Муниципальное общеобразовательное учреждение
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

«НОБЕЛЕВСКИЕ НАДЕЖДЫ КНИТУ - 2020»

Номинация **« Математика»**

Исследовательская работа

«Поищем аналогии»

Выполнил: Хакимуллин Диас Табрисович
ученик 10 класса
МБОУ «Шеморданский лицей
Сабинского муниципального района РТ»

Руководитель :
учитель математики Закирова И.С.

Казань, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В начале учебного года я был в гостях у своего друга-одноклассника, где стал свидетелем интересной беседы. Его маленькая сестренка держала в руках кубик из детского набора и доказывала своему брату, что это квадрат. На все убеждения своего брата, что это кубик, она непреклонно отвечала, что квадрат, и что они рисовали его в детском садике. Брат попросил нарисовать квадрат, и она нарисовала на бумаге действительно квадрат. В итоге, она сделала вывод, что кубик-это квадрат, а квадрат- это кубик. А я тогда задумался, что таких аналогий из планиметрии и стереометрии очень много. Ну, а когда мой учитель математики предложил поучаствовать в этом конкурсе и найти интересную тему для работы, мне вспомнилась та история.

Традиционный систематический курс геометрии в школе делится на планиметрию и стереометрию. И при внимательном рассмотрении можно увидеть, что в указанных курсах имеются элементы, обладающие аналогичными свойствами.

Целью данной работы является нахождение аналогий между понятиями, свойствами фигур и различных теорем планиметрии и стереометрии

Гипотеза: Избежать односторонности в изучении геометрии может помочь широкое применение в курсе стереометрии метода аналогии.

Для достижения данной цели необходимо решить следующие поставленные ***задачи:***

1. Изучить литературу по выбранной теме, определить наиболее интересные аналогии.
2. Проанализировать полученные результаты и систематизировать их.
3. Провести практическую работу по систематизации полученных аналогий

Методы исследования

Изучение литературы по выбранной теме, графическое моделирование, анализ и классификация полученных результатов.

Актуальность проблемы

Бытует мнение, что курс стереометрии очень сложен для изучения, и доступен очень не многим. Метод аналогий может помочь старшеклассникам разобраться в сложных понятиях стереометрии, основываясь на знаниях планиметрии.

Новизна проекта

В данной работе сделаны попытки трансформировать некоторые теоремы планиметрии в область стереометрии.

Практическая значимость

Учащимся старших классов будет легче изучать стереометрию, используя аналогию с планиметрией.

Избежать односторонности в изучении геометрии может помочь широкое применение в курсе стереометрии метода аналогии. Например, при изучении тетраэдра можно заметить, что он имеет планиметрический аналог – треугольник. Подтверждением этого служат слова из замечательной книги Д. Пойи «Математика и правдоподобные рассуждения»: «На плоскости две прямые линии не могут образовать ограниченную фигуру, а три могут образовать треугольник. В пространстве три плоскости не могут образовать ограниченное тело, а четыре могут образовать тетраэдр. Отношение треугольника к плоскости такое же, как отношение тетраэдра к пространству, поскольку и треугольник, и тетраэдр ограничены минимальным числом простых ограничивающих элементов». Конечно, этим аналогия между треугольником и тетраэдром не исчерпывается: аналогичны многие теоремы и свойства, связанные с ними.

В данной работе сделаны попытки трансформировать некоторые теоремы планиметрии в область стереометрии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА

Поверхность, составленная из четырех треугольников ABC, DAB, DBC и DCA, называется ***тетраэдром*** и обозначается так: DABC (рисунок 1).

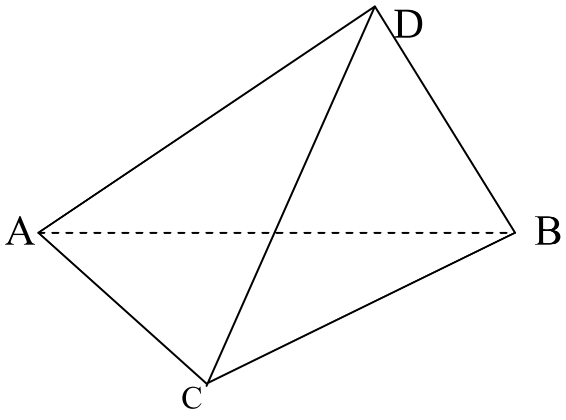


Рис. 1

Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются *гранями*, их стороны - *ребрами*, а вершина – *вершинами тетраэдра.* Тетраэдр имеет четыре грани, шесть ребер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются *противоположными*. На рисунке 1 противоположными являются ребра AD и BC, BD и AC, CD и AB. Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют ее *основанием*, а три другие – *боковыми гранями.*

Тетраэдр изображается обычно так, как показано на рисунках 1 и 2, то есть в виде выпуклого или невыпуклого четырехугольника с диагоналями. При этом штриховыми линиями изображаются невидимые ребра.

