Всероссийская студенческая олимпиада
по теоретической механике, КНИТУ, 3-7 декабря 2014 г.

Решения задач компьютерного конкурса

Авторы задач:
– доцент каф. ТМ и СМ КНИТУ Муштари Айрат Ильдарович (условия задач, уравнения, программирование, оформление);
– доцент каф. аэрогидродинамики КФУ Марданов Ренат Фаритович (уравнения, программирование).

Решение задачи 1.

***1.1.** 1 способ.*

Обозначим угол поворота полудиска *1* через φ (рис. 1). Движение тела *1* описывается дифференциальным уравнением вращения твердого тела вокруг неподвижной оси O_1. Распределенная нормальная сила реакции со стороны поверхности полости не создает момента относительно точки O_1.. С учетом этого:

$$J_z\ddot{\varphi} = Gl\cos\varphi .$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{mgl}{J_z}\cos\varphi . \qquad (1)$$

Начальные условия: $\varphi(0)=0$, $\dot{\varphi}(0)=0$. Искомый момент $t=\tau$ реализуется при условии $\varphi(\tau)=\pi/3$.

Для численного решения ДУ (1) можно использовать, например, метод Рунге-Кутта с шагом по времени $h=10^{-6}$ с. Вычисления прекращаются, как только в программе реализуется $\varphi \geq \pi/3$.

