

Федеральное агентство по образованию
Казанский государственный технологический университет

М.Н.Серазутдинов, Ф.С. Хайруллин

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛ

Учебное пособие

Казань 2009

УДК 539.3

Построение эпюр внутренних сил: Учебное пособие / М.Н.Серазутдинов, Ф.С. Хайруллин; Казан. гос. технол. ун-т. Казань, 2009.

Учебное пособие содержит сведения по дисциплине «Сопротивление материалов», необходимые для выполнения самостоятельной работы студентами. Рассмотрены вопросы построения эпюр внутренних силовых факторов, изложены теоретические основы расчетов балки при плоском изгибе, вала при изгибе с кручением, статически неопределимых систем, стержневых систем на изгиб и устойчивость. Представлены задания к расчетным работам. Приведены решения задач.

Предназначены для студентов всех форм обучения механических специальностей.

Подготовлены на кафедре теоретической механики и сопротивления материалов КГТУ.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Казанского государственного технологического университета

Рецензенты: д-р физ.-мат.наук, проф. Каюмов Р.А.
д-р техн. наук, проф. Шамсутдинов Ф.А.

ISBN 0-0000-0

© Казанский государственный
технологический университет, 2009 г.

1. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛ

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Для определения внутренних сил в стержне используется метод сечений. В том месте стержня, где требуется определить внутренние силы, проводится сечение, перпендикулярное к оси стержня, и стержень рассекается по данному сечению на две части. Одна из частей отбрасывается. Воздействие отброшенной части на оставшуюся отсеченную часть заменяется внутренними силами N , Q_x , Q_y и моментами M_x , M_y , T (рис. 1.1), которые называются внутренними силами (усилиями). Силу N , приложенную перпендикулярно к сечению, называют **продольной (нормальной) силой**. Силы Q_x , Q_y , действующие перпендикулярно к оси стержня, называются **поперечными силами**. Моменты M_x , M_y – **изгибающие моменты**, момент $T = M_z$ – **крутящий момент**.

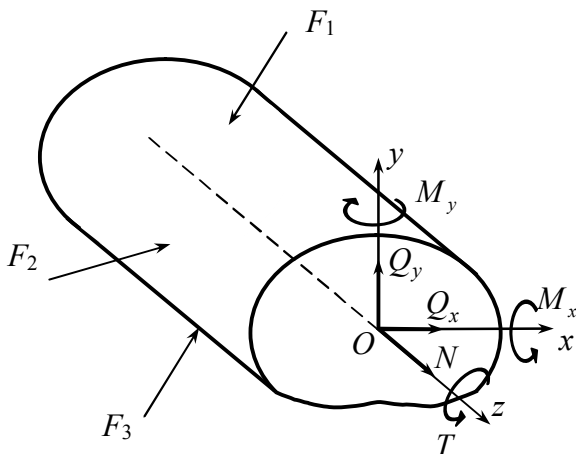


Рис. 1.1

Рассматривается равновесие оставшейся части. Для нее записываются уравнения равновесия в виде суммы проекций всех сил (включая реакции опор) на оси ox , oy , oz и суммы моментов относительно осей ox , oy , oz :

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0, \\ \sum m_{ix} = 0, \quad \sum m_{iy} = 0, \quad \sum m_{iz} = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из этих уравнений находятся внутренние силы.

Графики, показывающие распределение внутренних сил вдоль оси стержня, называются **эпюрами** внутренних сил.

Определение внутренних усилий и построение эпюр проводят по участкам. **Границами участков являются** концы стержня, а также точки, в которых происходит излом оси стержневой системы, изменяется характер нагружения, приложены сосредоточенные сила или момент.

На каждом участке выбирается система координат $oxyz$, ось oz которой направляется вдоль оси стержня, проходящей через центр тяжести поперечного сечения.

В дальнейшем рассматриваются плоские стержневые системы, для которых $Q_x = 0$, $M_y = 0$. Используем обозначения: $Q = Q_y$, $M = M_x$.

Для однозначного определения внутренних сил вводятся следующие правила знаков:

- продольная сила N считается положительной, если она вызывает растяжение стержня;
- поперечная сила Q считается положительной, если в сечении с внешней нормалью, направленной по оси oz , сила Q направлена по оси oy . В сечении, внешняя нормаль к которому направлена противоположно оси oz , положительная сила Q направлена в сторону противоположную оси oy .
- изгибающий момент M считается положительным, если он вызывает растяжение стержня в точках с положительной координатой y ;
- крутящий момент T считается положительным, если при взгляде со стороны продольной оси на торец отсеченной части

стержня он стремится повернуть его против хода часовой стрелки.

Положительные величины N , Q , M показаны на рис. 1.2.

Как видно из рис. 1.2, положительные направления Q и M зависят от направления оси y .

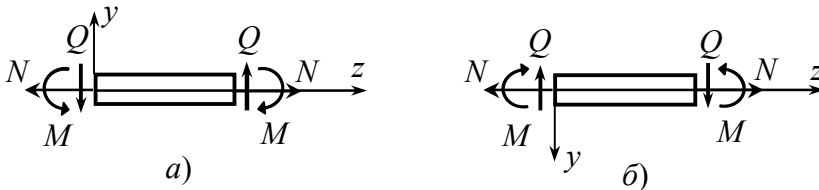


Рис. 1.2

Для каждого силового фактора N , Q , M , T строится отдельная эпюра. При этом соблюдаются следующие правила:

1. Эпюры строятся на базисных линиях, по форме повторяющих форму оси стержня.

2. Ординаты эпюр откладываются на перпендикуляре к базисной линии.

3. На эпюрах в характерных точках проставляются числа, показывающие величины ординат. Знак внутренних сил указывается в кружочке на площади эпюр.

4. Эпюры штрихуются по нормали к базисной линии.

5. Проводится проверка правильности построения эпюр.

Основные правила, используемые для **проверки правильности построения эпюр**, формулируются следующим образом:

1. Скачки в эпюре изгибающего момента M будут в точках, где приложены сосредоточенные моменты, а скачки в эпюре поперечной силы Q возникают в точках действия сосредоточенных сил, перпендикулярных к оси стержня.

2. Если в эпюре поперечной силы имеется скачок, то в этой точке эпюра изгибающего момента имеет излом.

3. Изгибающий момент M достигает экстремума в сечении, для которого $Q = 0$.

4. На участках, где поперечная сила $Q > 0$, изгибающий момент M возрастает при движении в направлении оси oz , и наоборот.

5. Если на участке действует равномерно распределенная нагрузка q , то Q будет изменяться по линейному закону, а M – по закону квадратичной параболы.

6. На тех участках, где $Q = 0$, изгибающий момент M постоянен.

7. В точках излома оси стержневой системы, а также в точках ветвления стержней, правильность построения эпюр проверяется с использованием уравнений равновесия. Указанные точки мысленно вырезаются сечениями, близкими к ним. Воздействие оставшихся частей стержня на выделенный элемент заменяется внутренними силами N , Q , M . Проверяется выполнение уравнений равновесия

$$\sum m_i = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0, \quad (1.2)$$

записанных для этого элемента. Значения сил и моментов, входящих в эти уравнения, берутся из построенных эпюр внутренних сил.

Прежде чем приступить к построению эпюр, следует определить реакции опор. При определении внутренних сил реакции опор рассматриваются как внешние силы. В тех случаях, когда стержневая система закреплена только в одной точке, реакции опоры можно не определять.

Способы закрепления стержня и возникающие реакции опор показаны на рис. 1.3.

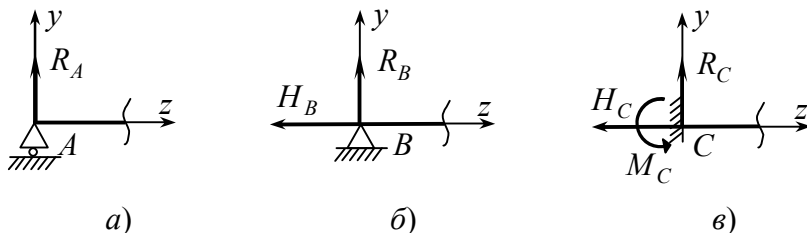


Рис. 1.3

В шарнирно-подвижной опоре (рис. 1.3а), перемещение точки A в вертикальном направлении равно нулю и возникает одна вертикальная реакция опоры R_A .

В шарнирно-неподвижной опоре (рис. 1.3б) перемещение точки B в плоскости должны быть равными нулю, поэтому возникают две реакции R_B , H_B . В заделке (рис. 1.3в) в точке C невозможны перемещения и поворот стержня – возникают три реакции: силы R_C , H_C и момент M_C .

Для нахождения реакций записывают уравнения равновесия для всего стержня в виде суммы моментов относительно некоторых точек, например, $\sum m_{iA} = 0$, или суммы сил, например, $\sum F_{iz} = 0$. Для проверки правильности определения реакций записывают дополнительное уравнение равновесия системы.

1.2. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ПРОДОЛЬНЫХ СИЛ

Построим эпюру продольной силы N для стержня, показанного на рис. 1.4а при $F_1 = F_2 = 20$ кН, $q = 10$ кН/м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$ м, $l_3 = 3$ м.

Для определения внутренних усилий стержень разбивается на участки. В рассматриваемом случае имеются три участка AB , BC , CD (рис. 1.4а).

Построение эпюр начинаем с нижнего незакрепленного конца стержня.

Участок I, $0 \leq z_1 \leq 1$ м.

Проводя в произвольной точке участка сечение 1-1, отсекаем нижнюю часть стержня (рис. 1.4а,б) длиной z_1 . Воздействие оставшейся части стержня на отсеченную заменяем внутренними силами. Используя уравнения равновесия для отсеченной части стержня, можно убедиться, что в сечении 1-1 действует только продольная сила N . Продольную силу N в соответствии с принятым правилом знаков рисуем так, чтобы она растягивала отсеченную часть, т.е. чтобы она была по-

ложительной. Для отсеченной части записываем уравнение равновесия:

$$\sum F_z = N - F_1 + qz_1 = 0,$$

отсюда

$$N = F_1 - qz_1 = 20 - 10z_1.$$

В этом соотношении слагаемое F_1 входит со знаком плюс, а qz_1 – со знаком минус, что соответствует правилу знаков для продольной силы. Относительно сечения 1-1 сила F_1 вызывает растяжение материала, а нагрузка q – сжатие. Слагаемое qz_1 является равнодействующей силой распределенной нагрузки q , действующей на отсеченной части.