Треугольником называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки – *сторонами.*

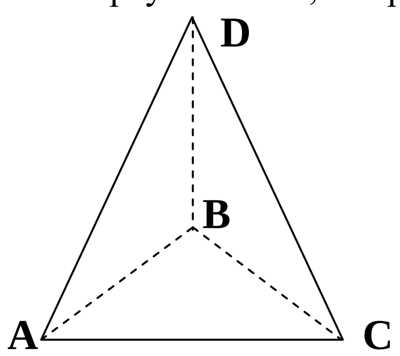


Рис. 2

ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ И ТЕТРАЭДРОВ

Применим метод аналогии. Например, из истории треугольника: треугольник – самая простая замкнутая прямолинейная фигура, одна из первых, свойства которой человек узнал еще в глубокой древности, так как эта фигура всегда имела широкое применение в практической жизни. В строительном искусстве испокон веков используется свойство жесткости треугольника для укрепления различных строений и их деталей. Изображения треугольников и задачи на треугольники встречаются в папирусах, в старинных индийских книгах и в других древних документах. В древней Греции учение о треугольниках развивалось в ионийской школе, основанной в VII в. до н. э. Фалесом, и в школе Пифагора. Уже Фалес доказал, что треугольник определяется стороной и двумя прилежащими к ней углами. Учение о треугольниках было полностью изложено в первой книге «Начал» Евклида. Среди «определений», которыми начинается эта книга, имеются и следующие: «Из трехсторонних фигур равносторонний треугольник есть фигура, имеющая три равные стороны, равнобедренный же – имеющая только две равные стороны, разносторонний – имеющая три неравные стороны». Понятие о треугольнике исторически развивалось, по-видимому, так: сначала рассматривались лишь правильные, затем равнобедренные и, наконец, разносторонние треугольники.

Были получены следующие аналоги:

правильный треугольник – правильный тетраэдр;

равнобедренный треугольник – правильная треугольная пирамида;

разносторонний треугольник – тетраэдр общего вида.

Более сложной задачей, явился поиск стереометрического аналога для прямоугольного треугольника: тетраэдр, в котором при одной вершине все три плоских угла прямые.

Особое внимание, на мой взгляд, нужно уделить следующему факту: не все свойства треугольника имеют аналогии среди свойств тетраэдра. Например, все высоты любого треугольника пересекаются в одной точке, но не о каждом тетраэдре можно сказать то же самое. Те тетраэдры, для которых такое свойство верно, составляют отдельный класс ортоцентрических тетраэдров.

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕХГРАННЫХ УГЛОВ И ТЕТРАЭДРОВ

«Признаки равенства треугольников» – одна из тем, которая остается актуальной на протяжении всего курса планиметрии, и не требует дополнительных усилий со стороны учащихся для восстановления ее в памяти. Равенство треугольников и тетраэдров определяется на основе понятия наложения: два треугольника называются равными, если их можно совместить наложением; две пирамиды называются равными, если они при вложении одной в другую могут быть совмещены.

Для доказательства признаков равенства тетраэдров необходимо ознакомиться с **признаками равенства трехгранных углов**, а именно:

- ***два трехгранных угла равны, если все три плоские угла одного из них равны плоским углам другого и одинаково с ними расположены;***

- ***два трехгранных угла равны, если они имеют по равному двугранному углу, заключенному между двумя плоскими углами, соответственно равными и одинаково расположенными;***

- ***два трехгранных угла равны, если они имеют по равному плоскому углу, заключенному между двумя двугранными углами, соответственно равными и одинаково расположенными.***

Можно выделить следующие **признаки равенства тетраэдров:**

1. Если в двух тетраэдрах соответственно равны две грани и двугранный угол между ними, то такие тетраэдры равны или симметричны.

2. Два тетраэдра равны или симметричны, если они имеют по равному ребру, прилежащему к соответственно равным трехгранным углам.

3. Два тетраэдра равны или симметричны, если они имеют по шесть равных ребер, и в обоих тетраэдрах равные элементы располагаются в одном и том же порядке (так, что трем ребрам, лежащим в одной грани или

выходящим из одной вершины, соответствуют три равных им ребра, также лежащие в одной грани или выходящие из одной вершины).

Поясним понятие «симметричные тетраэдры». Если ребра, плоские и двугранные углы двух тетраэдров равны, но расположены в «обратном» порядке, то они симметричны.

Так, на рисунке 3 дан тетраэдр OABC.