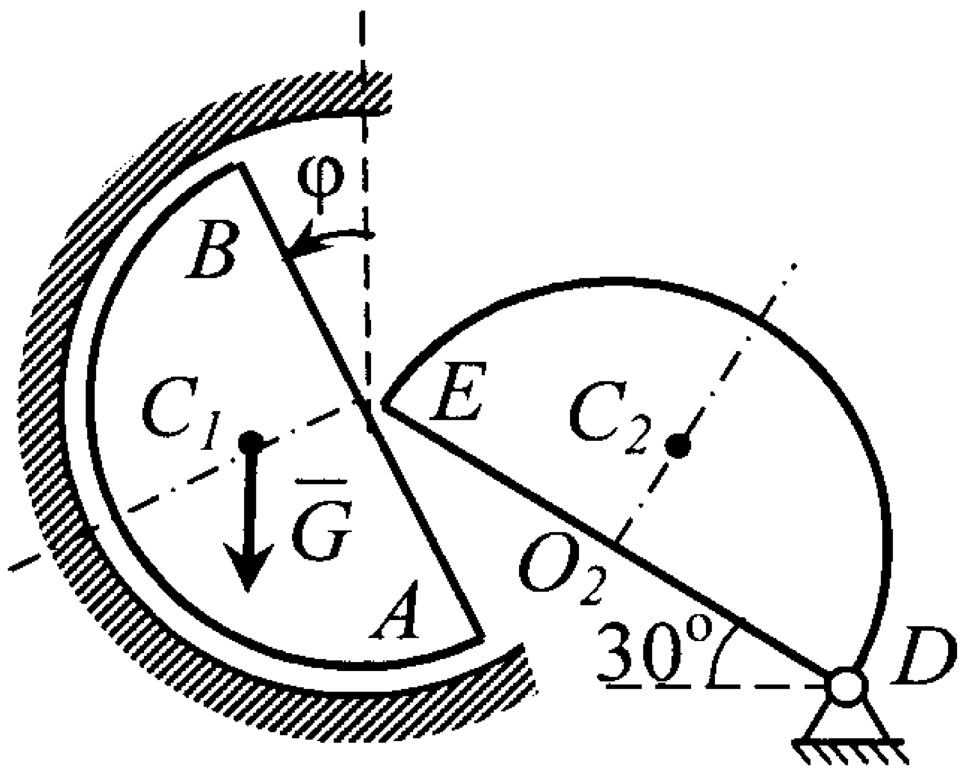

Рис. 1

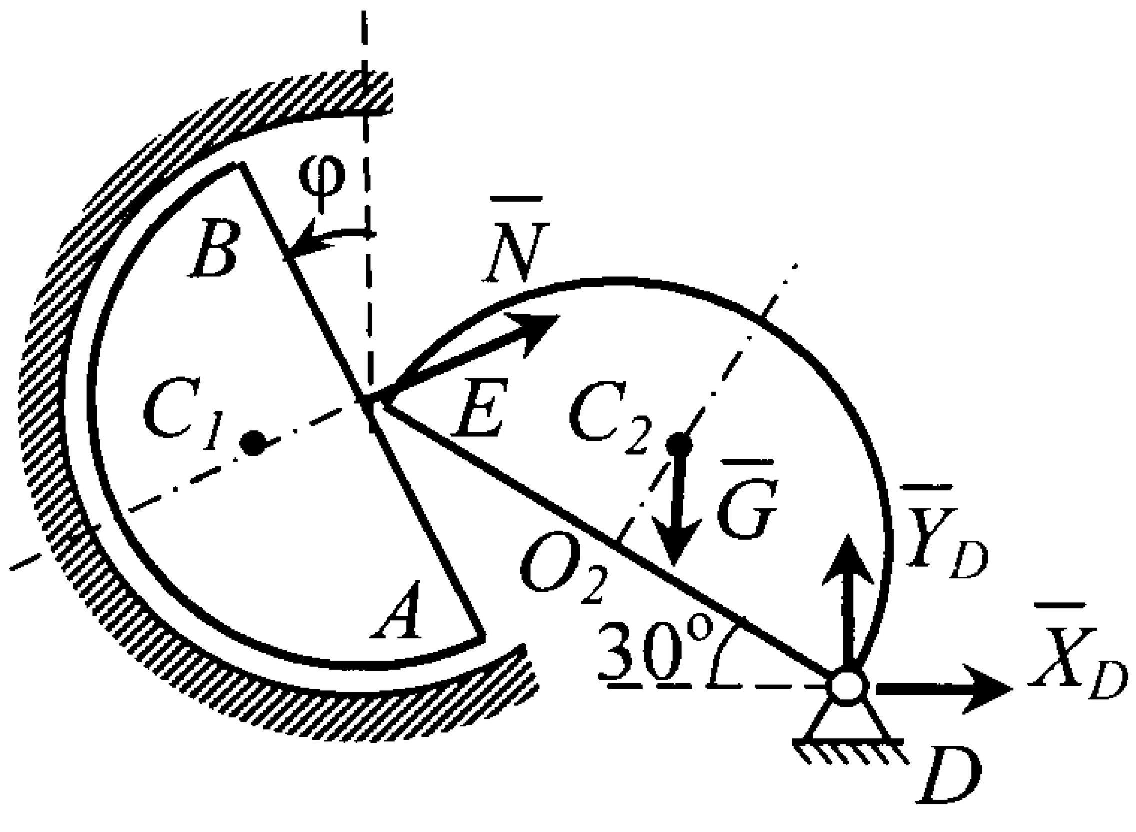

Рис. 2

2 способ.

Теорема об изменении кинетической энергии:

$$\frac{J_z\dot{\varphi}^2}{2} = mgl\sin\varphi\,. \tag{2}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\sqrt{\sin\varphi}\,,\;\; A = \sqrt{\frac{2mgl}{J_z}}\,. \tag{3}$$

ДУ (2) решается численно при начальном условии $\varphi(0) = 0$.

Можно также свести задачу к вычислению определенного интеграла. Из (3):

$$dt = \frac{d\varphi}{A\sqrt{\sin\varphi}}\,.$$

$$\tau = \frac{1}{A}\int_0^{\pi/3}\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}\,.$$

Этот интеграл, несмотря на его слабую сингулярность (при $\varphi \to 0$ подынтегральная функция стремится к бесконечности), можно с приемлемой точностью вычислить численно, например, по формуле правых прямоугольников с шагом интегрирования $h_\varphi = 10^{-8}$.

Для определения $N_{(\tau/2)}$ достаточно записать одно уравнение равновесия тела *2* (рис. 2):

$$\sum_k M_D(\overline{F}_k) = G\cos 30^o R - G\sin 30^o l - N\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right)2R = 0\,.$$

$$N = \frac{\sqrt{3}R - l}{4R\sin(\varphi + (\pi/6))}mg\,.$$

Подставляем сюда значение φ, соответствующее значению $t = \tau/2$ (значение τ определено ранее).

Приведем пример вычислений. При $l = 0.2$ м получим: $\tau = 0.4712$ с, $N_{(\tau/2)} = 45.723$ Н.

1.2. Угловая скорость тела *1*: $\omega_1(t) = d\varphi / dt$. Величину ω_1 удобнее вычислить не аналитически, а используя в программе разностное отношение согласно определению производной:

$$\omega_1(t) \approx \big(\varphi(t+h) - \varphi(t)\big) / h,$$

где h – малое приращение времени, например, $h = 10^{-6}$ с.

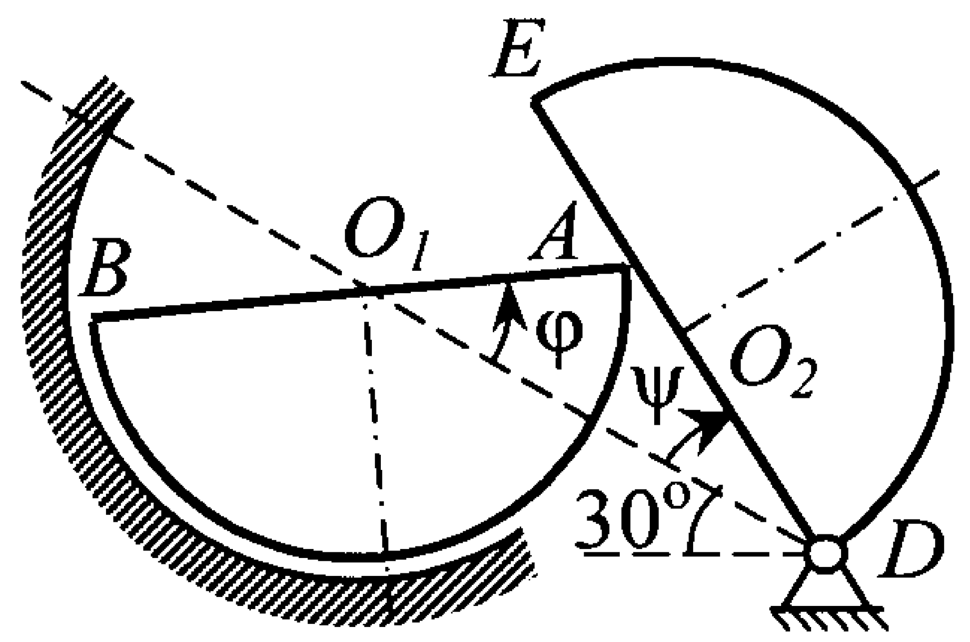

Рис. 3

Обозначим через ψ угол между DO_1 и DO_2, отсчитываемый по часовой стрелке (рис. 3). Рассмотрим треугольник DO_1A. По теореме синусов:

$$\frac{\sin\phi}{O_1A} = \frac{\sin\angle O_1AD}{O_1D}.$$

$$\frac{\sin\phi}{R} = \frac{\sin(\pi - (\varphi + \phi))}{2R}.$$

$$2\sin\phi - \sin(\varphi + \phi) = 0.$$

$$2\sin\phi - \sin\varphi\cos\phi - \cos\varphi\sin\phi = 0.$$

$$(2 - \cos\varphi)\sin\phi = \sin\varphi\cos\phi.$$

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \frac{\sin\varphi}{2 - \cos\varphi}.$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\varphi}{2 - \cos\varphi}\right),$$

где выражение $\varphi = \varphi(t)$ задано в условии задачи.

Выразить ϕ через φ возможно другим способом:

$$\frac{\sin\phi}{O_1A} = \frac{\sin\varphi}{AD},$$

где по теореме косинусов:

$$AD = \sqrt{R^2 + (2R)^2 - 2\cdot R\cdot 2R\cdot\cos\varphi} = R\sqrt{5 - 4\cos\varphi}.$$

Отсюда

$$\sin\phi = \frac{R}{R\sqrt{5 - 4\cos\varphi}}\sin\varphi.$$

$$\phi = \arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{5-4\cos\varphi}}\right).$$

С учетом $\dot{\phi}(t) = d\phi/dt$, $\ddot{\phi}(t) = d\dot{\phi}/dt$, угловые скорость и ускорения тела *2* находятся в программе численно как разностные отношения:

$$\dot{\phi}(t) \approx \big(\phi(t+h) - \phi(t)\big)/h, \quad \ddot{\phi}(t) \approx \big(\dot{\phi}(t+h) - \dot{\phi}(t)\big)/h.$$

Так как по условию задачи положительным считается направление против часовой стрелки, то нужно поменять знаки:

$$\omega_2(t) = -\dot{\phi}(t), \quad \varepsilon_2(t) = -\ddot{\phi}(t).$$

Заметим, что при желании можно получить и аналитические выражения для $\dot{\phi}(t)$, $\ddot{\phi}(t)$. Однако в рамках компьютерного конкурса это нецелесообразно из-за увеличения расхода времени при их выводе и реализации в программе, а также из-за вероятности появления ошибки в расчетах. Приведем эти выражения без вывода:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\cos(\varphi+\phi)\cdot\dot{\varphi}}{2\cos\phi - \cos(\varphi+\phi)}.$$

$$\ddot{\phi}(t) = \frac{\cos(\varphi+\phi)\cdot\ddot{\varphi} + 2\sin\phi\cdot\dot{\phi}^2 - \sin(\varphi+\phi)\cdot(\dot{\varphi}+\dot{\phi})^2}{2\cos\phi - \cos(\varphi+\phi)}.$$

Приведем пример вычислений. При $t = 0.9$ с получим $\omega_1 = 2.3429$ рад/с, $\omega_2 = 0.2857$ рад/с, $\varepsilon_2 = 2.260$ рад/с^2.

Решение задачи 2.