Для построения графика подсчитываем N в двух точках:

$$\text{при } z_1 = 0, \quad N = 20 - 10 \cdot 0 = 20 \text{ кН};$$

$$z_1 = 1 \text{ м}, \quad N = 10 \text{ кН}.$$

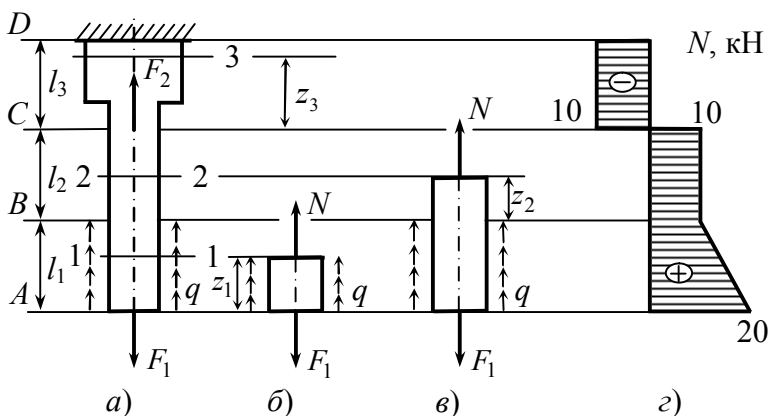


Рис. 1.4

Участок II, $0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м}.$

Проводя сечение 2-2, отсекаем часть стержня на расстоянии z_2 от начала участка (рис. 1.4а,в) и находим

$$\sum F_z = N - F_1 + ql_1 = 0,$$

$$N = F_1 - ql_1 = 20 - 10 \cdot 1 = 10 \text{ кН.}$$

Участок III, $0 \leq z_3 \leq 3 \text{ м.}$

Аналогичным образом находим

$$N = F_1 - ql_1 - F_2 = 20 - 10 \cdot 1 - 20 = -10 \text{ кН.}$$

Используя полученные числовые данные и соблюдая правила оформления, строим эпюру продольной силы (рис. 1.4з).

Как видно из эпюры, на участке распределенной нагрузки величина N изменяется по линейному закону, а в точках приложения сосредоточенных сил имеются скачки, равные по величине значениям этих сил.

1.3. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР КРУТЯЩИХ МОМЕНТОВ

Построим эпюру T для стержня, показанного на рис. 1.5. Пусть $M_1 = 5 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $m = 1 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $l_1 = 2 \text{ м}$, $l_2 = l_3 = 1 \text{ м}$.

Разбиваем длину стержня на три участка.

Участок I, $0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м.}$

Проводим сечение на расстоянии z_1 от правого конца стержня (рис. 1.5,а) и рассматриваем отсеченную часть (рис. 1.5б).

Крутящий момент T в сечении направлен в соответствии с принятым правилом знаков. Если с левой стороны смотреть в торец отсеченной части, то момент T вращается против хода часовой стрелки.

Из уравнения равновесия отсеченной части

$$\sum m_i z = T + mz_1 = 0$$

находим

$$T = -mz_1 = -z_1.$$

Здесь mz_1 – равнодействующая распределенного момента m . Для построения эпюры подсчитываем значения T в двух точках:

$$\begin{aligned} \text{при } z_1 = 0, \quad T &= 0; \\ z_1 = 2 \text{ м}, \quad T &= -2 \text{ кН}\cdot\text{м}; \end{aligned}$$

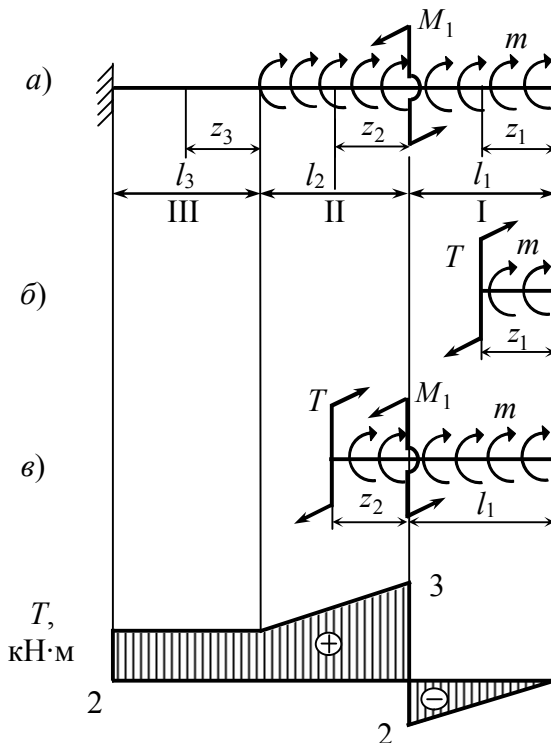


Рис. 1.5

Участок II, $0 \leq z_2 \leq 1$ м.

На втором участке проводим сечение на расстоянии z_2 от начала второго участка. Для отсеченной части (рис. 1.5в) имеем

$$\sum m_{iz} = T - M_1 + m(l_1 + z_2) = 0.$$

Следовательно

$$T = M_1 - m(l_1 + z_2) = 3 - z_2.$$

При $z_2 = 0$, $T = 3$ кН·м;

$z_2 = 1$ м, $T = 2$ кН·м;

Участок III, $0 \leq z_3 \leq 1$ м.

$$T = m(l_1 + l_2) - M_1 = -2 \text{ кН·м}$$

Эпюра T представлена на рис. 1.5. Как видно, на участке действия равномерно распределенного момента величина T изменяется по линейному закону, а в точке приложения сосредоточенного момента M_1 происходит скачок в эпюре, равный по величине значению M_1 .

1.4. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛ ДЛЯ БАЛКИ

Изгибом называется такой вид нагружения стержня, при котором происходит изменение кривизны его продольной оси. Стержень при изгибе называется балкой. Рассмотрим плоский изгиб балки, при котором внешние силы и реакции опор действуют в одной плоскости и в поперечных сечениях возникают поперечная сила Q и изгибающий момент M .

Построим эпюры Q и M для балки, представленной на рис. 1.6, для $l_1 = 2$ м, $l_2 = 4$ м, $l_3 = 2$ м, $q_1 = 5$ кН/м, $q_2 = 3$ кН/м, $M_0 = 4$ кН·м, $F = 3$ кН.

При заданных закреплениях в опорах B и C балки возникают силы реакции R_B , R_C , H_C (рис. 1.6).

Определим реакции из уравнений равновесия балки, записанных для моментов относительно точек B и C и для горизонтальных сил:

$$\sum m_{iB} = -q_1 l_1 \frac{l_1}{2} - q_2 (l_2 + l_3) \frac{l_2 + l_3}{2} + F l_2 + R_C (l_2 + l_3) + M_0 = 0.$$

$$\sum m_{iC} = -q_1 l_1 \left(\frac{l_1}{2} + l_2 + l_3 \right) - R_B (l_2 + l_3) + q_2 (l_2 + l_3) \frac{l_2 + l_3}{2} - F l_3 + M_0 = 0.$$

$$\sum F_{ix} = H_C = 0.$$

Из этих уравнений получаем

$$R_C = \frac{q_1 l_1^2 + q_2 (l_2 + l_3)^2 - 2Fl_2 - 2M_0}{2(l_2 + l_3)} = 6 \text{ кН.}$$

$$R_B = \frac{-q_1 l_1 (l_1 + 2l_2 + 2l_3) + q_2 (l_2 + l_3)^2 - 2Fl_3 + 2M_0}{2(l_2 + l_3)} = -7 \text{ кН.}$$

$$H_C = 0.$$

Для проверки правильности определения реакций R_B и R_C составим уравнение равновесия в виде проекций всех сил на ось Y :

$$\sum Y = -q_1 l_1 - R_B + q_2 l_2 - F - R_C = 0.$$

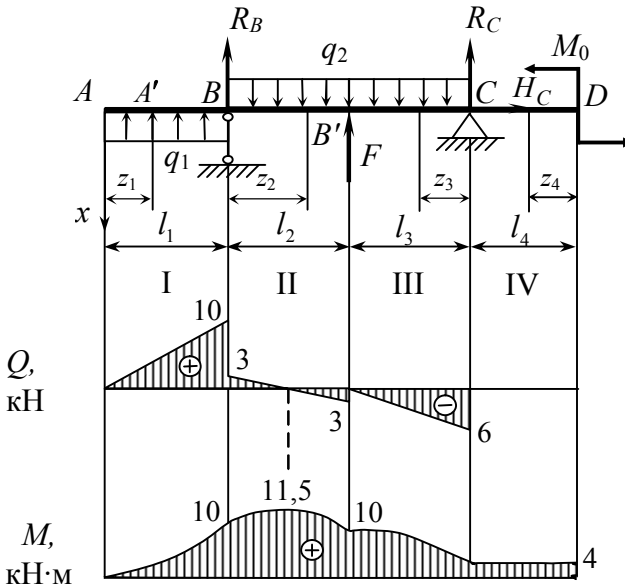


Рис. 1.6

Подставляя числовые значения параметров, находим

$$-5 \cdot 2 + 7 + 3 \cdot 4 - 3 - 6 = 19 - 19 = 0.$$

Уравнение равновесия удовлетворяется, следовательно, реакции R_B и R_C определены правильно.

В рассматриваемом случае при построении эпюр балка разделяется на четыре участка (рис. 1.6).

Участок I, $0 \leq z_1 \leq 2$ м.

Проводя сечение на расстоянии z_1 , от левого конца балки отсекаем часть балки AA' (рис. 1.6; 1.7a). Воздействие отсеченной части стержня на оставшуюся, заменяем поперечной силой Q и моментом M (рис. 1.7). Направления Q и M выбраны в соответствии с принятым правилом знаков. Величины поперечной силы и момента определяем из уравнений равновесия элемента балки AA' .

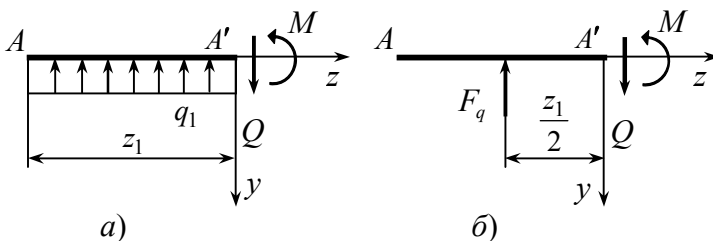


Рис. 1.7

$$\sum F_{iy} = Q - F_q = 0,$$

$$\sum m_{ix} = M - F_q \frac{z_1}{2} = 0,$$

где $F_q = q_1 \cdot z_1$ – равнодействующая распределенной нагрузки q_1 ,

$\sum m_{ix}$ – сумма моментов сил относительно точки сечения.

При определении момента распределенная нагрузка q_1 заменяется сосредоточенной силой F_q (рис. 1.7,б), приложенной в середине участка нагрузки q_1 (середина участка AA'), для которой плечо относительно сечения равно $\frac{z_1}{2}$.

Из уравнений равновесия получим:

$$Q = F_q = q_1 z_1 = 5z_1, \quad M = F_q \frac{z_1}{2} = q_1 \frac{z_1^2}{2} = \frac{5}{2} z_1^2.$$

Для построения эпюр Q и M подсчитаем значения этих величин в точках:

при $z_1 = 0, \quad Q = 0; \quad M = 0;$
 $z_1 = 1 \text{ м}, \quad M = 5/2 = 2,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$
 $z_1 = 2 \text{ м}, \quad Q = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН}; \quad M = 5 \cdot 2 = 10 \text{ кН}\cdot\text{м};$
 Участок II, $0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м}.$

Проводя сечение на расстоянии z_2 от начала участка (рис. 1.6), отсечем часть балки AB' (рис. 1.8а).

