ОЛИМПИАДА КНИТУ ПО ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКЕ
(разделы «Теоретическая механика» и «Сопротивление материалов»)

Пробный комплект задач

Решение задачи 1.

При координатном способе задания движения точки ее скорость определяется проекциями на оси координат:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 1 - 2\sin 2t;\;\; V_y = \frac{dy}{dt} = 1 - 2\cos\, 2t.$$

Вектор скорости параллелен оси y, когда его проекция на ось x равна нулю. Таким образом, вектор $\overline{V}$ параллелен оси y в моменты, когда

$$1 - 2\sin 2t = 0\,.$$

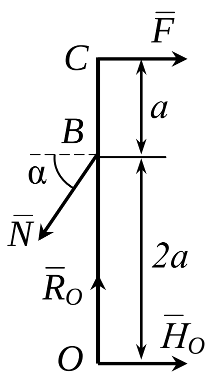
$$\sin 2t = 1/2\,.$$

$$2t = \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \quad 2t = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k.$$

$$t = \frac{\pi}{12} + \pi k; \quad t = \frac{5\pi}{12} + \pi k, \quad k = 0,1,2...\ .$$

Первый такой момент времени равен $t_1 = \dfrac{\pi}{12}$ с.

Решение задачи 2.



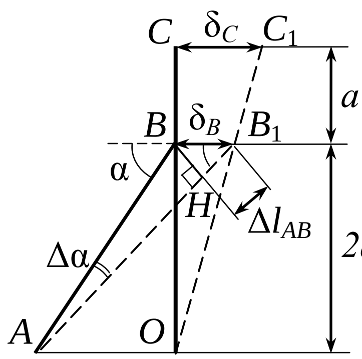
а). Рассмотрим равновесие стержня OC. При этом, отбрасывая стержень AB, вводим силу его реакции $\overline{N}$. Достаточно записать одно уравнение равновесия для моментов:

$$\sum m_{iO} = N\cos\alpha \cdot 2a - F \cdot 3a = 0\,.$$

$$N = \frac{3F}{2\cos\alpha}\,.$$

Это искомая продольная сила в стержне AB.

б). Условие прочности для напряжений в стержне AB при растяжении:



$$\sigma = \frac{N}{A} \le [\sigma].$$

Подставляем сюда выражения для N и площади A:

$$\frac{3F}{2\cos\alpha \cdot \pi d^2/4} \le [\sigma].$$

Допустимая нагрузка:

$$[F] = \frac{\pi d^2[\sigma]\cos\alpha}{6}\,.$$

Обозначим через B_1 и C_1 положения точек B и C после приложения нагрузки $\overline{F}$. Так как по условию перемещение точки C при этой нагрузке мало по сравнению с длиной OC, то перемещения точек C и B (малые дуги окружностей с центром в точке *O*) можно приближенно считать горизонтальными. Обозначим их через δ_C и δ_B, соответственно. В треугольнике ABB_1 угол при вершине *A*: $\Delta\alpha \approx 0$. Поэтому угол при вершине B_1 примерно равен углу наклона *AB*, то есть α.

Обозначим $AB = l$. Опустим высоту BH.

$$AH = AB\cos\Delta\alpha \approx l.$$

$$HB_1 \approx BB_1\cos\alpha = \delta_B\cos\alpha.$$

Удлинение *AB*:

$$\Delta l_{AB} = AB_1 - AB = AH + HB_1 - AB \approx l + \delta_B\cos\alpha - l = \delta_B\cos\alpha.$$

С другой стороны, при наибольшей допустимой нагрузке:

$$\Delta l_{AB} = \varepsilon l = \frac{[\sigma]l}{E}.$$

Приравняем эти два выражения для Δl_{AB}:

$$\delta_B\cos\alpha = \frac{[\sigma]l}{E}.$$

Учтем, что $l = \dfrac{2a}{\sin\alpha}$. Тогда

$$\delta_B = \frac{2[\sigma]a}{E\sin\alpha\cos\alpha}.$$

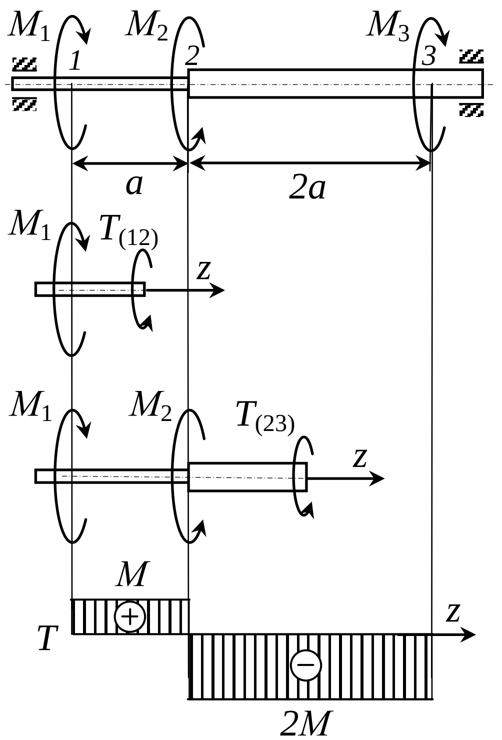
Треугольники OBB_1 и OCC_1 подобны:

$$\frac{CC_1}{BB_1} = \frac{OC}{OB}.$$

$$\delta_C = \frac{OC}{OB}\delta_B = \frac{3a}{2a}\delta_B = 1{,}5\delta_B.$$

Отсюда

$$\delta_C = 1{,}5\cdot\frac{2[\sigma]a}{E\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{6[\sigma]a}{E\sin 2\alpha}.$$



Решение задачи 3.

Условие равновесия вала – уравнение моментов относительно продольной оси *z*:

$$\sum m_{iz} = -M_1 + M_2 - M_3 = 0.$$

$$M_2 = 3M.$$

Применяя метод сечений, построим эпюру внутренних крутящих моментов *T*. На участке $0 \le z \le a$:

$$\sum m_{iz} = T_{(12)} - M_1 = 0.$$

$$T_{(12)} = M.$$

На участке $a \le z \le 3a$:

$$\sum m_{iz} = T_{(23)} - M_1 + M_2 = 0.$$
$$T_{(23)} = M_1 - M_2 = -2M.$$

Углы закручивания левого и правого участков:

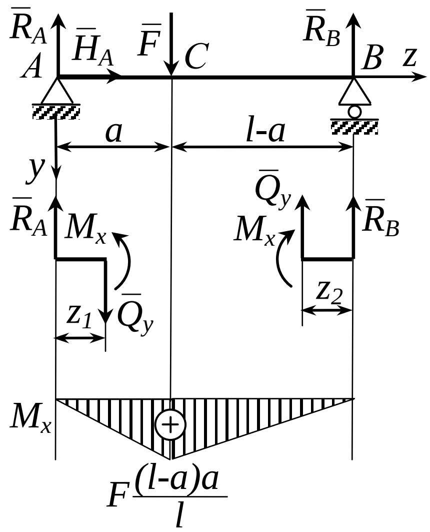
$$\varphi_{(12)} = \frac{T_{(12)}}{GJ_{p(12)}} a = \frac{M}{G\pi d^4/32} a.$$
$$\varphi_{(23)} = \frac{T_{(23)}}{GJ_{p(23)}} 2a = -\frac{2M}{G\pi D^4/32} 2a.$$

По условию задачи:

$$\varphi_{(13)} = \varphi_{(12)} + \varphi_{(23)} = 0.$$
$$\frac{M}{G\pi d^4/32} a - \frac{2M}{G\pi D^4/32} 2a = 0.$$
$$\frac{1}{d^4} = \frac{4}{D^4}.$$
$$\frac{D}{d} = \sqrt{2}.$$

Решение задачи 4.

Составив уравнения равновесия балки, найдем реакции опор во 2-м рассмотренном в условии общем случае, когда сила F приложена на некотором расстоянии a от опоры A:



$$\sum F_{iz} = H_A = 0.$$
$$\sum m_{iA} = -Fa + R_B l = 0.$$
$$R_B = \frac{a}{l} F.$$
$$\sum m_{iB} = F(l-a) - R_A l = 0.$$
$$R_A = \frac{l-a}{l} F.$$

По методу сечений определим изгибающие моменты в поперечных сечениях балки.