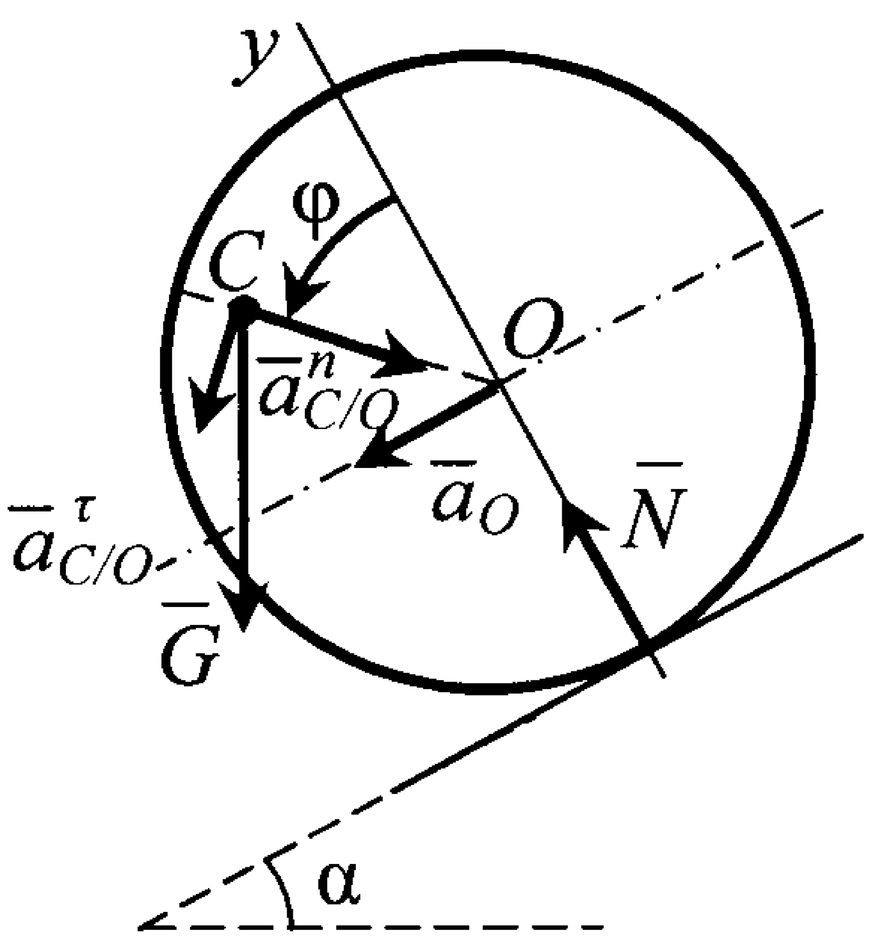

Рис. 4

1 способ. Вначале приведем менее трудоемкий способ получения уравнения скольжения тела по плоскости, который, однако, имеет меньшую точность при численном моделировании.

Введем ось *y*, перпендикулярную наклонной плоскости. Считаем, что $y = 0$ в точке пересечения оси y с этой плоскости. Будем отсчитывать угол φ поворота кольца от оси y против часовой стрелки.

Действующие на кольцо силы указаны на рис. 4. Для решения задачи достаточно записать два из трех дифференциальных уравнений плоскопараллельного движения кольца:

$$Ma_{C,y} = N - G\cos\alpha\,, \qquad (1)$$

$$J_{Cz}\varepsilon_z = Nl\sin\varphi\,, \qquad (2)$$

где M – его масса, ось z перпендикулярна плоскости рисунка. Момент инерции тонкого кольца относительно его геометрического центра равен $J_{Oz} = MR^2$, независимо от того, однородное кольцо или неоднородное. По теореме Гюйгенса-Штейнера: $J_{Oz} = J_{Cz} + Ml^2$. Отсюда:

$$J_{Cz} = M(R^2 - l^2)\,.$$

По теореме о сложении ускорений:

$$\overline{a}_C = \overline{a}_O + \overline{a}^{\tau}_{C/O} + \overline{a}^{n}_{C/O}\,.$$

Проецируем на ось y:

$$a_{C,y} = -a^{\tau}_{C/O}\sin\varphi - a^{n}_{C/O}\cos\varphi\,.$$

Выразим значение нормальной реакции N из (1) и подставим выражения для компонент ускорений:

$$N = Ma_{C,y} + Mg\cos\alpha = M(-l\ddot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi + g\cos\alpha)\,. \qquad (3)$$

Подставим (3) в (2):

$$(R^2 - l^2)\ddot{\varphi} = \left(-l\ddot{\varphi}\sin\varphi - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi + g\cos\alpha\right)l\sin\varphi\,.$$

Выражаем отсюда $\ddot{\varphi}$:

$$[(R^2 - l^2) + l^2\sin^2\varphi]\ddot{\varphi} = (g\cos\alpha - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\,l\sin\varphi\,.$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{(g\cos\alpha - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi)l\sin\varphi}{R^2 - l^2\cos^2\varphi}\,. \qquad (4)$$

Решаем ДУ 2-го порядка (4) при начальных условиях:

$$\varphi(0) = \pi/2\,,\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0\,.$$

При этом на каждом шаге численного метода необходимо проверять условие $N > 0$, используя формулу (3), в которую надо подставить (4).

В момент t_1, когда перестает выполняться $N > 0$, кольцо отрывается от плоскости. Обозначим для удобства соответствующие значения угла поворота и угловой скорости через φ_1 и ω_1 (равное $\dot{\varphi}(t_1)$).

После отрыва будет $N=0$ и, в силу $J_{Cz}\varepsilon_z = M_{Cz}(\overline{G})=0$ (закон сохранения кинетического момента), в течение всего времени движения кольца выше наклонной плоскости, т.е. при полете, будет $\dot{\varphi}(t)=\omega_1$.

Во время полета выполняется закон равномерного вращения кольца:

$$\varphi = \varphi_1 + \omega_1(t-t_1) = \varphi_1 + \omega_1\tau\,, \qquad (5)$$

где τ – время, отсчитываемое с момента отрыва.