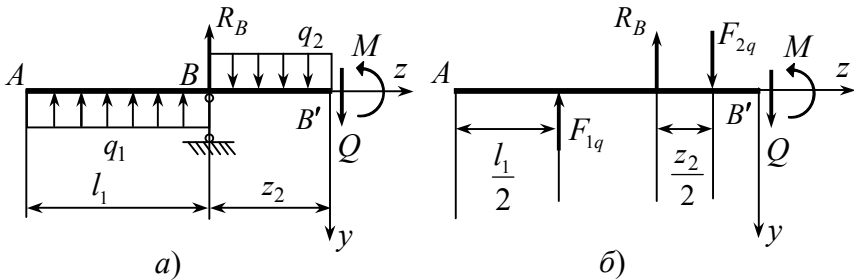


Рис. 1.8

Заменяя распределенные нагрузки q_1 и q_2 их равнодействующими (рис. 1.8б) $F_{1q} = q_1 l_1$, $F_{2q} = q_2 z_2$, получаем, что нужно определить Q и M в сечении B' , для случая, когда на балку действуют сосредоточенные силы F_{1q} , R_B , F_{2q} .

Из уравнений равновесия отсеченной части

$$\sum F_{iy} = Q - F_{1q} - R_B + F_{2q} = 0,$$

$$\sum m_x = M - F_{1q} \left(\frac{l_1}{2} + z_2 \right) - R_B z_2 + F_{2q} \frac{z_2}{2} = 0,$$

находим

$$Q = F_{q1} + R_B - F_{2q} = q_1 l_1 + R_B - q_2 z_2 = 3 - 3z_2.$$

$$M = F_{q1} \left(\frac{l_1}{2} + z_2 \right) + R_B z_2 - F_{2q} \frac{z_2}{2} = 10 + 3z_2 - \frac{3}{2} z_2^2.$$

При $z_2 = 0$, $Q = 3$ кН; $M = 10$ кН·м;

$z_2 = 1$ м, $M = 11,5$ кН·м;

$z_2 = 2$ м, $Q = -3$ кН; $M = 10$ кН·м;

Участок III, $0 \leq z_3 \leq 3$ м.

Можно убедиться, что при $z_1 = 1$ м $Q = 0$, следовательно значение $M = 11,5$ кН·м на этом участке является экстремальным.

Проведем сечение на расстоянии z_3 от точки C (рис. 1.6) и рассмотрим правую отсеченную часть (рис. 1.9а).

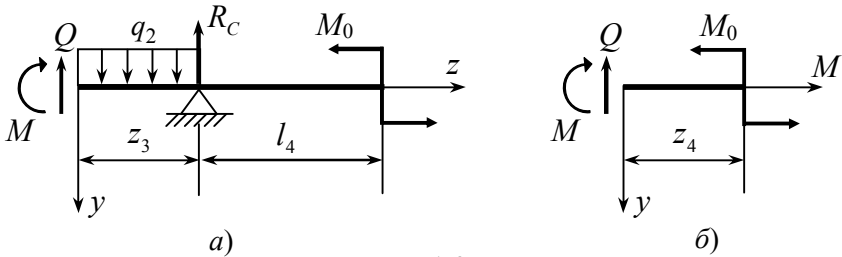


Рис. 1.9

Так как рассматривается правая часть и ось z направлена против внешней нормали, то в соответствии с принятыми правилами знаков направления силы Q и момента M меняются на противоположные.

Записываем уравнение равновесия

$$\sum F_{iy} = -Q + q_2 z_3 - R_C = 0,$$

$$\sum m_{ix} = -M + R_C z_3 - q_2 z_3 \frac{z_3}{2} + M_0 = 0.$$

откуда

$$Q = -R_C + q_2 z_3 = -6 + 3z_3, \quad M = M_0 + R_C z_3 - q_2 \frac{z_3^2}{2} = 4 + 6z_3 - \frac{3}{2} z_3^2.$$

При $z_3 = 0$, $Q = -6$ кН; $M = 4$ кН·м;

$z_3 = 1$ м, $M = 8,5$ кН·м;

$z_3 = 2$ м, $Q = 0$; $M = 10$ кН·м.

Участок IV, $0 \leq z_4 \leq 2$ м.

Для отсеченной части на четвертом участке (рис. 1.9б)

$$Q = 0, \quad M = M_0 = 4 \text{ кН·м.}$$

На основе полученных числовых результатов строятся эпюры Q и M (рис. 1.6).

Проверяя правильность построенных эпюр, можно убедиться, что сформулированные условия проверки построения эпюр выполняются.

В частности отметим следующее:

1. На участках, где поперечная сила $Q > 0$, изгибающий момент M возрастает, а на участках, где $Q < 0$ – убывает.
2. Скачки в эпюре Q в точках, где приложены сосредоточенные силы, а величина скачка равна величине приложенной силы.
3. Момент принимает экстремальное значение $M = 11,5$ кН·м в сечении, для которого $Q = 0$.

1.5. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛ ДЛЯ РАМ

Рамой называется стержневая система состоящая из прямолинейных стержней жестко соединенных между собой в узлах.

При построении эпюр внутренних сил рама разбивается на прямолинейные участки. На каждом участке вводится своя система координат с осью oz , направленной вдоль оси стержня. Эпюры на участках строятся с использованием правил, принятых для балки. Отметим, что при составлении выражений для N , Q , M учитываются силы и моменты, действующие на всех участках отсеченной части рамы.

Правильность построения эпюр для рам проверяется на прямолинейных участках так же, как и для балки. Кроме этого, проводят проверку выполнения условий равновесия в узлах рамы.

Построим эпюры внутренних сил для рамы, представленной на рис. 1.10, для $F = 5$ кН, $M_0 = 10$ кН·м, $q_1 = q_2 = 2$ кН·м, $a = 1$ м, $b = 2$ м.

Как видно из рисунка, в точке A рамы имеется шарнирно-неподвижная опора и поэтому здесь возникают две силы реакции R_A и H_A . В точке D – шарнирно-подвижная опора и поэтому возникает только одна вертикальная сила реакции R_D (рис. 1.11а).

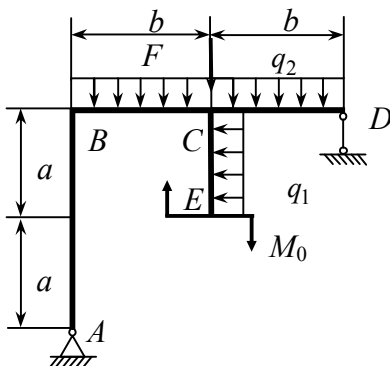


Рис. 1.10

Используя уравнения равновесия, определим величины R_A , H_A , R_D . Из уравнения моментов

$$\sum m_{iA} = R_D \cdot 2b - F \cdot b - q_2 \cdot 2b \cdot b + q_1 a \left(a + \frac{a}{2} \right) - M_0 = 0,$$

получаем
$$R_D = \frac{F \cdot b + 2q_2 \cdot b^2 + M_0 - q_1(a^2 + a^2/2)}{2b} = 8,25 \text{ кН.}$$

Аналогично

$$\sum m_{iD} = H_A \cdot 2a - R_A \cdot 2b - M_0 - q_1 a \frac{a}{2} + F \cdot b + q_2 \cdot 2b \cdot b = 0,$$

$$R_A = \frac{H_A \cdot 2a - M_0 - q_1 a^2 / 2 + F \cdot b + 2q_2 \cdot b^2}{2b} = 4,75 \text{ кН.}$$

Проектируя силы на горизонтальную ось,

$$\sum F_i = H_A - q_1 \cdot a = 0,$$

находим $H_A = q_1 \cdot a = 2$ кН.

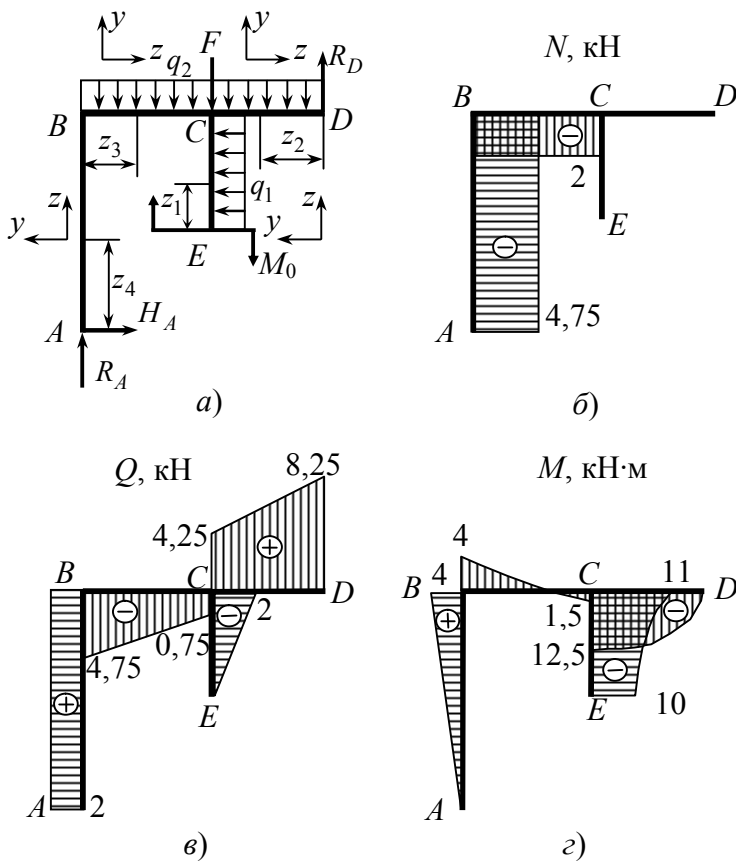


Рис. 1.11

С целью проверки правильности определения реакций, составим уравнение равновесия, которое не использовалось при нахождении реакций. Запишем уравнение моментов относительно точки C:

$$\sum m_{iC} = H_A \cdot 2a - R_A \cdot b + q_2 b \frac{b}{2} - q_2 b \frac{b}{2} + R_D b - q_1 a \frac{a}{2} - M_0 = 0.$$

Подставляя числовые значения параметров, получаем

$$2 \cdot 2 - 4,75 - 2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 + 8,25 \cdot 2 - 2 \cdot 0,5 - 10 = 24,5 - 24,5 = 0.$$

Уравнение равновесия удовлетворяется, следовательно, R_A , M_A и R_D определены правильно.

Для построения эпюр N , Q , M раму разбиваем на участки EC , DC , CB , AB и выбираем на каждом из них систему координат (рис. 1.11а).

Участок EC , $0 \leq z_1 \leq 1$ м

Для отсеченной части (рис. 1.12) действие отброшенной части заменяем продольной силой N , поперечной силой Q и изгибающим моментом M . Записываем уравнение равновесия:

$$\sum F_{iz} = N = 0,$$

$$\sum F_{iy} = Q + q_1 z_1 = 0,$$

$$\sum m_{ix} = -M - M_0 - q_1 \frac{z_1^2}{2} = 0.$$

Следовательно,

$$N = 0, \quad Q = -q_1 z_1, \quad M = -M_0 - q_1 \frac{z_1^2}{2}.$$

При $z_1 = 0 \quad Q = 0, \quad M = -10 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$z_1 = 0,5 \text{ м}, \quad M = -10,25 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$z_1 = 1 \text{ м}, \quad Q = 2 \text{ кН}, \quad M = -11 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Участок CD , $0 \leq z_2 \leq 2$ м.

