представляет собой разность модулей реакций муфты при 1-м и 2-м прохождении  $C$  через  $D$ , т.е. отражает различие величин  $N_D$  в этих двух случаях. В задаче показано, что эта разность не равна нулю (как это может показаться из-за некоей симметрии двух положений и оди-

наковых угловых скоростей). Кроме того, показано, что эта разность не зависит от начальной угловой скорости.

*Замечание 8.* Более длинное решение получается при использовании только геометрического подхода. При этом нужно решать систему алгебраических уравнений относительно пяти неизвестных  $a_A$ ,  $a_r$ ,  $\ddot{\phi}$ ,  $N_A$ ,  $N_D$ . Это три ДУ плоского движения (24), (33), (25) и два кинематических соотношения (проекция на оси координат (29), (31) равенства (28) двух представлений  $\bar{a}_C$ ).

*Ответ.* 1).  $\omega_1 = \sqrt{\frac{3\sqrt{13}}{2} \frac{g}{l}}$ . 2).  $S = \frac{7\sqrt{3}}{6} mg$ .