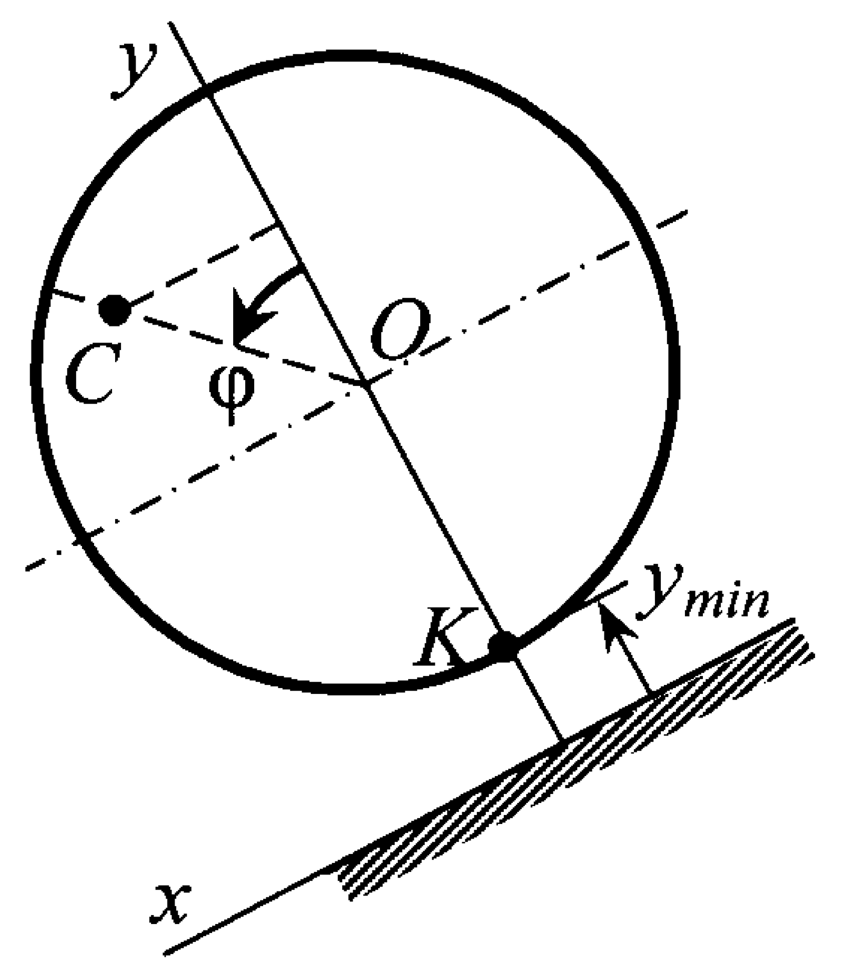

Рис. 5

Кольцо ударится о наклонную плоскость в момент, когда координата $y_{\min}$ наиболее близкой в текущий момент к плоскости точки K окажется равной 0 (рис. 5). Геометрическая связь между y_{min} и координатой y_C:

$$y_{\min} = y_C - l\cos\varphi - R\,. \qquad (6)$$

Для определения $y_C(t)$ применим теорему о движении центра масс в проекции на ось y:

$$M\ddot{y}_C = -G\cos\alpha\,.$$

$$\ddot{y}_C = -g\cos\alpha\,. \qquad (7)$$

Для решения (7) надо определить начальные условия (при отрыве). Вплоть до момента отрыва $y_C = l\cos\varphi + R$, откуда $\dot{y}_C = -l\dot{\varphi}\sin\varphi$. Поэтому в начале полета:

$$y_1 = y_C(t_1) = l\cos\varphi_1 + R\,, \quad v_{1y} = \dot{y}_C(t_1) = -l\omega_1\sin\varphi_1\,. \qquad (8)$$

Для удобства записи перейдем к переменной $\tau = t - t_1$. Тогда начальные условия (8) соответствуют моменту $\tau = 0$. Интегрируем (7) при этих начальных условиях:

$$\frac{d\dot{y}_C}{d\tau} = -g\cos\alpha\,.$$

$$\dot{y}_C = -g\tau\cos\alpha + v_{1y}\,. \qquad (9)$$

$$\frac{dy_C}{d\tau} = -g\tau\cos\alpha + v_{1y}\,.$$

$$y_C = -\frac{g\tau^2}{2}\cos\alpha + v_{1y}\tau + y_1. \qquad (10)$$

Учитываем в (6) соотношения (10):

$$y_{\min} = -\frac{g\tau^2}{2}\cos\alpha + v_{1y}\tau + y_1 - l\cos\varphi - R,$$

или, с учетом (5), (8):

$$y_{\min} = -\frac{g(t-t_1)^2}{2}\cos\alpha - l\omega_1(t-t_1)\sin\varphi_1 + l\cos\varphi_1 - l\cos(\varphi_1 + \omega(t-t_1)).$$

Итак, при $y_{\min} = 0$ кольцо ударяется об абсолютно неупругую плоскость. Этот момент времени обозначим через t_2. При этом из (5):

$$\varphi_2 = \varphi(t_2) = \varphi_1 + \omega_1(t_2 - t_1).$$

Теорема об изменении количества движения системы при ударе в проекции на ось y:

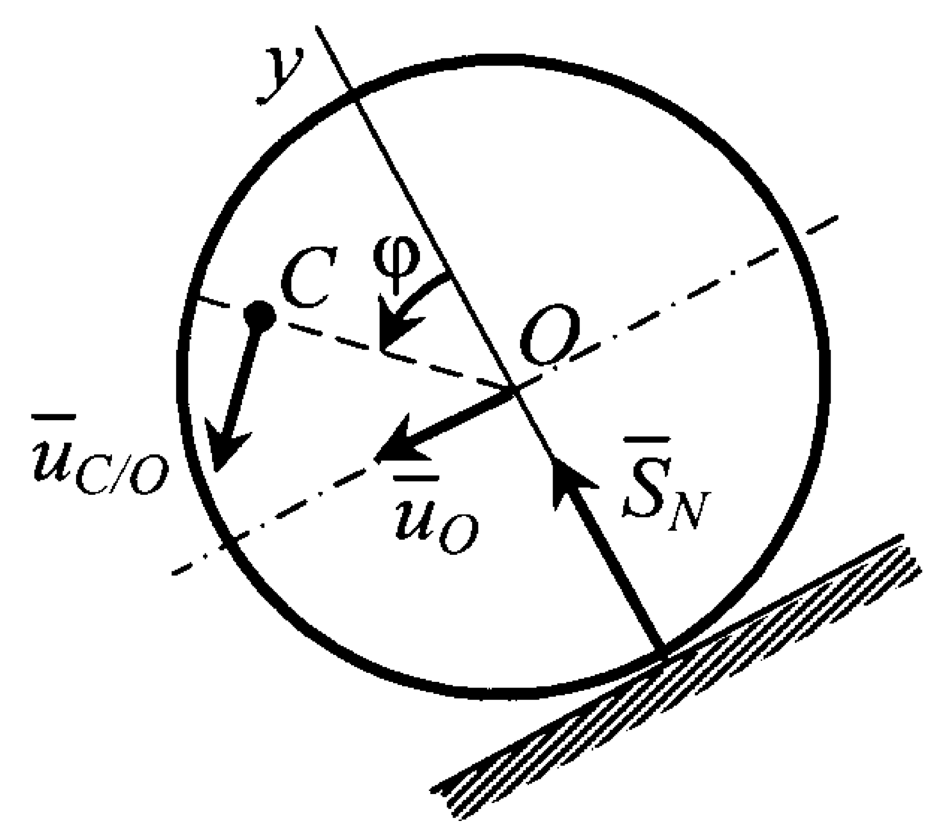

Рис. 6

$$Mu_{C,y} - Mv_{C,y} = S_N, \qquad (11)$$

где S_N – импульс ударной силы реакции со стороны плоскости (рис. 6). Из (9) вычисляется проекция скорости перед ударом:

$$v_{C,y} = \dot{y}_C(t_2) = -g(t_2 - t_1)\cos\alpha - l\omega_1\sin\varphi_1. \quad (12)$$

Сразу после удара об абсолютно неупругую плоскость кольцо не отскакивает, то есть скорость точки O после удара вдоль y: $u_{O,y} = 0$. При этом по теореме о сложении скоростей при плоскопараллельном движении:

$$\overline{u}_C = \overline{u}_O + \overline{u}_{C/O}. \qquad (13)$$

Здесь $u_{C/O} = l\omega_2$, где ω_2 – угловая скорость кольца сразу после удара. Проецируем (13) на ось y:

$$u_{C,y} = -u_{C/0}\sin\varphi_2 = -l\omega_2\sin\varphi_2. \qquad (14)$$

Подставим (14) в (11):

$$S_N = -M(l\sin\varphi_2)\omega_2 - Mv_{C,y}. \qquad (15)$$

Теорема об изменении кинетического момента при ударе:

$$K_{Cz,2} - K_{Cz,1} = M_C(\bar{S}_N)\,.$$

$$J_{Cz}\omega_2 - J_{Cz}\omega_1 = S_N l \sin\varphi_2\,. \qquad (16)$$

Соотношения (15) и (16) образуют систему двух линейных уравнений относительно ω_2 и S_N. Подставим (15) в (16):

$$J_{Cz}\omega_2 - J_{Cz}\omega_1 = -\big(M(l\sin\varphi_2)\omega_2 + Mv_{C,y}\big)l\sin\varphi_2\,.$$

$$\left[M(R^2 - l^2) + Ml^2\sin^2\varphi_2\right]\omega_2 + Mlv_{C,y}\sin\varphi_2 = J_{Cz}\omega_1\,.$$

$$\omega_2 = \frac{(R^2 - l^2)\omega_1 - lv_{C,y}\sin\varphi_2}{R^2 - l^2\cos^2\varphi_2}\,, \qquad (17)$$

где $v_{C,y}$ вычисляется из (9).

Заметим, что в программе может быть удобнее решать систему (15), (16) с помощью определителей (по правилу Крамера), так как при этом уменьшается вероятность ошибки в алгебраических преобразованиях.

После этого в программе следует переход к проверке условия $N > 0$ с использованием (3) и дальнейшему решению ДУ (4) при условиях $\varphi(t_2) = \varphi_2$, $\dot{\varphi}(t_2) = \omega_2$. В случае невыполнения $N > 0$ вновь будет отрыв, и так далее. Третий из трех моментов времени, указанных в тестах, соответствует этому участку движения кольца.