Уравнение равновесия:

$$\sum F_{iz} = -N = 0,$$

$$\sum F_{iy} = -Q + R_D - q_2 z_2 = 0,$$

$$\sum m_{ix} = M - q_2 \frac{z_2^2}{2} + R_D z_2 = 0.$$

Следовательно

$$N = 0, \quad Q = R_D - q_2 z_2, \quad M = q_2 \frac{z_2^2}{2} - R_D z_2.$$

При $z_2 = 0 \quad Q = 8,25 \text{ кН}, \quad M = 0;$

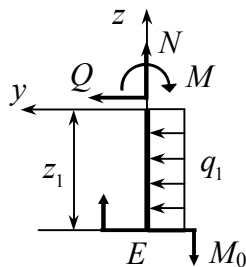
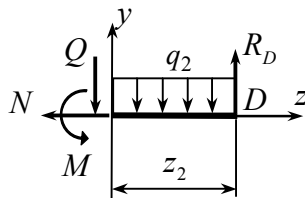
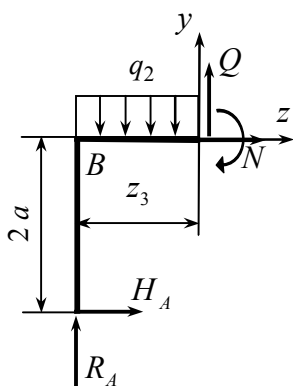


Рис. 1.12





$$z_2 = 1 \text{ м}, \quad M = -7,25 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$z_2 = 2 \text{ м}, \quad Q = 4,25 \text{ кН},$$

$$M = -12,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок BC, $0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}.$

$$\sum F_{iz} = N + H_A = 0,$$

$$\sum F_{iy} = Q - q_2 z_3 + R_A = 0,$$

$$\sum m_{ix} = -M + q_2 z_3 \frac{z_3}{2} - R_A z_3 + H_A 2a = 0.$$

Находим

$$N = -H_A = -2 \text{ кН}.$$

$$Q = q_2 z_3 - R_A, \quad M = q_2 \frac{z_3^2}{2} - R_A z_2 + H_A 2.$$

При $z_3 = 0$, $Q = -4,75 \text{ кН}, \quad M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$z_3 = 1 \text{ м}, \quad M = 0,25 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$z_3 = 2 \text{ м}, \quad Q = -0,75 \text{ кН}, \quad M = -1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Участок AB, $0 \leq z_4 \leq 2 \text{ м}.$

$$\sum F_z = N + R_A = 0,$$

$$\sum F_y = Q - H_A = 0,$$

$$\sum m_x = -M + H_A z_4 = 0.$$

Следовательно

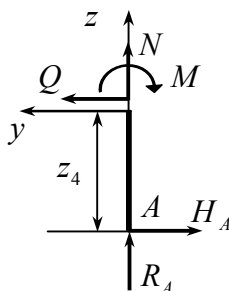
$$N = -R_A = -4,75 \text{ кН}, \quad Q = H_A = 2 \text{ кН},$$

$$M = H_A z_4.$$

При $z_4 = 0 \quad M = 0;$

$z_4 = 2 \text{ м}, \quad M = 4 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

На основе полученных числовых результатов



строятся эпюры N , Q , M (рис. 1.11, б, в, г).

Проверим выполнение условий равновесия в узле B . Вырежем узел сечениями, близкими к точке B . Воздействие остальной части стержневой системы заменим внутренними силами и моментами: N_{AB} , Q_{AB} , M_{AB} , N_{CB} , Q_{CB} , M_{CB} (рис. 1.13). На рис. 1.13 показаны положительные направления действия этих сил и моментов. Значения и знак внутренних сил N_{AB} , Q_{AB} , M_{AB} , N_{CB} , Q_{CB} , M_{CB} ,

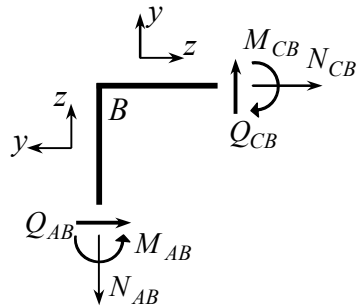


Рис. 1.13

M_{CB} определяются из построенных эпюр (рис. 1.11). Как видно из рисунка в точке B $N_{CB} = -2$ кН, $Q_{CB} = -4,75$ кН, $M_{CB} = 4$ кН·м, $N_{AB} = -4,75$ кН, $Q_{AB} = 2$ кН, $M_{AB} = 4$ кН·м.

Уравнения равновесия узла (проекции сил на вертикальную и горизонтальную оси) имеют вид:

$$\sum F_{iB} = -N_{AB} + Q_{CB} = 4,75 - 4,75 = 0$$

$$\sum F_{i\Gamma} = Q_{AB} + N_{CB} = 2 - 2 = 0$$

Записывая уравнение статики в виде суммы моментов относительно точки B , получаем

$$\sum m_{iB} = M_{AB} - M_{CB} = 4 - 4 = 0.$$

Отметим, что в последнее уравнение не введены слагаемые – моменты от сил N_{AB} , Q_{AB} , N_{CB} , Q_{CB} , т.к. узел в точке B вырезан сечениями близкими к нему и моменты от этих сил можно считать равными нулю.

Все уравнения равновесия для выделенного узла выполняются. В окрестности точки B эпюры построены правильно.

Проверим выполнение условий равновесия в узле C . Близкими к точке C сечениями вырезаем узел. Воздействие оставшейся части рамы на узел заменяем внутренними силами и моментами (рис. 1.14).

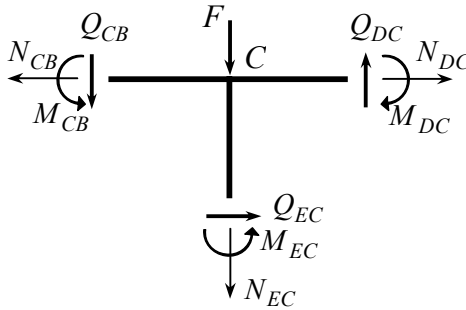


Рис. 1.14

На рис. 1.12 показано направление действия положительных внутренних сил. Значения величин N_{DC} , N_{CB} , N_{EC} , Q_{DC} , Q_{EC} , Q_{CB} , M_{DC} , M_{CB} , M_{EC} определяются из эпюр. Как видно из рис. 1.11

$$N_{DC} = 0, \quad Q_{DC} = 4,25 \text{ кН}, \quad M_{DC} = -12,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$N_{EC} = 0, \quad Q_{EC} = -2 \text{ кН}, \quad M_{EC} = -11 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$N_{CB} = -2 \text{ кН}, \quad Q_{CB} = -0,75 \text{ кН}, \quad M_{CB} = -1,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Составляя уравнение равновесия для выделенного узла, имеем

$$\sum F_B = -Q_{CB} - F + Q_{DC} - N_{EC} = 0,75 - 5 + 4,25 - 0 = 0.$$

$$\sum F_T = -N_{CB} + Q_{EC} + N_{DC} = 2 - 2 + 0 = 0.$$

$$\sum M_C = M_{CB} + M_{EC} - M_{DC} = -1,5 - 11 + 12,5 = 0.$$

Все уравнения равновесия выполняются, следовательно, в окрестности узла C эпюры построены правильно.

1.6. ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Для кривого стержня, продольная ось которого является частью окружности радиуса R (рис. 1.15), построить эпюры N , Q , M , при $\alpha = 30^\circ$, $F = 2 \text{ кН}$, $R = 1 \text{ м}$.

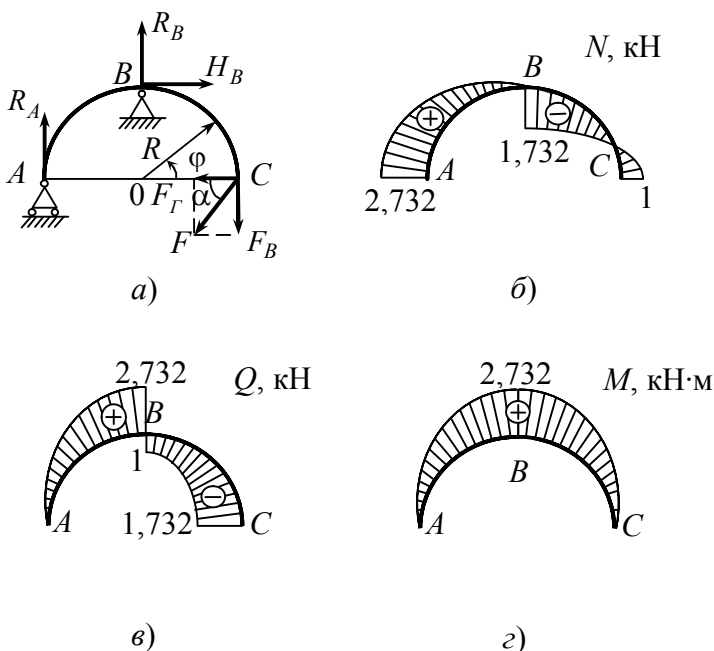


Рис. 1.15

Отметим, что в криволинейных стержнях продольная сила N направлена по касательной, а поперечная сила Q – по нормали к оси стержня.

Эпюры внутренних сил для кривого стержня строятся с использованием правил, принятых для прямолинейного стержня.

Положение сечения определяется углом φ . Для удобства, силу F разложим на горизонтальную F_G и вертикальную F_B составляющие:

$$F_G = F \cos \alpha \approx 1,732, \quad F_B = F \sin \alpha = 1 \text{ кН}.$$

В опорах A и B стержня возникают силы реакции R_A , R_B , H_B , которые определяются из уравнений равновесия.

$$\begin{aligned} \sum m_{iB} &= -R_A \cdot R - F_B \cdot R - F_G \cdot R = 0, \\ R_A &= -(F_B + F_G) = -2,732 \text{ кН}, \end{aligned}$$

$$\sum F_T = H_B - F_T = 0,$$

$$H_B = F_T = 1,732 \text{ кН.}$$

$$\sum F_B = R_A + R_B - F_B = 0,$$

$$R_B = F_B - R_A = 3,732 \text{ кН.}$$

Проверим правильность определения реакций.

$$\sum m_{IC} = -R_A \cdot 2R - R_B \cdot R - H_B \cdot R = 0,$$

$$2,732 \cdot 2 - 3,732 - 1,732 = 0.$$

Реакции определены правильно.

При построении эпюр стержень разделяется на участки.

$$\text{Участок } CB, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq 90^\circ.$$

Положение сечения определяется углом φ_1 , который отсчитывается от прямой OC против часовой стрелки.

Проводя сечение, отсекаем участок стержня CC' (рис. 1.16а). Воздействие отброшенной части стержня на участок CC' заменяем внутренними силами N , Q , M .