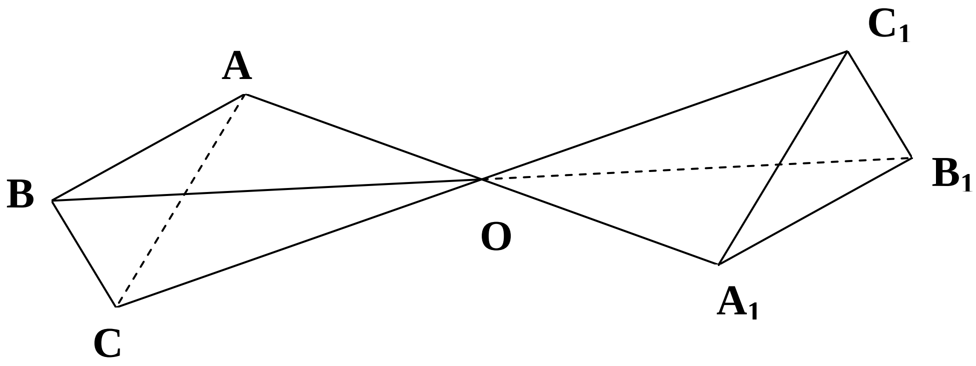


Рис. 3

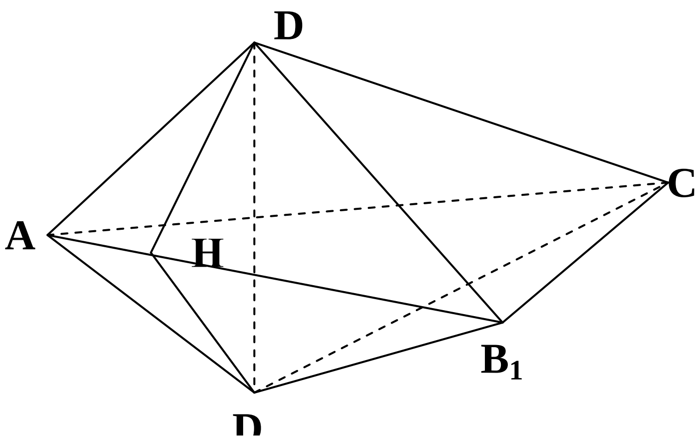
Его ребра AO, CO, BO продолжены за вершину O так, что $AO=OA_1$, $CO=OC_1$, $BO=OB_1$.Очевидно, что в тетраэдрах OABC и $OA_1B_1C_1$ равны ребра, плоские и двугранные углы, следовательно, они симметричны. Заметим, что симметричные тетраэдры, вообще говоря, не равны, то есть при вложении одного тетраэдра в другой они не совмещаются.

В качестве примера доказательства рассмотрим **первый признак равенства тетраэдров:**

Теорема: ***Если в двух тетраэдрах соответственно равны две грани и двугранный угол между ними, то такие тетраэдры равны или симметричны.***

Доказательство. Пусть двугранный угол при ребре AB тетраэдра ABCD равен двугранному углу при ребре A_1B_1 тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ и грани ABC и ADB первого тетраэдра соответственно равны граням $A_1B_1C_1$ и $A_1D_1B_1$ второго.

Пусть обозначения выбраны так, что ребро AC первого тетраэдра равно ребру A_1C_1 второго (рисунок 4).



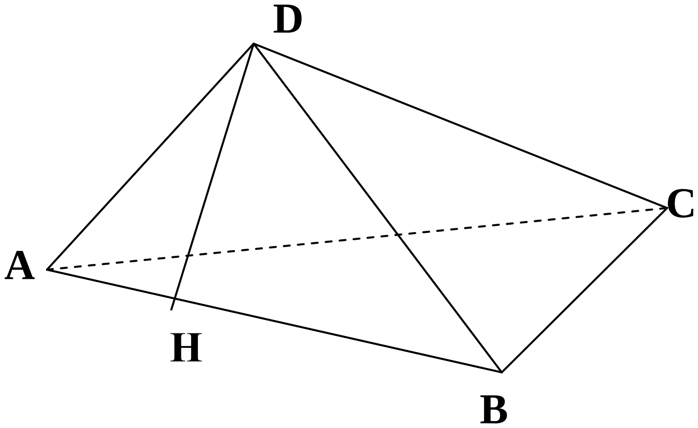


Рис. 4

Итак, мы имеем кроме равенства двугранных углов при ребрах AB и A_1B_1 еще равенство ребер

$$AB=A_1B_1,\ AC=A_1C_1,\ BC=B_1C_1,\ AD=A_1D_1,\ BD=B_1D_1.$$

Построим теперь точку D_2, симметричную точке D_1 относительно плоскости $A_1B_1C_1$ так, что $A_1D_1=A_1D_2$, $B_1D_1=B_1D_2$.

Опустим перпендикуляр DH на ребро AB тетраэдра ABCD, а из точек D_1 и D_2 опустим перпендикуляры D_1H_1 и D_2H_2 на ребро A_1B_1, в силу равенства треугольников $A_1B_1D_1$ и $A_1B_1D_2$ (3-й признак равенства треугольников) точки H_1 и H_2 совпадут, а отрезок AH будет равен A_1H_1.

Переместим теперь тетраэдр ABCD так, чтобы его грань ABC совпала с равной ей гранью $A_1B_1C_1$ второго тетраэдра. В силу равенства двугранных углов при ребрах AB и A_1B_1 плоскость ABD совместится с плоскостью $A_1B_1D_1$ или $A_1B_1D_2$. При этом луч AD совместится соответственно с A_1D_1 или с A_1D_2 (в силу равенства углов BAD, $B_1A_1D_1$, $B_1A_1D_2$), точка H совпадет с точкой H_1, перпендикуляр HD совпадет с H_1D_1 или с H_1D_2, а, следовательно, точка D с точкой D_1 или D_2.

Итак, тетраэдр ABCD совместится либо с равным тетраэдром $A_1B_1C_1D_1$, либо с симметричным ему тетраэдром $A_1B_1C_1D_2$.

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК, И ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА. ТЕТРАЭДР, ВПИСАННЫЙ В СФЕРУ И ОПИСАННЫЙ ОКОЛО СФЕРЫ

Здесь рассматривается еще одна интересная аналогия между фигурами на плоскости и в пространстве: окружностью и сферой.

Из планиметрии известны факты:

1. В любой треугольник можно вписать окружность, и притом только одну.

2. Около любого треугольника можно описать окружность, и притом только одну.

Можно доказать следующие утверждения:

1. Существует не более одной сферы, описанной около данного многогранника.

2. Около произвольного тетраэдра можно описать сферу, и притом только одну.

