

ОЛИМПИАДА КНИТУ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Задачи для подготовки. Раздел «Теоретическая механика». Решения

1.

Уравнение траектории точки:

$$\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1.$$

Это эллипс с полуосями 3 и 4. Две наиболее удаленные друг от друга точки траектории находятся на противоположных концах большей оси, равной $d = 2 \cdot 4 = 8$ м.

2.

Поскольку оба ползуна передвигаются вдоль координатных осей, то по теореме Пифагора все время выполняется:

$$x_A^2 + y_B^2 = AB^2.$$

Тогда

$$y_B = \pm \sqrt{AB^2 - x_A^2} = \pm \sqrt{0,5^2 - 0,5^2 \sin^2(t^2/3)} = \pm 0,5 \cos(t^2/3).$$

Чтобы выяснить, какой все же знак должен стоять в этом выражении, определим координату y_B при $t = 0$. По условию при $t = 0$ ползун B находился ниже оси x . Значит, $y_B(0) < 0$. Но выражение $0,5 \cos(0^2/3) = 0,5$ положительно. Поэтому в записи закона для y_B надо поставить знак «минус».

Итак, закон движения ползуна B :

$$y_B = -0,5 \cos(t^2/3).$$

Вычисляем проекцию скорости на ось y :

$$v_{By} = \frac{dy_B}{dt} = -0,5 \cdot \frac{2t}{3} \cdot (-\sin(t^2/3)) = \frac{1}{3} t \cdot \sin(t^2/3).$$

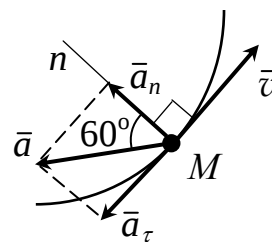
В момент времени $t = \sqrt{\pi}$ с:

$$v_{By} = \frac{\sqrt{\pi}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3\pi}}{6} \text{ (м/с)}.$$

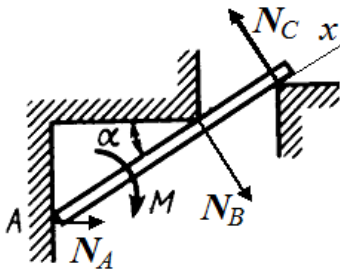
3.

Вектор ускорения точки имеет тангенциальную и нормальную составляющие: $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n$. Проецируем на нормальную ось n : $a \cos 60^\circ = a_n$. При этом $a_n = v^2 / \rho$. Отсюда найдем радиус кривизны траектории:

$$\rho = 2v^2 / a.$$



4.

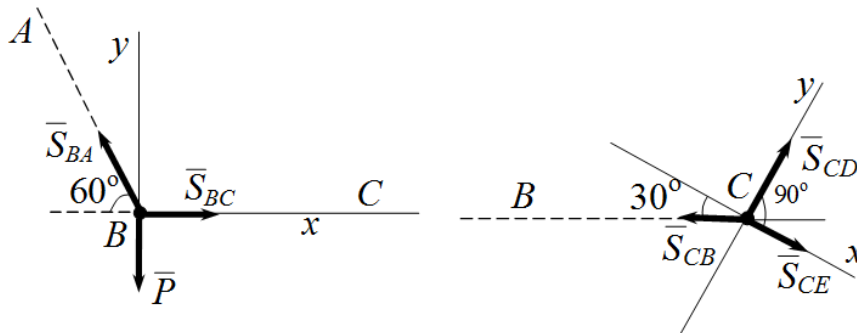


Направим ось x вдоль стержня. Так как $N_{1x} = N_{2x} = 0$, то

$$\sum_k F_{kx} = N_A \cos \alpha = 0.$$

Следовательно, $N_A = 0$.

5.



Рассмотрим сначала равновесие узла B . Приложенные к нему сила $\bar{P}$ и силы реакций связей $\bar{S}_{BA}$, $\bar{S}_{BC}$ образуют систему сходящихся сил. Уравнения равновесия:

$$\sum_k F_{kx} = S_{BC} - S_{BA} \cdot \cos 60^\circ = 0,$$

$$\sum_k F_{ky} = -P + S_{BA} \cdot \sin 60^\circ = 0.$$

Из этой системы определяем

$$S_{BC} = \frac{100}{\sqrt{3}} \approx 57,7 \text{ Н.}$$

Далее рассмотрим равновесие узла C . Отбрасывая связь BC , заменяем ее на силу реакции связи $\bar{S}_{CB}$. Согласно 4-й аксиоме статики (третий закон Ньютона), $\bar{S}_{BC} = -\bar{S}_{CB}$. Опять получаем систему сходящихся сил. Систему координат удобно расположить под углом. Тогда уравнения равновесия упрощаются:

$$\sum_k F_{kx} = S_{CE} - S_{CB} \cdot \cos 30^\circ = 0 ,$$

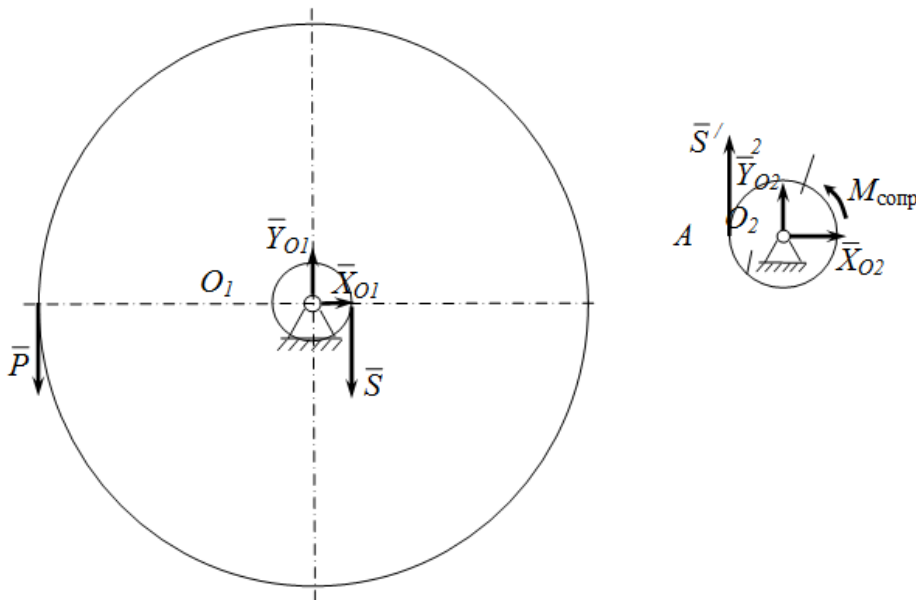
$$\sum_k F_{ky} = S_{CD} - S_{CB} \cdot \sin 30^\circ = 0 .$$

Вместо S_{CB} подставляем $57,7$ Н.

Тогда из системы получаем:

$$S_{CD} = \frac{50}{\sqrt{3}} = 28,9 \approx 29 \text{ Н.}$$

6.



Рассмотрим равновесие каждого из двух колес в отдельности. Со стороны колеса 2 на колесо 1 действует касательная сила сцепления $\bar{S}$. По 3-му закону Ньютона со стороны колеса 1 на колесо 2 действует противоположная ей сила сцепления $\bar{S}'$. Кроме того, в шарнирах O_1 , O_2 имеются силы реакции связей. Для решения задачи достаточно записать лишь два третьих уравнения равновесия твердого тела для каждого из двух колес.

Для колеса 1: $\sum_k M_{O_1}(\bar{F}_k) = X_{O_1} \cdot 0 + Y_{O_1} \cdot 0 + P \cdot R_1 - S \cdot r_1 = 0$.

Для колеса 2: $\sum_k M_{O_2}(\bar{F}_k) = X_{O_2} \cdot 0 + Y_{O_2} \cdot 0 - S' \cdot R_2 + M_{\text{сопр}} = 0$.

После подстановки чисел:

$$P \cdot 0,5 - S \cdot 0,05 = 0,$$

$$-S' \cdot 0,08 + 300 = 0.$$

Учтем, что модули сил сцепления по 3-му закону Ньютона равны: $S' = S$. Из системы двух уравнений определяем $P = 375$ Н.

Именно при этом значении силы P реализуется максимальное значение момента сил сопротивления $M_{\text{сопр}} = 300$ Н·м.

Действительно, если взять значение силы $P = 0$ (нерабочее состояние), то не будет и сил сопротивления, то есть в этом случае $M_{\text{сопр}} = 0$. Если взять промежуточные значения $0 < P < 375$, то и момент сил сопротивления будет принимать промежуточные значения $0 < M_{\text{сопр}} < 300$. Равновесие при этом будет соблюдаться.

Но вот при $P > 375$ Н конструкция выйдет из равновесия: диски начнут ускоренно вращаться.