Записываем уравнение равновесия отсеченной части:

$$\sum F_{iz} = -N + F_B \cdot \cos \varphi_1 - F_T \cdot \sin \varphi_1 = 0,$$

$$\sum F_{iy} = -Q - F_B \cdot \sin \varphi_1 - F_T \cdot \cos \varphi_1 = 0,$$

$$\sum m_{ix} = M - F_B \cdot CD - F_T \cdot C'D = 0.$$

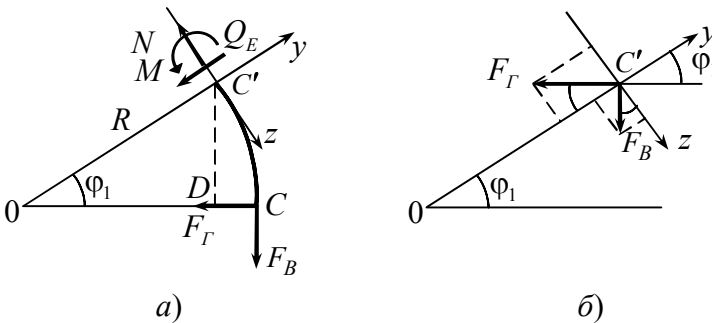


Рис. 1.16

Для определения проекций силы F_G , F_B из уравнений равновесия находим (рис. 1.16а, б):

$$N = F_B \cos \varphi_1 - F_G \sin \varphi_1,$$

$$Q = -F_B \sin \varphi_1 - F_G \cos \varphi_1,$$

$$M = F_B \cdot CD + F_G \cdot DC' = F_B(R - R \cos \varphi_1) + F_G R \sin \varphi_1.$$

При $\varphi_1 = 0$ $N = 1$ кН, $Q = -1,732$ кН, $M = 0$;

$\varphi_1 = 30^\circ$ $N = 0$, $Q = -2$ кН, $M = 1$ кН·м;

$\varphi_1 = 60^\circ$ $N = -1$ кН, $Q = -1,732$ кН, $M = 2$ кН·м.

$\varphi_1 = 90^\circ$ $N = -1,732$ кН, $Q = -1$ кН, $M = 2,732$ кН·м.

Участок AB , $0 \leq \varphi_2 \leq 90^\circ$.

Угол φ_2 отсчитываем от линии OA по ходу часовой стрелки. Отсеченная часть стержня показана на рис. 1.17.

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{iz} = N + R_A \cdot \cos \varphi_2 = 0,$$

$$\sum F_{iy} = Q + R_A \cdot \sin \varphi_2 = 0,$$

$$\sum m_{ix} = -M - R_A \cdot AE = 0.$$

Следовательно,

$$N = -R_A \cos \varphi_2, \quad Q = -R_A \sin \varphi_2,$$

$$M = -R_A \cdot AE = -R_A R \cdot (1 - \cos \varphi_2).$$

При $\varphi_2 = 0$,

$$N = 2,732 \text{ кН}, \quad Q = 0, \quad M = 0;$$

$\varphi_2 = 30^\circ$,

$$N = 2,366 \text{ кН}, \quad Q = 1,366 \text{ кН},$$

$$M = 0,366 \text{ кН·м};$$

$\varphi_2 = 60^\circ$,

$$N = 1,366 \text{ кН}, \quad Q = 2,366 \text{ кН},$$

$$M = 1,366 \text{ кН·м}.$$

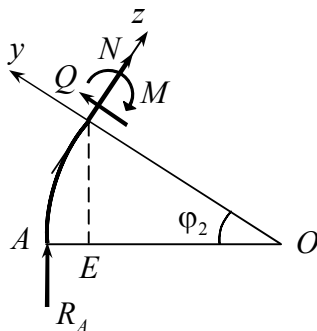


Рис. 1.17

$$\varphi_2 = 90^\circ,$$

$$N = 0, \quad Q = 2,732 \text{ кН}, \quad M = 2,732 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Эпюры N , Q , M представлены на рис. 1.15.

1.7. ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЕ «ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛ»

Построить эпюры внутренних силовых факторов для стержней и рамы, представленных на рис. 1.18 - 1.21.

Расчетную схему выбирать из рис. 1.18 - 1.21 в соответствии с вариантом задания. Исходные данные взять из таблицы 1.1 в соответствии с шифром.

$$F = \alpha qa, \quad M_0 = \alpha qa^2,$$

$$M_1 = \alpha M_0, \quad M_2 = \beta M_0, \quad M_3 = (\alpha + \beta)M_0, \quad M_4 = (\alpha - \beta)M_0.$$

Т а б л и ц а 1.1

Шифр	a , м	q , кН/м	α	β
1	0,8	5	1,2	0,9
2	1,0	6	1,4	1,0
3	1,2	7	1,6	1,5
4	1,4	8	1,8	1,4
5	1,6	9	2,0	0,8
6	0,8	10	1,8	1,3
7	1,0	11	1,6	1,9
8	1,2	12	1,4	1,1
9	1,4	13	1,2	1,6
10	1,6	14	1,0	1,7

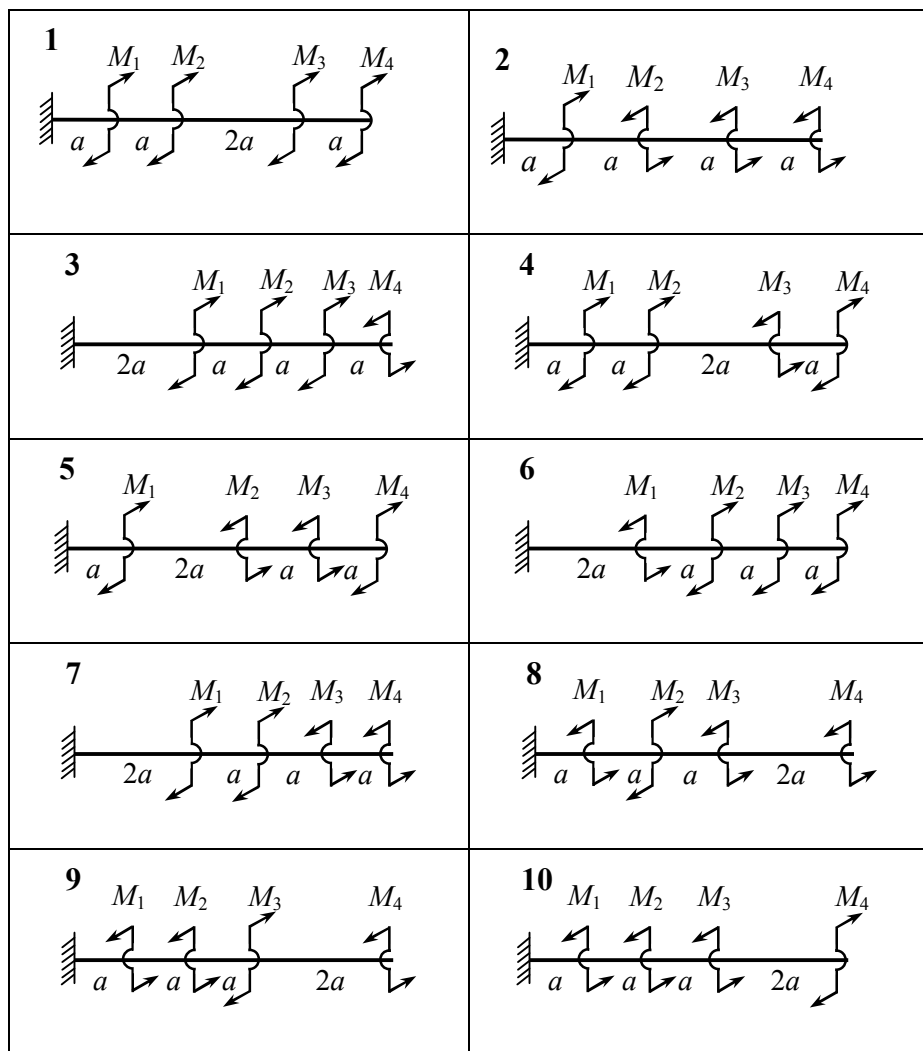


Рис. 1.18

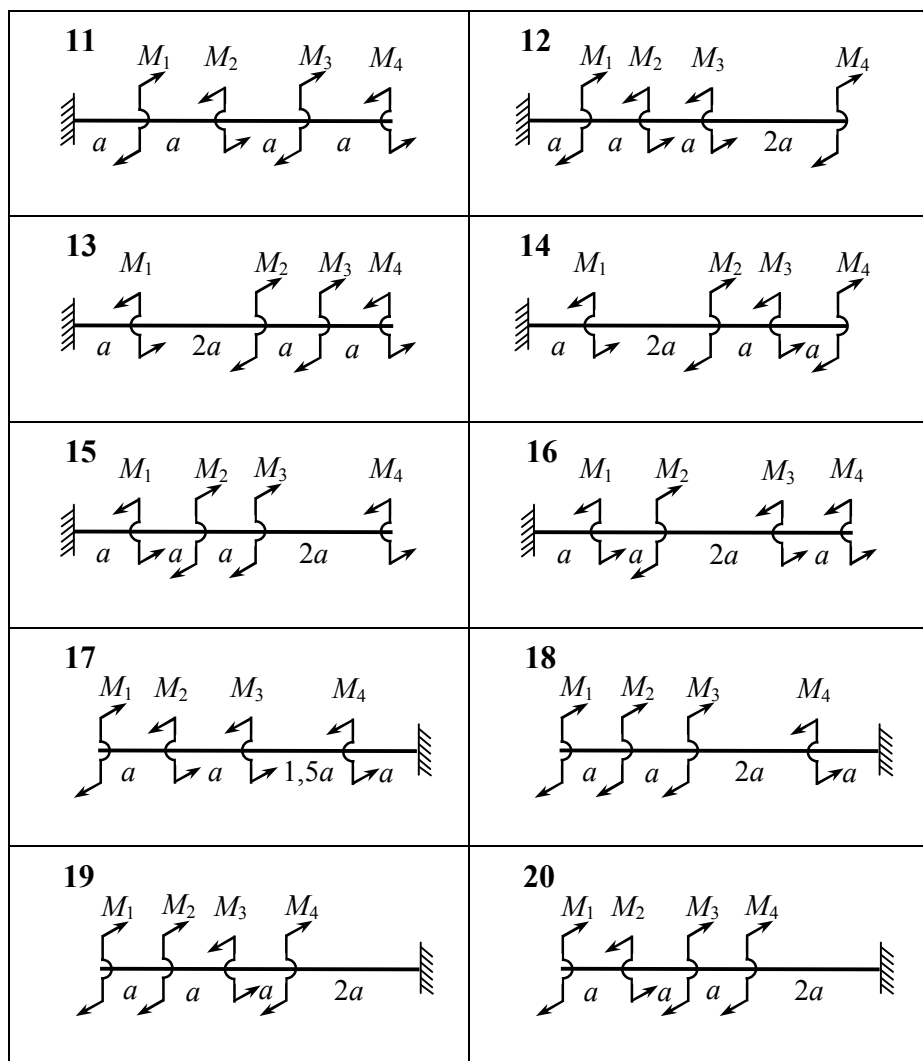


Рис. 1.18 (продолжение)