3. В произвольный тетраэдр можно вписать сферу, и притом только одну.

(Эти утверждения сформулированы как задача № 638, учебник «Геометрия 10-11», авторы Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Л.С. Киселева, Э.Г. Позняк)

ТЕОРЕМЫ О ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫХ ТОЧКАХ ТРЕУГОЛЬНИКА И ТЕТРАЭДРА

В таблице 1 приведены теоремы о замечательных точках треугольника и их стереометрические аналоги.

Таблица 1

Теоремы о замечательных точках треугольника	**Стереометрические аналоги теорем о замечательных точках**

	треугольника
Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке	Плоскости, проходящие через ребра трехгранного угла перпендикулярно к противолежащей грани, пересекаются по одной прямой
Медианы треугольника пересекаются в одной точке	Плоскости, проходящие через биссектрисы плоских углов каждой грани трехгранного угла и противолежащего им ребра, пересекаются по одной прямой
Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая удалена от сторон углов треугольника на одинаковое расстояние	Биссекторные плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой, и каждая точка этой прямой удалена от граней трехгранного угла на одно и то же расстояние
Отрезки, соединяющие вершины треугольника с центром тяжести противолежащих им сторон, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 1:2, считая от вершины	Прямые, соединяющие вершины тетраэдра с центром тяжести противолежащей грани (соответственно), пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 1:3, считая от грани

Впервые закономерность в расположении трех замечательных точек треугольника – центра O описанной окружности, центроида G (точка пересечения медиан) и ортоцентра H (точка пересечения высот) обнаружил и доказал с помощью метода координат знаменитый математик Леонард Эйлер (1703-1783).

Таблица 2

Теоремы о замечательных точках треугольника	Теоремы о замечательных точках тетраэдра
Медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке G и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины, причем $3\overline{PG} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC},$ где P – любая точка пространства	Четыре медианы тетраэдра ABCD пересекаются в одной точке G, которая делит каждую из них в отношении3:1, считая от вершины тетраэдра, причем $4\overline{PG} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC},$ где P – любая точка пространства
Высоты треугольника ABC пересекаются в одной точке H, причем $\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC},$ где O – центр окружности, описанной около треугольника	Четыре высоты ортоцентрического тетраэдра ABCD пересекаются в одной точке H, причем, если O – центр окружности, описанной около тетраэдра, то $\overline{OH} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD})$
Центр описанной окружности, центроид G и ортоцентр H любого треугольника лежат на одной прямой, причем точка G лежит между точками O и H и $\lvert\overline{OG}\rvert : \lvert\overline{OH}\rvert = 1:2$	Центр O описанной сферы, центроид G и ортоцентр H ортоцентрического тетраэдра ABCD лежат на одной прямой, причем точки O и H симметричны относительно точки G

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ ДЛЯ ТЕТРАЭДРА

Рассмотрим **теорему косинусов** для тетраэдров:

Теорема: ***Квадрат площади какой-либо грани тетраэдра равен сумме квадратов площадей трех других его граней без удвоенной суммы произведений площадей каждых двух из них на косинус двугранного угла между ними.***

Доказательство.

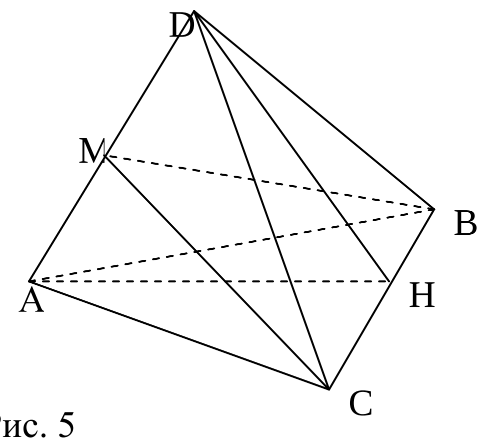


Рис. 5

Проведем плоскость, проходящую через ребро CB перпендикулярно AD. Пересечением данной плоскости с гранью ADC является отрезок CM, а с гранью ADB – отрезок BM, причем $CM \perp AD$, $BM \perp AD$, следовательно линейным углом двухгранного угла CADB является угол $\angle CMB = \alpha$. Аналогично построим линейный угол $\angle ADH = \alpha'$ двухгранного угла ABCD.

Обозначим площади граней $S_{ADC} = S_1$, $S_{ABD} = S_2$, $S_{BCD} = S_3$, $S_{ABC} = S_4$.

Из треугольника CMB по теореме косинусов имеем:

$CB^2 = CM^2 + BM^2 - 2 \cdot CM \cdot BM \cdot \cos\alpha$.

Умножим обе части равенства на $\frac{1}{4}AD^2$.

Получим $\frac{1}{4}CB^2\, AD^2 = \frac{1}{4}AD^2 \cdot CM^2 + \frac{1}{4}AD^2 \cdot BM^2 - \frac{1}{4}AD^2 \cdot 2 \cdot CM \cdot BM \cdot \cos\alpha$,

$\frac{1}{4}CB^2 \cdot AD^2 = (S_1)^2 + (S_2)^2 - 2\,(S_1) \cdot (S_2) \cdot \cos\alpha$. (1)

Из треугольника AHD по теореме косинусов имеем:

$AD^2 = DH^2 + AH^2 - 2 \cdot DH \cdot AH \cdot \cos\alpha'$.