Для участка AC, $0 \le z_1 \le a$:

$$\sum m_{ix} = -R_A z_1 + M_x = 0.$$
$$M_x = R_A z_1 = F\frac{l-a}{l} z_1.$$

Для участка BC, $0 \le z_2 \le l-a$:

$$\sum m_{ix} = R_B z_2 - M_x = 0.$$
$$M_x = R_B z_2 = F\frac{a}{l} z_2.$$

Максимальное значение M_x достигается в опасном сечении балки при $z_1 = a$ или $z_2 = l - a$ (индекс «2» указывает на 2-й случай):

$$M_{x\max}^{(2)} = F\frac{(l-a)a}{l}.$$

В частности, для 1-го рассмотренного в условии случая – случая нагружения силой F посередине балки, то есть при $a = l/2$:

$$M_{x\max}^{(1)} = F\frac{l}{4}.$$

Осевые моменты сопротивления прямоугольных сечений:

$$W_x^{(1)} = \frac{I_x^{(1)}}{y_{\max}^{(1)}} = \frac{bh^2}{6} = \frac{2b^3}{3}.$$

$$W_x^{(2)} = \frac{hb^2}{6} = \frac{b^3}{3}.$$

Максимальные нормальные напряжения, возникающие в опасных сечениях:

$$\sigma_{\max}^{(1)} = \frac{\left|M_{x\max}^{(1)}\right|}{W_x^{(1)}} = \frac{3Fl}{8b^3}.$$

$$\sigma_{\max}^{(2)} = \frac{\left|M_{x\max}^{(2)}\right|}{W_x^{(2)}} = \frac{3F(l-a)a}{lb^3}.$$

Из условия их равенства:

$$\frac{3Fl}{8b^3} = \frac{3F(l-a)a}{lb^3}.$$

$$l^2 = 8(l-a)a.$$

Решаем квадратное уравнение относительно a:

$$8a^2 - 8la + l^2 = 0.$$

$$a = \frac{8l \pm \sqrt{64l^2 - 32l^2}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}l.$$

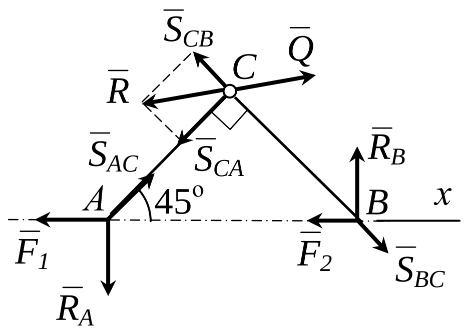
При условии задачи $a \le l/2$ получим окончательно:

$$a = \frac{2-\sqrt{2}}{4}l.$$

Решение задачи 5.

1-й способ.

Рассмотрим равновесие узлов *A*, *B* и *C* по отдельности.



Уравнение равновесия системы сходящихся сил, приложенных к точке *A*, в проекции на горизонтальную ось *x*:

$$\sum F_{ix} = S_{AC}\cos 45^o - F_1 = 0,$$

откуда $S_{AC} = \sqrt{2}\,F_1$.

Из аналогичного уравнения для точки *B* получаем: $S_{BC} = \sqrt{2}\,F_2$.

Условие равновесия системы сходящихся сил, приложенных к точке *C*: $\overline{R} + \overline{Q} = 0$, где $\overline{R} = \overline{S}_{CA} + \overline{S}_{CB}$ (при этом учли 3-й закон Ньютона). Так как треугольник *ABC* равнобедренный с острыми углами по $45°$, то $\overline{S}_{CA} \perp \overline{S}_{CB}$, тогда

$$R = \sqrt{S_{CA}^2 + S_{CB}^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\,F_1\right)^2 + \left(\sqrt{2}\,F_2\right)^2} = \sqrt{2(F_1^2 + F_2^2)}\,.$$

Так как $Q = R$, то

$$Q = \sqrt{2(F_1^2 + F_2^2)}\,.$$

2-й способ (краткое изложение).

Силу $\overline{Q}$ разложим по осям: $\overline{Q} = \overline{Q}_x + \overline{Q}_y$. Записываем для системы *ABC* уравнения $\sum F_{ix} = 0$, $\sum m_{iA} = 0$, откуда найдем

$$Q_x = F_1 + F_2\,.$$

$$Q_y = Q_x - 2N_B\,.$$

Записываем для *BC* уравнение $\sum m_{iC} = 0$, откуда

$$N_B = F_2\,.$$

Тогда

$$Q_y = F_1 - F_2\,.$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \sqrt{2(F_1^2 + F_2^2)}\,.$$