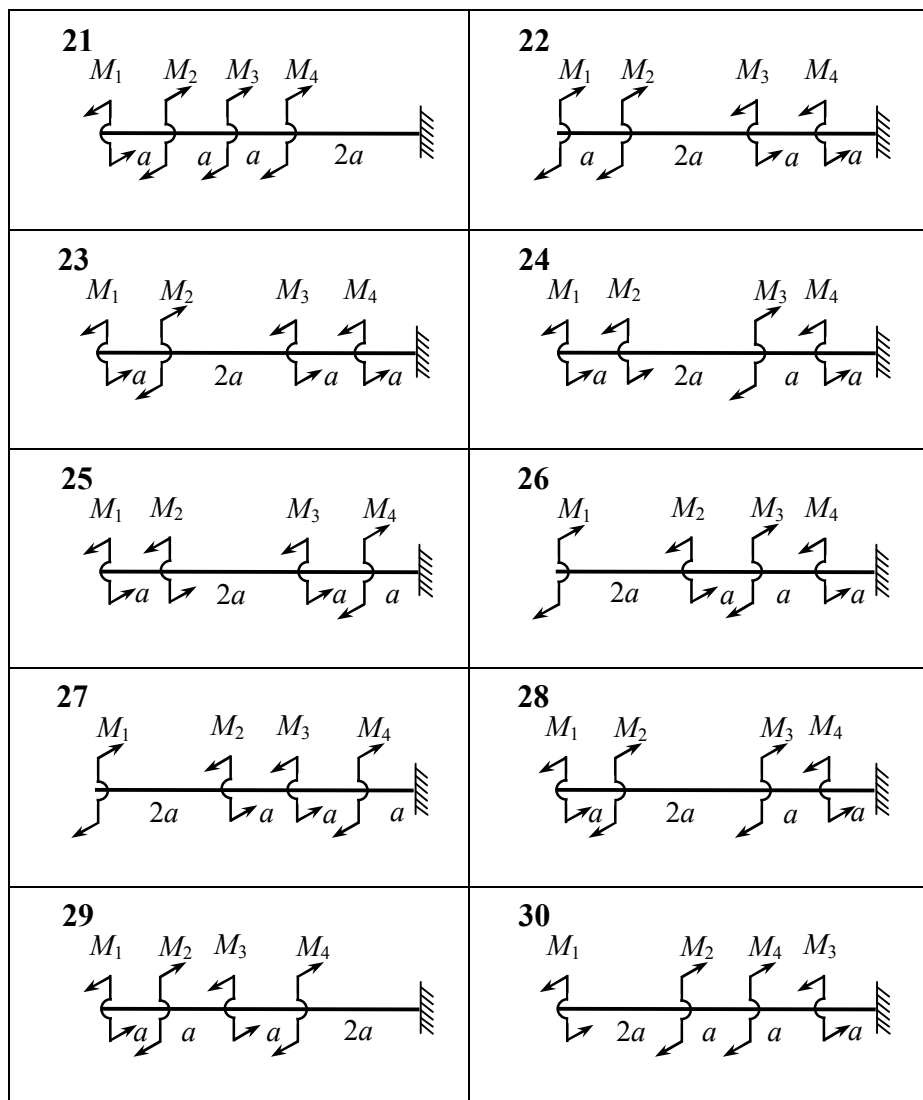


Рис. 1.18 (продолжение)

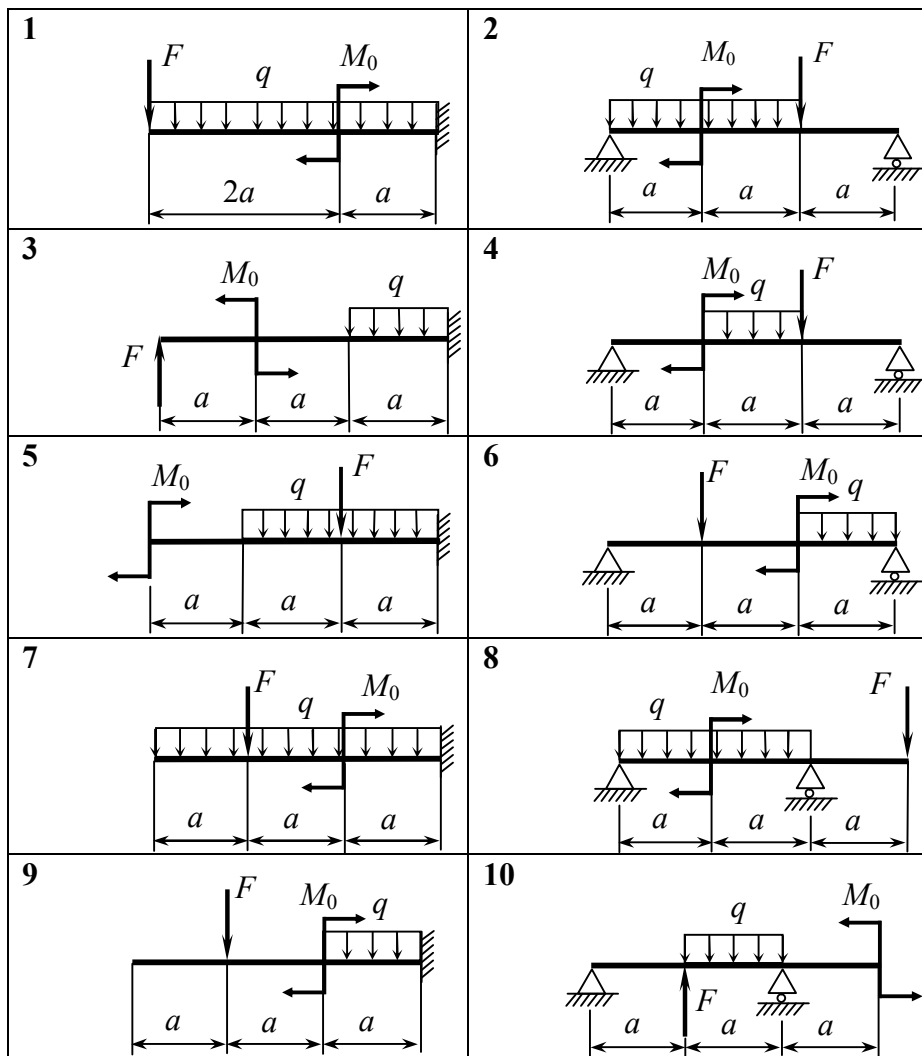


Рис. 1.19

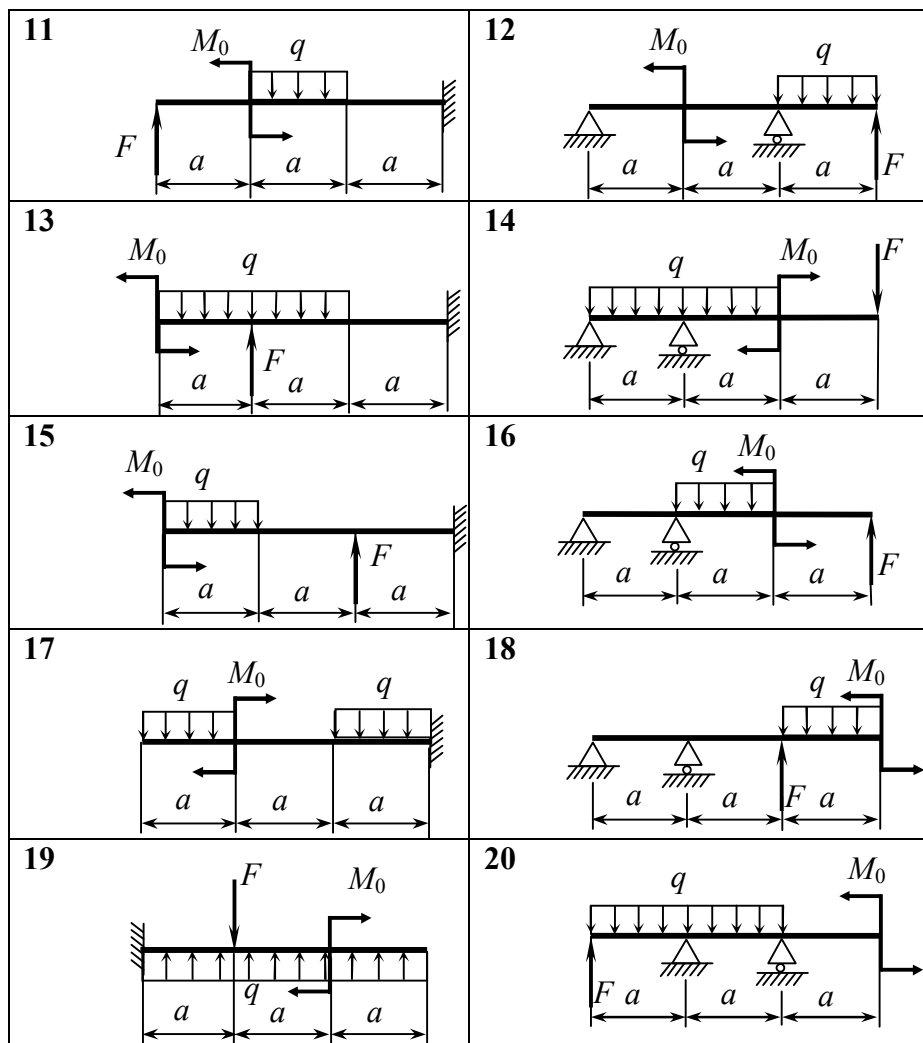


Рис. 1.19 (продолжение)

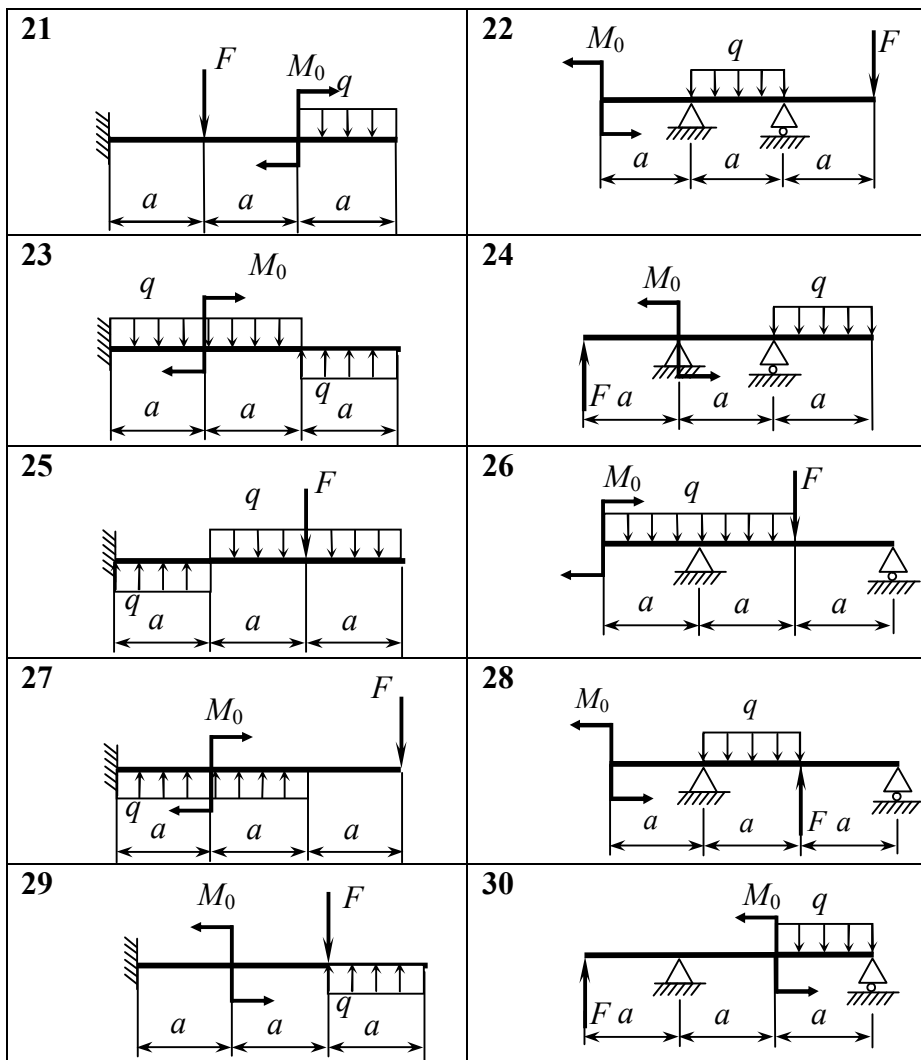


Рис. 1.19 (продолжение)