Умножим обе части равенства на $\frac{1}{4}CD^2$.

Получим $\frac{1}{4}CB^2\, AD^2 = \frac{1}{4}CB^2 \cdot DH^2 + \frac{1}{4}CB^2 \cdot AH^2 - \frac{1}{4}CB^2 \cdot 2 \cdot DH \cdot AH \cdot \cos\alpha'$,

$\frac{1}{4}CB^2 \cdot AD^2 = (S_3)^2 + (S_4)^2 - 2S_3 \cdot S_4 \cdot \cos\alpha'$. (2)

Сравнивая равенства (1) и (2) получаем:

$(S_1)^2 + (S_2)^2 - 2\,S_1 \cdot S_2 \cdot \cos\alpha = (S_3)^2 + (S_4)^2 - 2\,S_3 \cdot S_4 \cdot \cos\alpha'$. (3)

Выполняя аналогичные преобразования для пар ребер AB и DC, AC и DB, получаем

$(S_3)^2 + (S_1)^2 – 2\ S_3 \cdot S_1 \cdot \cos\beta = (S_2)^2 + (S_4)^2 – 2S_2 \cdot S_4 \cdot \cos\beta'$, (4)

$(S_3)^2 + (S_2)^2 – 2\ S_3 \cdot S_2 \cdot \cos\gamma = (S_1)^2 + (S_4)^2 – 2S_1 \cdot S_4) \cdot \cos\gamma'$. (5)

Вычисляя сумму левой и правой частей равенств (3), (4), (5), получаем

$(S_1)^2 + (S_2)^2 +(S_3)^2 – 2S_1 \cdot S_2 \cdot \cos\alpha – 2S_3 \cdot S_1 \cdot \cos\beta- 2S_3 \cdot S_2 \cdot \cos\gamma =$

$= 2(S_4)^2-S_4 (S_3 \cdot \cos\alpha' + S_2 \cdot \cos\beta' + S_1 \cdot \cos\gamma')$. (6)

Если основание высоты тетраэдра совпадает с точкой основания тетраэдра, то в этом случае двухгранные углы при основании являются острыми, значит сумма площадей ортогональных проекций боковых граней на основание равно площади основания, т.е. $S_3 \cdot \cos\alpha' + S_2 \cdot \cos\beta' + S_1 \cdot \cos\gamma = S_{4.}$

Если основание высоты тетраэдра не совпадает с точкой основания тетраэдра, то в этом случае хотя бы один из двухгранных углов при основании является тупым, в этом случае значение косинуса отрицательное, но сумма площадей ортогональных проекций боковых граней на основание равно площади основания, т.е. $S_3 \cdot \cos\alpha' + S_2 \cdot \cos\beta' + S_1 \cdot \cos\gamma = S_{4.}$

Учитывая этот факт, преобразуем равенство (6), получаем

$(S_1)^2 + (S_2)^2 +(S_3)^2 – 2S_1 \cdot S_2 \cdot \cos\alpha – 2S_3 \cdot S_1 \cdot \cos\beta- 2S_3 \cdot S_2 \cdot \cos\gamma = 2(S_4)^2-S_4{}^2$,

То есть $S_4{}^2 = (S_1)^2 + (S_2)^2 +(S_3)^2 – 2S_1 \cdot S_2 \cdot \cos\alpha – 2S_3 \cdot S_1 \cdot \cos\beta- 2S_3 \cdot S_2 \cdot \cos\gamma$,

$S_4{}^2 = (S_1)^2 + (S_2)^2 +(S_3)^2 – 2(S_1 \cdot S_2 \cdot \cos\alpha + 2S_3 \cdot S_1 \cdot \cos\beta+ 2S_3 \cdot S_2 \cdot \cos\gamma)$.

Теорема косинусов доказана.

Следствие: Если все грани тетраэдра равновелики, то сумма косинусов его двугранных углов при всех трех ребрах, выходящих из одной вершины, равна 1.

Доказательство вытекает из теоремы косинусов: пусть площадь каждой грани равна S. Получаем равенство

$S^2 =3\ S^2 -2\ S^2\cos\alpha – 2S^2 \cdot \cos\beta- 2S^2 \cdot \cos\gamma$,

$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma=1$.

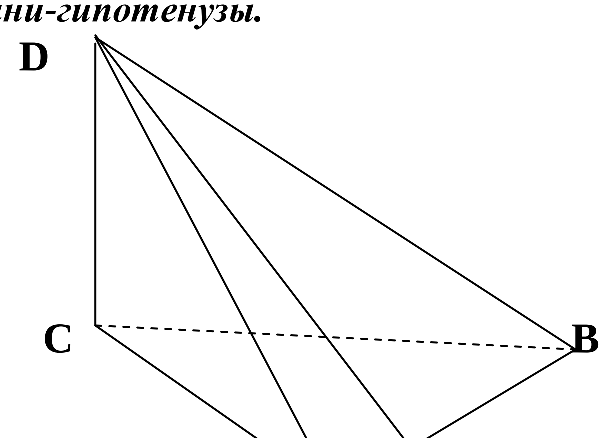
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК И ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТЕТРАЭДР. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА В ПРОСТРАНСТВЕ

С прямоугольным треугольником связана одна из важнейших теорем геометрии – теорема Пифагора. Интересна история теоремы Пифагора. Хотя эта теорема и связывается с именем Пифагора, она была известна задолго до него. В вавилонских текстах эта теорема встречается за 1200 лет до Пифагора. Возможно, что тогда еще не знали ее доказательства, а само соотношение между гипотенузой и катетами было установлено опытным путем на основе измерений. Пифагор, по-видимому, нашел доказательство этого соотношения. На протяжении последующих веков были найдены различные другие доказательства теоремы Пифагора. Со многими из них можно ознакомиться в книге Литцмана В. «Теорема Пифагора».

