

ОЛИМПИАДА КНИТУ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ

Задачи для подготовки. Раздел «Сопротивление материалов». Решения

1.

Применяя метод сечений, найдем продольные усилия на трех участках.

Перемещение сечения I-I равно алгебраической сумме перемещений данного сечения от каждой силы отдельно

$$\delta_{I-I} = \frac{F \cdot 4l}{EA} + \frac{2F \cdot 3l}{EA} - \frac{F_1 \cdot 2l}{EA} = 0,$$

откуда $F_1 = 5F$.

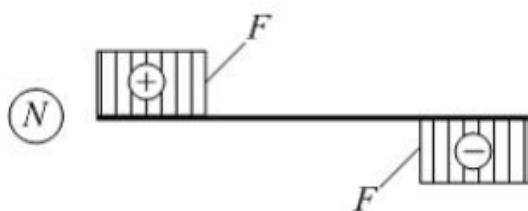
2.

Можно применить метод сечений аналогично решению задачи 1.

Ниже приведен короткий способ решения.

Система статически неопределима. У симметричной системы при кососимметричной нагрузке в плоскости симметрии симметричные силовые факторы равны нулю.

Продольная сила – симметричный силовой фактор. Следовательно, на среднем участке стержня продольная сила равна нулю и эпюра продольных сил будет иметь вид, как показано на рисунке.



Значение максимального нормального напряжения

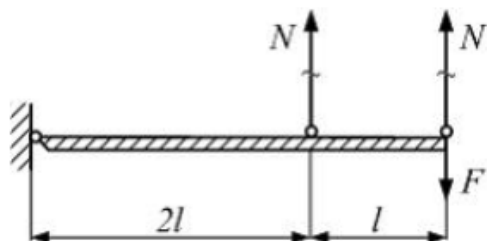
$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A}.$$

3.

Из условия равновесия

$$\sum m_{от_B}(F) = N \cdot 2l + N \cdot 3l - 3Fl = 0$$

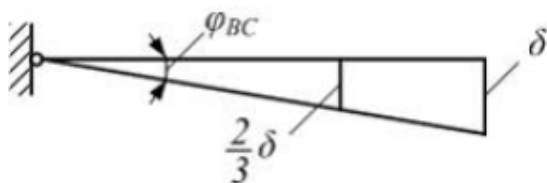
определим силу натяжения нити $N = \frac{3}{5}F$.



Удлинение нити

$$\Delta l = \frac{N \cdot 3l}{EA} = \frac{9 Fl}{5 EA}.$$

Из схемы деформирования системы свяжем перемещение сечения, где приложена сила F , с удлинением нити:



$$\delta + \frac{2}{3}\delta = \Delta l.$$

Тогда

$$\delta = \frac{27 Fl}{25 EA}.$$

$$\text{Угол поворота } \varphi_{BC} = \frac{\delta}{3l} = \frac{9 F}{25 EA}.$$

4.

Сечения имеют более двух осей симметрии, поэтому относительно любой центральной оси осевые моменты инерции принимают одно значение.

Выразим осевые моменты инерции сечений через площади поперечного сечения.

Для квадратного сечения

$$J_{(1)} = \frac{a^4}{12} = \frac{A^2}{12}, \text{ где } A = a^2.$$

Для круглого сечения

$$J_{(2)} = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{A^2}{4\pi}, \text{ где } A = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Следовательно,

$$\frac{J_{(1)}}{J_{(2)}} = \frac{\pi}{3}.$$

5.

Из условия равнопрочности участков

$$\frac{16M_1}{\pi d^3} = \frac{16(M_1 + M_2)}{\pi D^3}$$

найдем

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{D^3}{d^3} - 1.$$

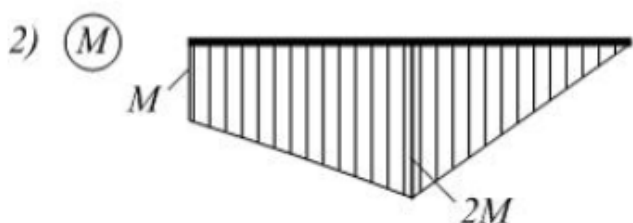
6.

Применяем метод сечений.

Момент в правой заделке равен нулю, когда угол поворота сечения, где приложен момент M_2 , равен нулю. Следовательно,

$$\frac{M_2 \cdot 2l}{GJ_p} = \frac{M_1 l}{GJ_p}, \text{ откуда } \frac{M_1}{M_2} = 2.$$

7.



Из сопоставления эпюр изгибающих моментов при двух вариантах нагружения балки видно, что максимальный изгибающий момент при дополнительном нагружении силой увеличивается в два раза. Следовательно, максимальные нормальные напряжения также увеличатся в два раза.

8.

Задачу можно решить как методом сечений, так и следующим методом.

Воспользуемся дифференциальными зависимостями при плоском поперечном изгибе

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y, \quad \frac{dQ_y}{dz} = q.$$

Учитывая, что распределенная нагрузка направлена вниз, запишем

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q \left[1 - \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right].$$

Интегрируя дважды, найдем

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y(z) = -q \left[z - \frac{z^4}{4l^3} + C_1 \right],$$

$$M_x(z) = -q \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^5}{20l^3} + C_1 z + C_2 \right].$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим из граничных условий $M_x(z=0)=0$ и $M_x(z=l)=0$,

откуда $C_1 = -\frac{9}{20}l$, $C_2 = 0$.

Выражение для поперечной силы имеет вид

$$Q_y(z) = -q \left(z - \frac{z^4}{4l^3} - \frac{9}{20}l \right).$$

Реакция в правой опоре равна значению поперечной силы при $z=l$ с противоположным знаком.

Следовательно, $R = \frac{3}{10}ql$.

9.

Задачу можно решить как методом сечений, так и следующим методом.

Воспользуемся дифференциальными зависимостями при изгибе:

$$Q_y(z) = \frac{dM_x}{dz} = q \left(2z - \frac{3z^2}{2l} \right).$$

Поперечная сила Q_y принимает в сечении $z = \frac{2}{3}l$ экстремальное значение

$$Q_{y\max} \left(z = \frac{2}{3}l \right) = \frac{2}{3}ql.$$

Значение максимального касательного напряжения для прямоугольного сечения определяется по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{Q_{y\max}}{A} = \frac{ql}{bh}.$$