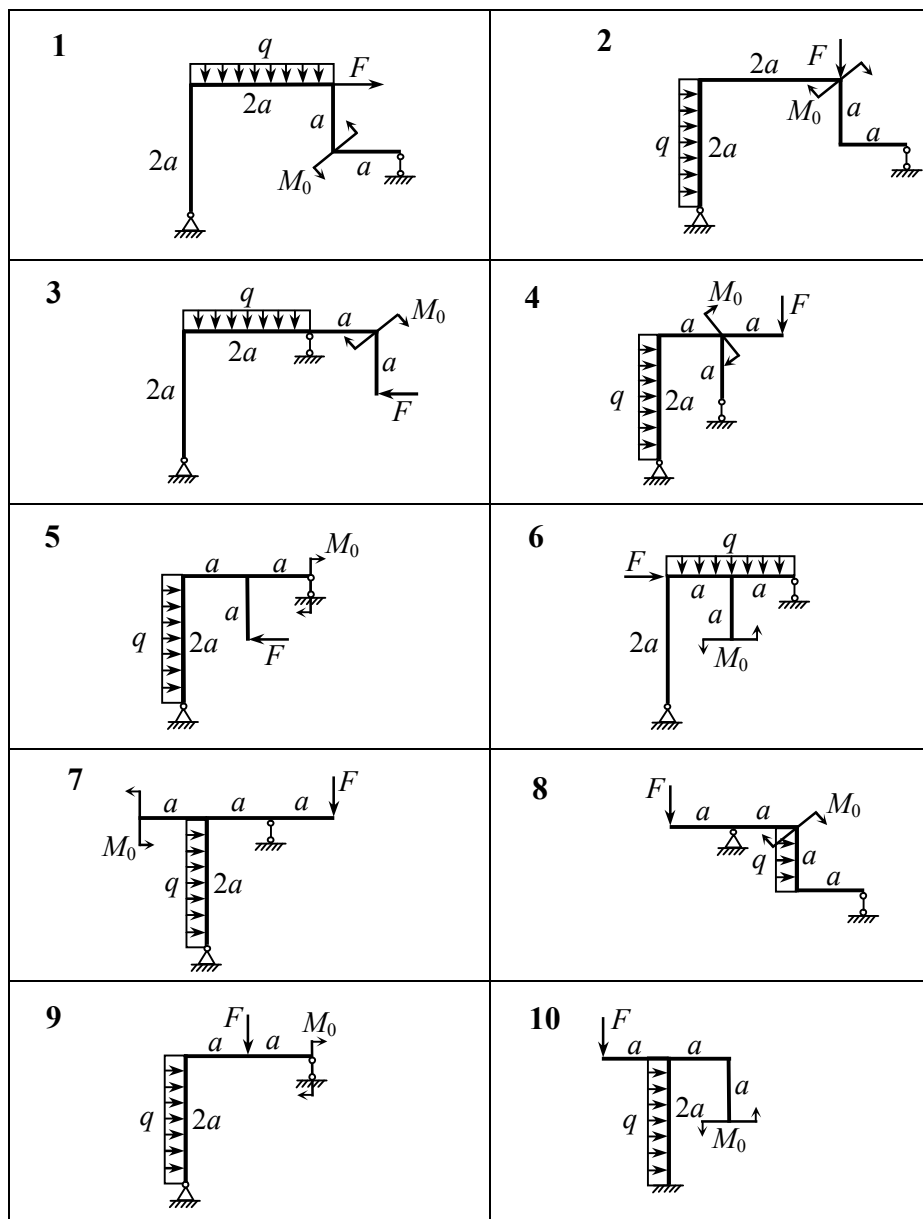


Рис. 1.20

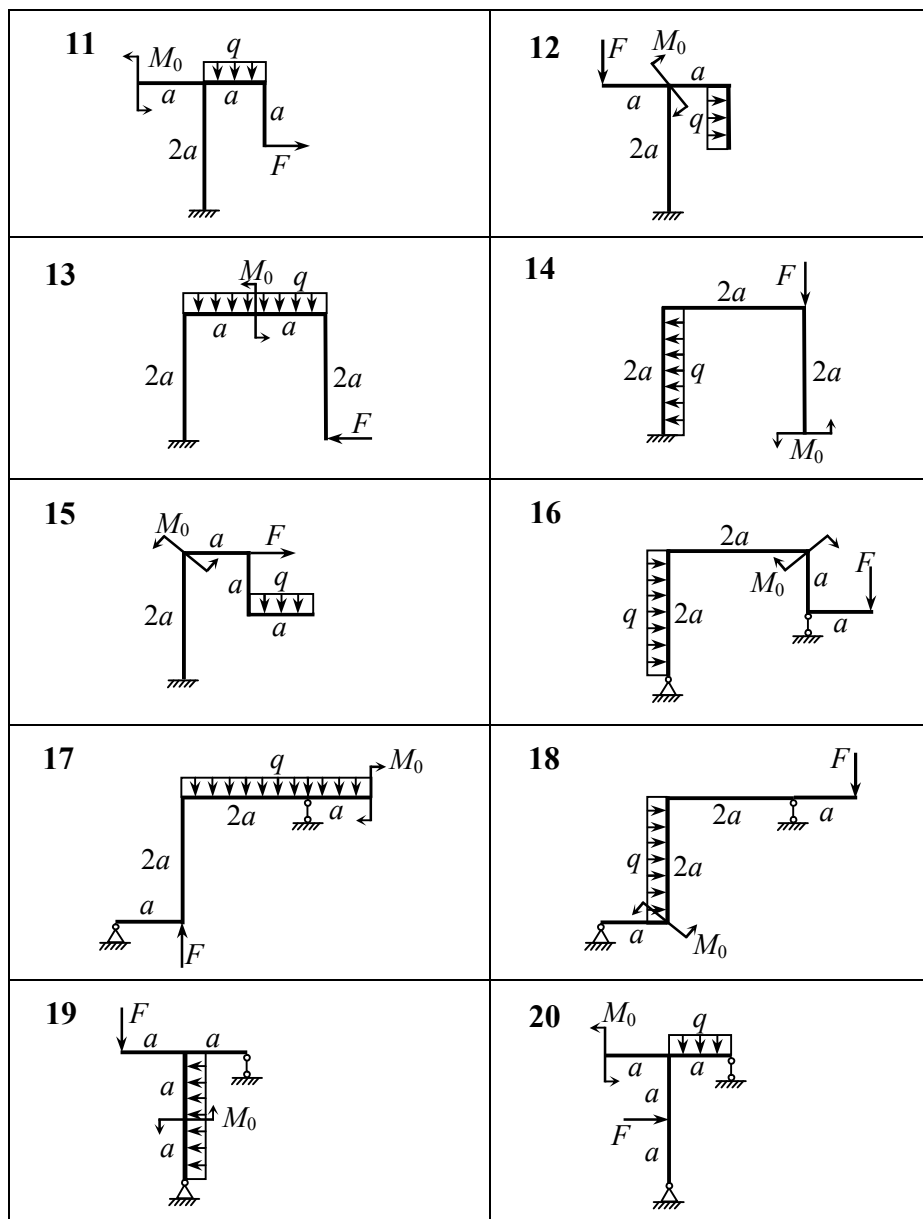


Рис. 1.20 (продолжение)

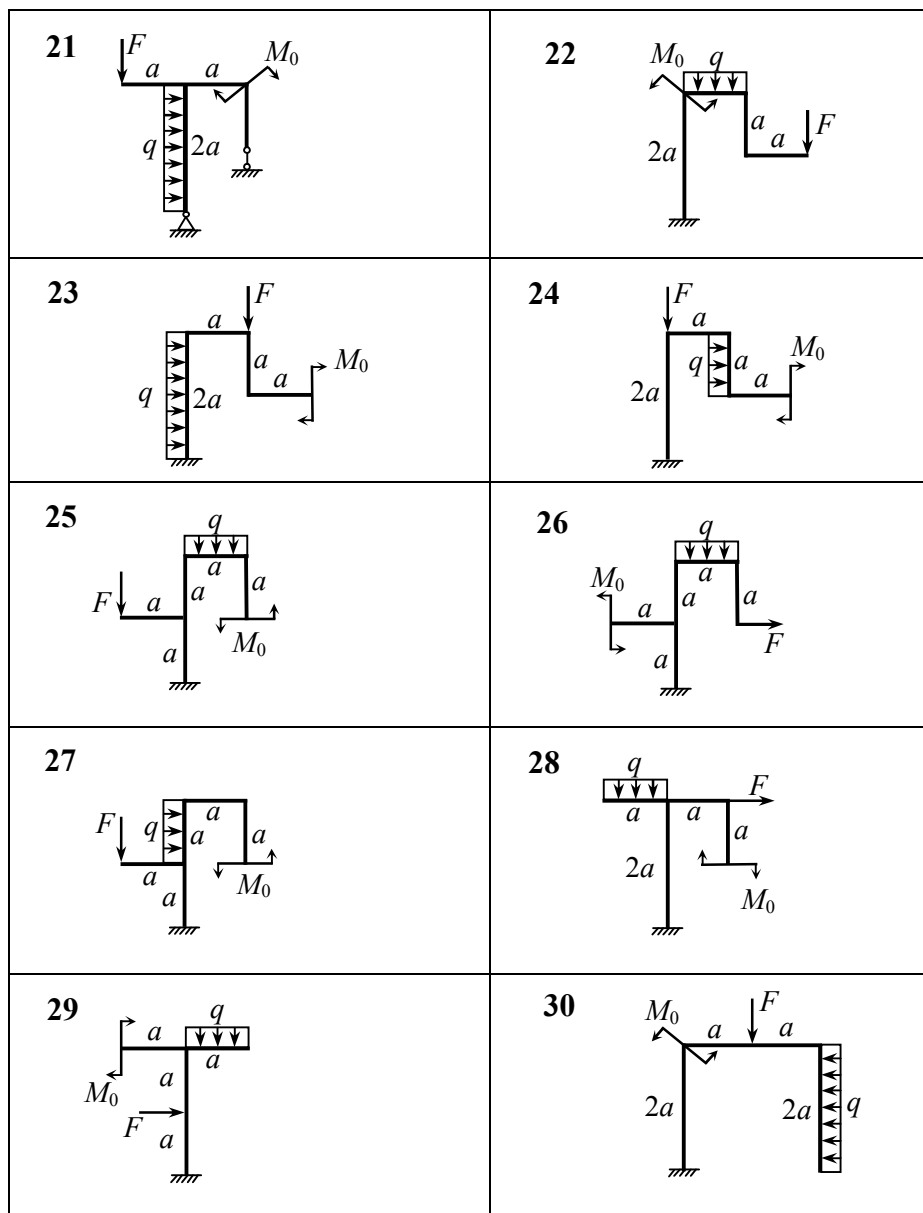


Рис. 1.20 (продолжение)