Аналогом прямоугольного треугольника в пространстве является прямоугольный тетраэдр. Мы уже говорили о нем: тетраэдр, в котором при одной вершине все три плоских угла прямые, называют *прямоугольным*; грань, лежащую против прямого угла, называют *гранью-гипотенузой*, а другие *гранями-катетами.*

Для прямоугольного тетраэдра верна теорема, которую называют аналогом **теоремы Пифагора** в пространстве:

Теорема: ***В прямоугольном тетраэдре сумма квадратов площадей граней-катетов равна квадрату площади грани-гипотенузы.***



Доказательство:

Пусть дан прямоугольный тетраэдр DABC: $DC \perp CA$, $DC \perp CB$, $CB \perp CA$, причем DC= *c,* CB = *a,* AC = *b*.

Найдем площади граней

$$S_{ADC} = \frac{1}{2}bc; \quad S_{BDC} = \frac{1}{2}ac; \quad S_{ABC} = \frac{1}{2}ab.$$

Для вычисления площади грани ABD вычислим апофему DH.

Применим теорему Пифагора для прямоугольного треугольника:

Δ DCA: DA = $\sqrt{DC^2 + CA^2}$; DA = $\sqrt{c^2 + b^2}$;

Δ DCB: DB = $\sqrt{DC^2 + CB^2}$; DB = $\sqrt{c^2 + a^2}$;

Δ ABC: AB = $\sqrt{BC^2 + AC^2}$; AB = $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Обозначим AH через *x*. Тогда HB = $\sqrt{a^2 + b^2} - x$.

По теореме Пифагора: DH = $\sqrt{DA^2 - AH^2}$; DH = $\sqrt{c^2 + b^2 - x^2}$;

DH = $\sqrt{DB^2 - BH^2}$; DH = $\sqrt{c^2 + a^2 - (\sqrt{a^2 + b^2} - x)^2}$.

Из уравнения $\sqrt{c^2 + b^2 - x^2} = \sqrt{c^2 + a^2 - (\sqrt{a^2 + b^2} - x)^2}$ получаем, что $x = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Вычислим DH = $\sqrt{\dfrac{a^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2}}$.

Итак, $S_{ABD} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$.

$(S_{ABD})^2 = (\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2})^2 = \dfrac{1}{4}a^2b^2 + \dfrac{1}{4}a^2c^2 + \dfrac{1}{4}b^2c^2$, то есть получили

$(S_{ABD})^2 = (S_{ACD})^2 + (S_{BCD})^2 + (S_{ABC})^2$. Что и требовалось доказать.

Эту теорему называют еще теоремой Фаульберга, который опубликовал ее в 1622 году для случая, когда DA=DB=DC в тетраэдре ABCD с прямым углом D. Для произвольного прямоугольного тетраэдра эту теорему доказал Де-Гюа.

Интересно заметить, что для прямоугольного тетраэдра верно также утверждение о том, что грань-гипотенуза имеет наибольшую площадь, так как грань-гипотенузу можем рассматривать как прямоугольную проекцию на каждую из граней-катетов. Это утверждение аналогично следствию из теоремы Пифагора: *длина гипотенузы больше длины любого из катетов.*

Рассмотренные теоремы применяются при решении следующих задач:

1. Докажите, что если в прямоугольном тетраэдре боковые ребра a, b, c взаимно перпендикулярны, а h – высота, опущенная из вершины на основание, то

$$h^{-2} = a^{-2} + b^{-2} + c^{-2}.$$

2. Докажите, что в прямоугольном тетраэдре площадь грани-катета есть среднее пропорциональное между площадью грани-гипотенузы и площадью проекции грани-катета на гипотенузу.

ФОРМУЛА ГЕРОНА В ПЛАНИМЕТРИИ И ЕЕ АНАЛОГ В СТЕРЕОМЕТРИИ

Выведем формулу Герона для площади треугольника. По теореме косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha\ ,$$

$$\cos\alpha = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab,$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha).$$

$$\sin^2\alpha = (1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}) =$$

$$= \frac{2ab-a^2-b^2+c^2}{2ab}\cdot\frac{2ab+a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab}\cdot\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab} = \frac{(c+b-a)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}{4a^2b^2}$$

Замечая, что $a+b+c = 2p$,

$$c+b-a = c+b+a-2a = 2p-2a = 2\ (p-a),$$

$$c+a-b = c+a+b-2b = 2p-2b = 2\ (p-b),$$

$$a+b-c = a+b+c-2c = 2p-2c = 2\ (p-c).$$

$$\sin^2\alpha = (16p\ (p-a)(p-b)(p-c))/4a^2b^2 = (4p\ (p-a)(p-b)(p-c)/a^2b^2$$

$$\sin\alpha = \sqrt{(4p(p-a)(p-b)(p-c))/a^2b^2} = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\frac{1}{2}ab\sin\alpha = S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ .$$

Учащиеся старших классов хорошо знают формулу Герона для вычисления площади треугольника. Формула, хотя и громоздка, но легко и надолго запоминается. Ее аналог возникает в курсе стереометрии при вычислении объема тетраэдра. Однако в школе этот вопрос не рассматривается, хотя в учебных пособиях встречаются задания на вычисление объема тетраэдра по известным длинам его ребер. Обычно это частные случаи, например: найти объем тетраэдра, у которого все боковые ребра равны.