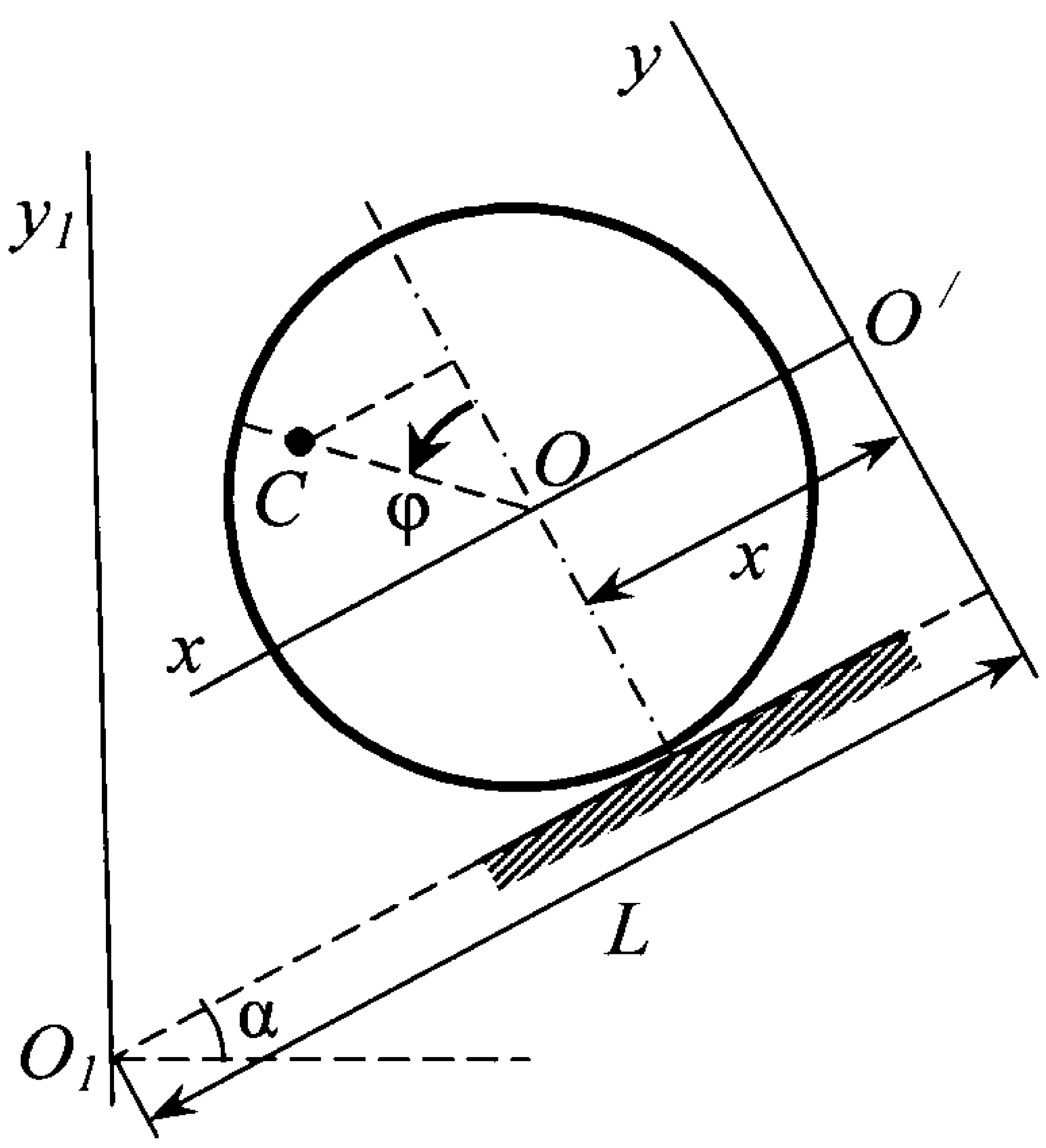

Рис. 7

2 способ. Приведенный ниже способ получения ДУ на участке скольжения хотя и более трудоемок, но позволяет получить гораздо более точные численные решения, так как полученное ДУ имеет 1-й порядок, т.е. меньший по сравнению с ДУ (4).

Введем неподвижную систему координат $O'xy$ (рис. 7). Координаты и скорость центра масс C относительно нее:

$$x_C = x + l\sin\varphi\,,\ \ y_C = l\cos\varphi\,. \qquad (18)$$

$$\dot{x}_C = \dot{x} + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,,\ \dot{y}_C = -l\sin\varphi\,\dot{\varphi}\,. \tag{19}$$

$$v_C^2 = \dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}l\cos\varphi\,\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2\,.$$

Кинетическая энергия кольца равна:

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{J_{Cz}\omega^2}{2} = \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\cos\varphi\,\dot{\varphi} + l^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{M(R^2 - l^2)\dot{\varphi}^2}{2} =$$

$$= \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\cos\varphi\,\dot{\varphi} + R^2\dot{\varphi}^2\right).$$

Введем неподвижную вертикальную ось O_1y_1, полагая, что расстояние от O_1 до оси y равно L (рис. 7). Потенциальная энергия кольца равна:

$$\Pi = Mgy_{1C} = Mg\left((L - x)\sin\alpha + R\cos\alpha + l\cos(\varphi + \alpha)\right).$$

При $t = 0$: $x = 0$, $\dot{x} = v_0$, $\varphi = \pi/2$, $\dot{\varphi} = \omega_0$.