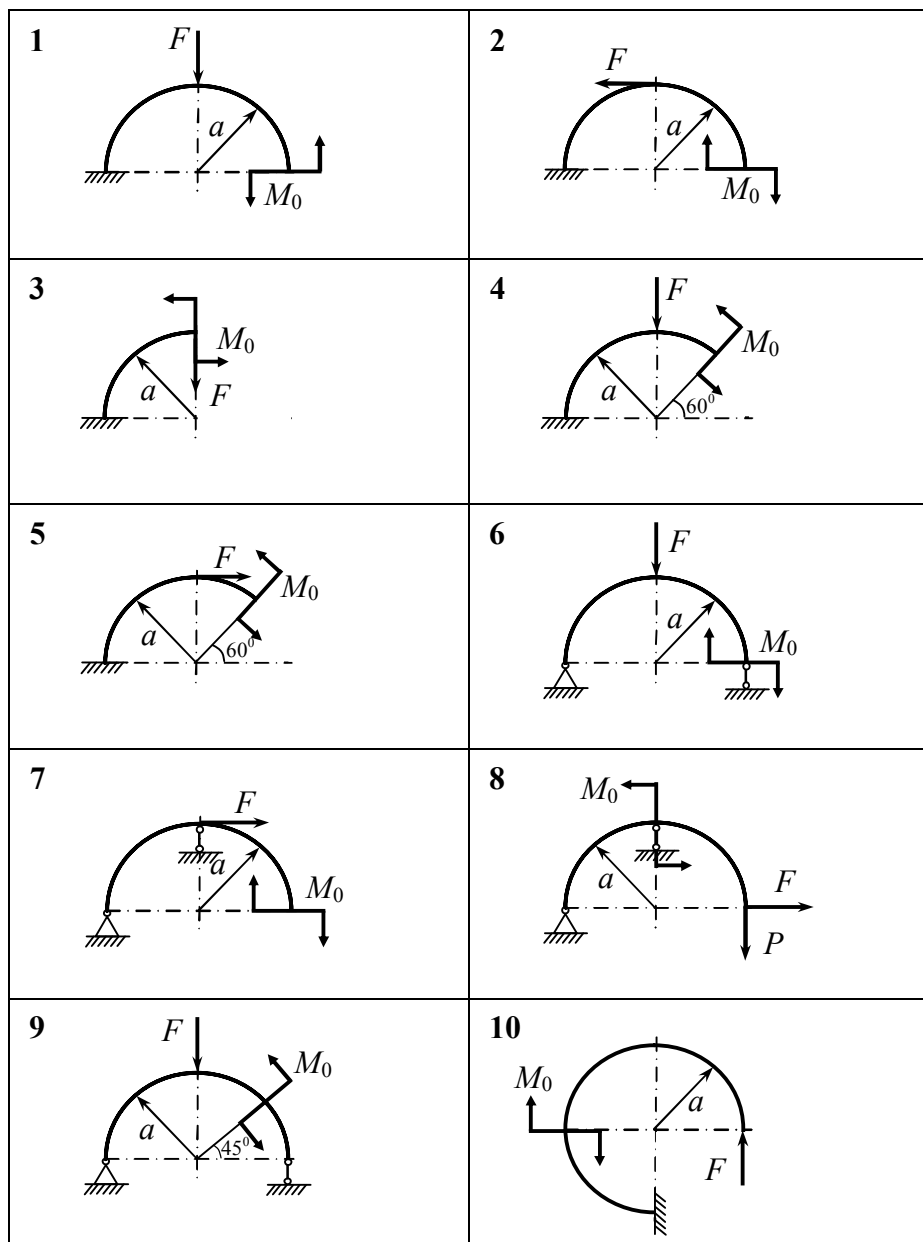


Рис. 1.21

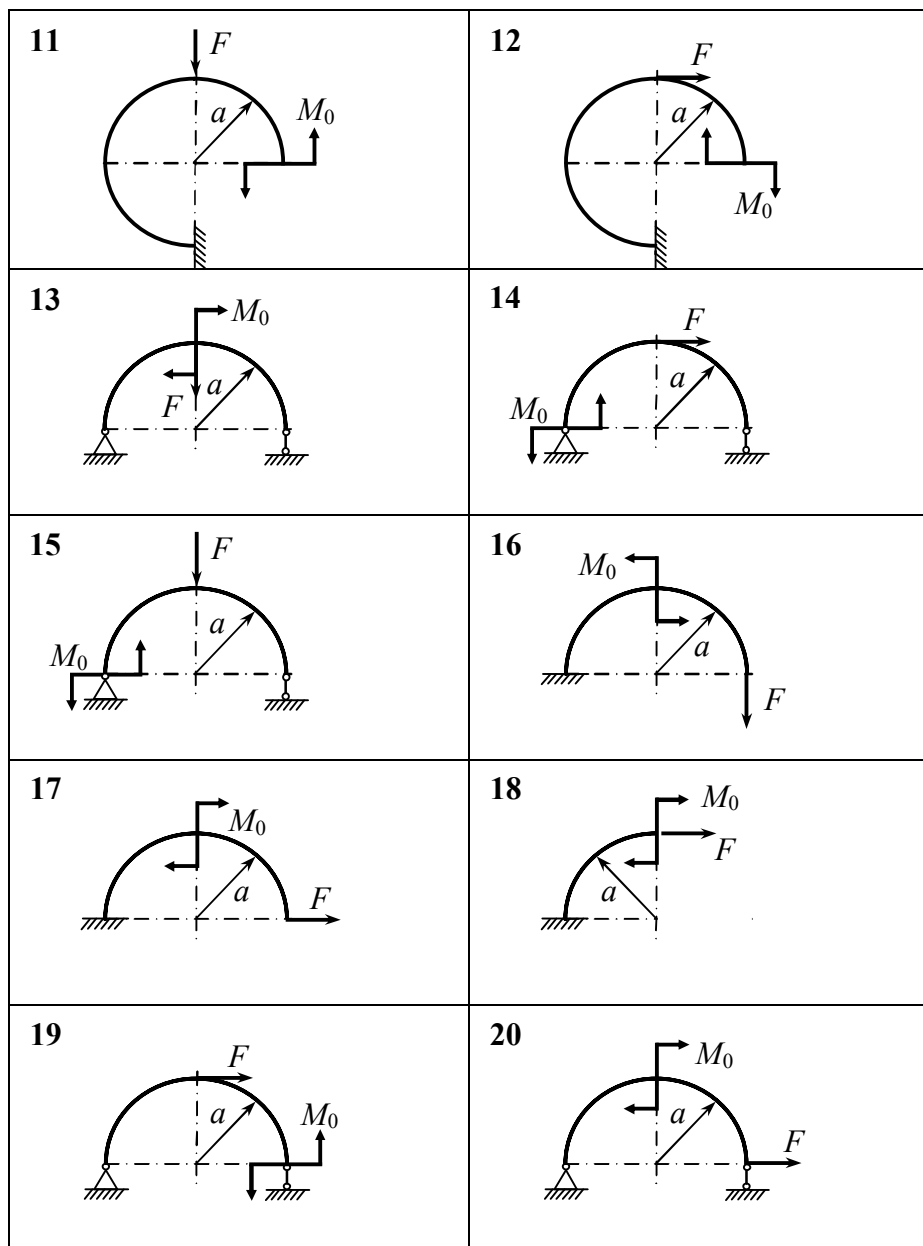


Рис. 1.21 (продолжение)

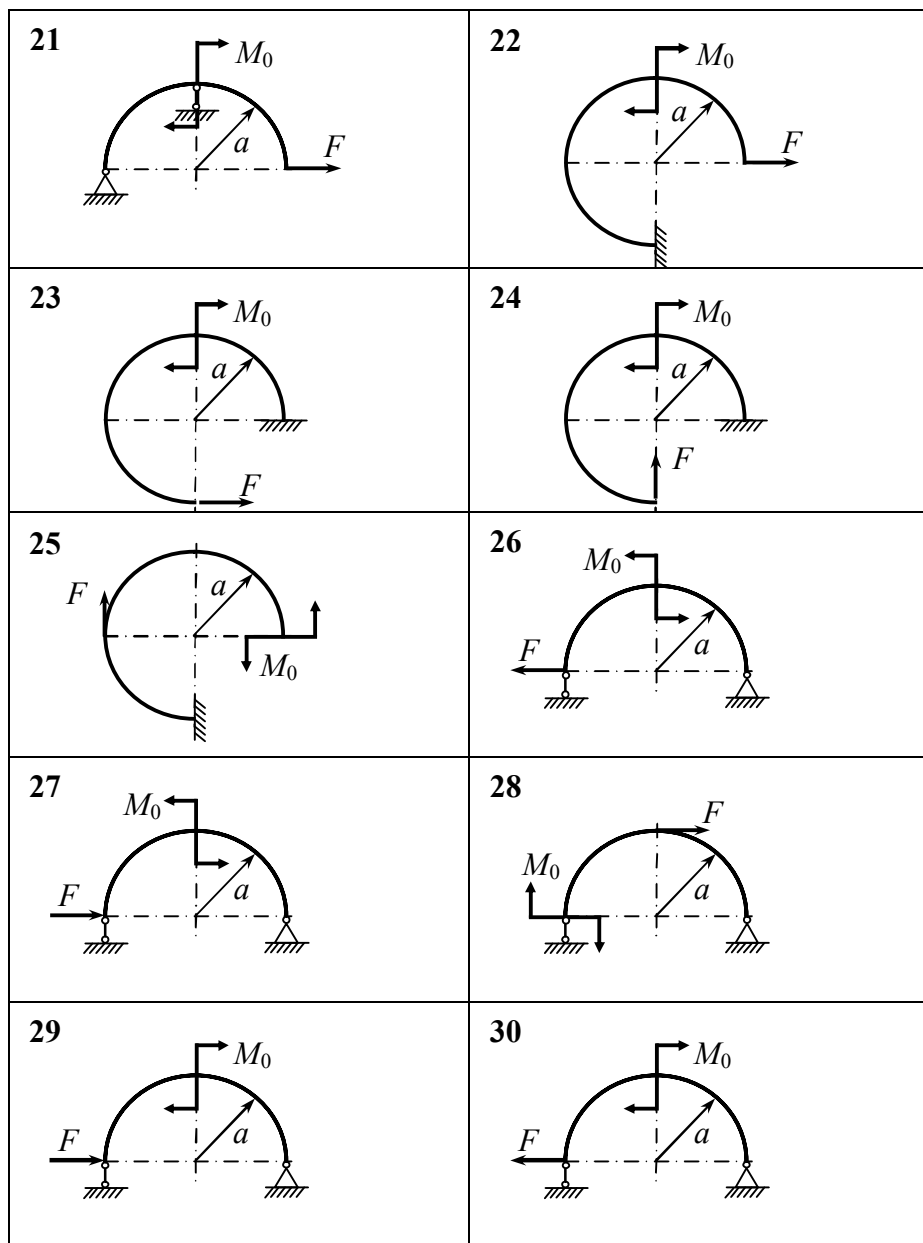


Рис. 1.21 (продолжение)

6)