Формула для вычисления объема тетраэдра по данным длинам его ребер сложная, но ее вывод не представляет больших трудностей.

Рассмотрим несколько задач, содержащих числовые данные, причем подобраны они так, чтобы не тратить много времени на вычисления.

Задача 1. Найти объем тетраэдра ABCD, если DA=3, DB=4, DC=AB=5, BC=$\sqrt{21}$, AC=$\sqrt{19}$.

Решение: Основанием пирамиды удобно считать грань ABD (рисунок 6). Так как DA=3, DB=4 и AB=5, то треугольник ABD – прямоугольный ($\angle$ADB=90^0), а его площадь S равна 6. Для решения задачи необходимо найти высоту CH тетраэдра.

Сначала найдем плоские углы тетраэдра при вершине D. Это легко сделать, пользуясь теоремой косинусов: если $\angle BDC = \alpha$ и $\angle ADC = \beta$, то $\cos\alpha = \frac{16+25-21}{2\cdot 20} = \frac{1}{2}$ и $\alpha=60^0$. Аналогично найдем, что $\beta=60^0$.

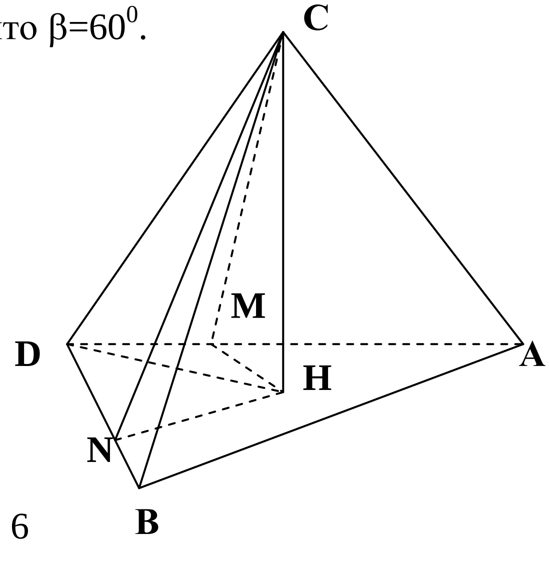


Рис. 6

Проведем CM $\perp$ AD и CN $\perp$ BD. Тогда HM $\perp$ AD и HN $\perp$ BD (по теореме о трех перпендикулярах). Прямоугольные треугольники CDM и CDN равны по гипотенузе и острому углу, а значит, DM=DN=5/2 (по свойству катета, лежащего против угла в 30^0).

Треугольники DHM и DHN также равны, то есть DH – биссектриса угла ADB.

Далее находим, что

$$DH = \frac{5\sqrt{2}}{2}, CH = \sqrt{25 - \frac{25}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

По формуле $V = \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot CH$ вычисляем объем: $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}.$

Задача 2. Найти объем тетраэдра CABD, если DA=3, DB=4, DC=6, $\angle$BDC=45^0, $\angle$ADC=60^0, $\angle$ADB=90^0.

Решение. Обозначим высоту тетраэдра за CH (рисунок 6). Легко установить, что точка H лежит внутри угла ADB. Как и при решении предыдущей задачи, проведем CM $\perp$ AD и CN $\perp$ BD. Обозначим $\angle$CDH = x, $\angle$ADH = y. Тогда $\angle$BDH=90^0-y.

Для прямоугольных треугольников CDH, DHM и CDM выполняются равенства: $\frac{DH}{CD} = \cos x, \frac{DM}{DH} = \cos y, \frac{DM}{CD} = \cos 60^0.$

Перемножим первые два равенства почленно и, воспользовавшись третьим равенством, получим уравнение

$$\cos x \cos y = \cos 60^0, \; 0^0 < x < 90^0. \qquad (1)$$

Аналогично для прямоугольных треугольников CDH, DHM и CDN получается уравнение

$$\cos x \cos (90^0 - y) = \cos 45^0,$$

$$\text{или } \cos x \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (2)$$

Возведем обе части уравнений (1) и (2) в квадрат и почленно сложим, получив простейшее уравнение

$$\cos^2 x = \frac{3}{4}, \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } x=30^0.$$

Теперь легко найти высоту CH, она равна 3. Площадь основания – 6 и объем соответственно равен 6.

Если плоские углы трехгранного угла равны α, β, γ и двугранный угол при ребре, противолежащем плоскому углу γ, равен φ, то

$$\cos\gamma = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi.$$

Задача 3. Выразить объем тетраэдра CABD через длины ребер, исходящих из вершины D, и величины плоских углов при вершине D.

Решение. CH – высота тетраэдра CABD (рисунок 6),

обозначим DA=a, DB=b, DC=c, $\angle$BDC=α, $\angle$ADC=β, $\angle$ADB=γ.