Запишем закон сохранения энергии $T + \Pi = T_0 + \Pi_0$:

$$\frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\cos\varphi\,\dot{\varphi} + R^2\dot{\varphi}^2\right) + Mg\left((L - x)\sin\alpha + R\cos\alpha + l\cos(\varphi + \alpha)\right) =$$

$$= \frac{M}{2}\left(v_0^2 + R^2\omega_0^2\right) + Mg\left(L\sin\alpha + R\cos\alpha - l\sin\alpha\right).$$

После сокращений получим:

$$\dot{x}^2 + 2\dot{x}l\cos\varphi\,\dot{\varphi} + R^2\dot{\varphi}^2 + 2g(l\cos(\varphi + \alpha) - x\sin\alpha) =$$

$$= v_0^2 + R^2\omega_0^2 - 2gl\sin\alpha\,. \tag{20}$$

Из теоремы о движении центра масс:

$$m\ddot{x}_C = mg\sin\alpha\,.$$

$$\dot{x}_C = gt\sin\alpha + C_1\,.$$

С учетом (19): $gt\sin\alpha + C_1 = \dot{x} + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}$. Отсюда при $t = 0$: $C_1 = v_0 + l\cos(\pi/2)\omega_0 = v_0$. Отсюда

$$\dot{x}_C = gt\sin\alpha + v_0\,.$$

Тогда из (19):

$$\dot{x} = gt\sin\alpha + v_0 - l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,. \tag{21}$$

Интегрируем далее:

$$x_C = \frac{gt^2\sin\alpha}{2} + v_0 t + C_2\,.$$

При $t = 0$: $x_C = l$. Отсюда

$$x_C = \frac{gt^2\sin\alpha}{2} + v_0 t + l\,.$$

Тогда, с учетом (18):

$$x = \frac{gt^2\sin\alpha}{2} + v_0 t + l(1 - \sin\varphi)\,. \tag{22}$$

Подставляем (21), (22) в (20). После сокращений получим:

$$l^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 - 2l^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2gl\cos(\varphi + \alpha) +$$
$$+ 2gl\sin\alpha\sin\varphi = R^2\omega_0^2\,.$$

$$\dot{\varphi}^2(R^2 - l^2\cos^2\varphi) = R^2\omega_0^2 - 2gl\cos\varphi\cos\alpha\,. \tag{23}$$

$$\dot{\varphi} = \pm\sqrt{\frac{R^2\omega_0^2 - 2gl\cos\varphi\cos\alpha}{R^2 - l^2\cos^2\varphi}}\,. \tag{24}$$

Получили ДУ 1-го порядка. Начальное условие для него: $\varphi(0) = \pi/2$. При численном моделировании в начале движения в (24) выбирается знак «+». При уменьшении $\dot{\varphi}$ до нуля далее в (24) выбирается знак «+» или «-» так, чтобы $\dot{\varphi}$ оставалась гладкой функцией. Это следует из непрерывности $\ddot{\varphi}$ в силу (4).

Проверим, что ДУ (4) и (24) эквивалентны. Для этого продифференцируем (23):

$$2\ddot{\varphi}\dot{\varphi}(R^2 - l^2\cos^2\varphi) + 2\varphi^2 l^2\cos\varphi\sin\varphi\,\dot{\varphi} = 2gl\sin\varphi\cos\alpha\,\dot{\varphi}\,.$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{l\sin\varphi(g\cos\alpha - l\dot{\varphi}^2\cos\varphi)}{R^2 - l^2\cos^2\varphi}\,,$$

что совпадает с (4). Далее решение как в 1 способе.

Приведем пример вычислений и разбалловку для различных участков движения. Для решения ДУ использовались метод Рунге-Кутта и модифицированный метод Эйлера. При $\omega_0 = 10$ рад/с получим следующие результаты. При $t = 0.1$ с, что соответствует участку скольжения кольца по поверхности, получим $\omega = 23.889$ рад/с (пункт 2а в таблице результатов, 12 баллов из 40). При $t = 0.3$ с, что соответствует моменту вскоре после отрыва, получим $\omega = 9.850$ рад/с (пункт 2б, 8 баллов). Такой же ответ должен получиться при $t = 1.36$ с, что соответствует моменту почти перед ударом. Если этот ответ получен верно, а ответ для момента сразу после удара отличается от него, то это означает, что в программе верно определен момент удара (пункт 2в, 10 баллов). Наконец, при $t = 1.37$ с, что соответствует моменту почти сразу после удара, получим $\omega = -4.635$ рад/с (пункт 2г, 10 баллов).

Критерии оценивания ответов участников

При записи ответов в бланки указывается ровно столько цифр после десятичной запятой, сколько их приведено в соответствующих примерах для отладки. Последняя значащая цифра пишется с учетом округления. В задании 1.1 при записи τ нужно указать 4 значащие цифры после запятой, а при записи $N_{(\tau/2)}$ указать 3 значащие цифры после запятой.

При проверке ответов участников во всех конкурсных заданиях полный балл присуждается, если предложенный ответ либо совпадает с правильным, либо отличается от него по последней значащей цифре на 1 (точнее, например, в задании 1.1 это соответствует абсолютной погрешности предложенного ответа $\Delta = 0.0001$ при определении τ и $\Delta = 0.001$ при определении $N_{(\tau/2)}$). При большей погрешности предложенного ответа, если ответ близок к правильному, баллы присуждаются на основании разбалловки, выработанной жюри.