Как и в предыдущей задаче, обозначим $\angle$CDH=x и $\angle$ADH=y. Тогда $\angle$BDH=γ-y.

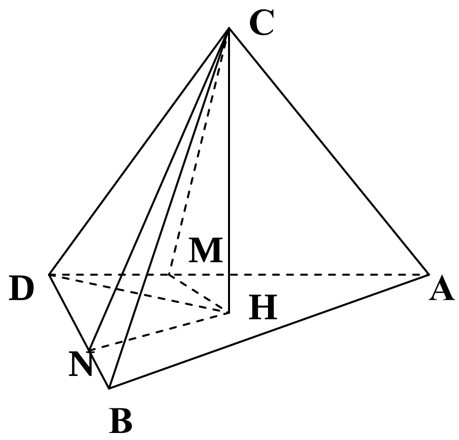


Рис. 7

Рассмотрим трехгранные углы DACH и DBCH (плоскость CDH перпендикулярна плоскости ABD). Применив к ним теорему косинусов для трехгранного угла, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \cos\alpha = \cos(\gamma\text{-}y)\cos x, \\ \cos\beta = \cos y\cos x. \end{cases}$$

Заменив в первом уравнении cos y cos x на cos β, получим

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\gamma\sin y\cos x,$$

откуда

$$\sin y\cos x = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\gamma}.$$

Обе части этого уравнения и уравнения cos y cos x = cos β возведем в квадрат, почленно сложим и, воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, получим уравнение

$$\cos^2 x = \frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma}.$$

А поскольку $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$, придем к следующему уравнению

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos\ \alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{\sin^2\gamma}.$$

Теперь можно выразить объем тетраэдра ABCD, используя формулу $V = \frac{1}{3}S_{ABD}\cdot CH$. Известно, что $s_{ABD} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, CH = c\sin x,$ поэтому при данных условиях окончательный вид формулы для вычисления объема тетраэдра ABCD будет выглядеть как:

$$V = \frac{1}{6}abc\sqrt{1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.} \qquad (3)$$

Теперь уже ясно как решить основную задачу.

Задача 4. Выразить объем тетраэдра через длины всех его ребер.

Решение. Обозначим длины ребер тетраэдра CABD: DA=a, DB=b, DC=c, $BC=a_1$, $CA=b_1$, $AB=c_1$. С помощью теоремы косинусов выразим из треугольников BCD, CAD и ABD (рисунок 6) значения косинусов плоских углов при вершине D:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a_1^{\ 2}}{2bc}, \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b_1^{\ 2}}{2ac}, \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c_1^{\ 2}}{2ab}.$$

Подставив эти значения в формулу (3), получим

$144V^2 = 4a^2b^2c^2 - a^2(b^2 + c^2 - a_1^2) - b^2(a^2 + c^2 - b_1^2) - c^2(a^2 + b^2 - c_1^2) + (b^2 + c^2 - a_1^2)(a^2 + c^2 - b_1^2)(a^2 + b^2 - c_1^2)$.

Полученную формулу можно преобразовать, и все же, пользоваться ею затруднительно. Важно то, что если известны длины всех ребер тетраэдра, то его объем можно вычислить. А при решении задач на вычисление объема тетраэдра учащимся можно рекомендовать пользоваться более простой формулой задачи 3.

Рассмотрим задачу, которую легко решить, применив указанную формулу.

Задача 5. Ребра трехгранного угла D пересечены двумя плоскостями соответственно в точках A, B, C и A_1, B_1, C_1. Доказать, что

$$\frac{V}{V_1} = \frac{DA \cdot DB \cdot DC}{DA_1 \cdot DB_1 \cdot DC_1},$$

где V – объем тетраэдра DABC и V_1 – $DA_1B_1C_1$.

Решение. Тетраэдры DABC и $DA_1B_1C_1$ имеют общий трехгранный угол D. Выразив по формуле задачи 3 их объемы, увидим, что квадратные корни из одинаковых выражений при делении сокращаются. Поэтому их объемы относятся как произведения длин ребер, прилежащих к вершине D:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{abc}{a_1b_1c_1}.$$

Заметим, что аналогичная теорема существует для треугольников:

Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы.

Если S и S_1 – площади треугольников, у которых углы A и A_1 равны, то $\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot FC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$.

Заключение

В работе я привел только некоторые из теорем, трансформированных из планиметрии в область стереометрии. Но эти теоремы, по моему мнению, наиболее ярко показывают аналогию треугольника в планиметрии и тетраэдра в пространстве.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воейкова С.В. Геометрия тетраэдра в средней школе. – Казань: Дисс. канд. пед наук, 1964.
2. Гангнус Р.В., Гурвиц Ю.О. Геометрия / Методическое пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы. Ч. 2 Стереометрия. – М.: Учпедгиз, 1936.
3. Глейзер Г.Д. История математики в школе. 4-6 классы / Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981.
4. Елина А.М. Ортоцентрический тетраэдр и его свойства. – М.: Математика в школе, № 3/87.
5. Кучеров В. Геометрические аналогии. – М.: Квант, № 10/81.
6. Кушнир В.А. Полезные свойства тетраэдра. – М.: Математика в школе, № 6/88.
7. Литцман В. Теорема Пифагора. – М.: Физматгиз, 1960.
8. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Учпедгиз, 1961.