

**М.Н.Серазутдинов, Ф.С. Хайруллин**

# **РАСЧЕТ БАЛКИ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ**

Учебное пособие

Казань 2009

УДК 539.3

Расчет балки при плоском изгибе: Учебное пособие / М.Н.Серазутдинов, Ф.С. Хайруллин; Казан. гос. технол. ун-т. Казань, 2009.

Учебное пособие содержит сведения по дисциплине «Сопротивление материалов», необходимые для выполнения самостоятельной работы студентами. Рассмотрены вопросы построения эпюр внутренних силовых факторов, изложены теоретические основы расчетов балки при плоском изгибе, вала при изгибе с кручением, статически неопределимых систем, стержневых систем на изгиб и устойчивость. Представлены задания к расчетным работам. Приведены решения задач.

Предназначены для студентов всех форм обучения механических специальностей.

Подготовлены на кафедре теоретической механики и сопротивления материалов КГТУ.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета  
Казанского государственного технологического университета

Рецензенты: д-р физ.-мат.наук, проф. Каюмов Р.А.  
д-р техн. наук, проф. Шамсутдинов Ф.А.

ISBN 0-0000-0      © Казанский государственный  
технологический университет, 2009 г.

## 2. РАСЧЕТ БАЛКИ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

### 2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Полагаем, что изгиб происходит в плоскости  $Oyz$ , ось  $Oz$  направлена вдоль продольной оси стержня, а ось  $Ox$  перпендикулярна плоскости  $Oyz$ . В этом случае, при изгибе в поперечных сечениях балки возникают изгибающий момент  $M_x$  и поперечная сила  $Q_y$ . Будем использовать обозначения  $M = M_x$ ,  $Q = Q_y$ .

Нормальное  $\sigma$  и касательное  $\tau$  напряжения в поперечных сечениях балки определяются по формулам:

$$\sigma = \frac{M}{J} y, \quad (2.1)$$

$$\tau = \frac{Q S_x^*(y)}{J b(y)}. \quad (2.2)$$

В формулах (2.1), (2.2)  $J = J_x$  – осевой момент инерции поперечного сечения;  $S_x^*(y)$  – статический момент отсеченной части относительно оси  $Ox$ ;  $b(y)$  – ширина сечения;  $y$  – координата точки в которой определяется напряжение.

Расчет балки на прочность проводится по максимальным нормальным  $\sigma_{max}$  и касательным  $\tau_{max}$  напряжениям, а также с использованием теории прочности. В дальнейшем будем использовать соотношения третьей теории прочности.

Полагаем, что материал балки одинаково сопротивляется растягивающим и сжимающим напряжениям.

Условия прочности по максимальным напряжениям представляются следующим образом:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{J} y_{max} = \frac{|M_{max}|}{W} \leq [\sigma], \quad (2.3)$$

$$\tau_{max} = \frac{|Q_{max}|}{J} \left( \frac{S_x^*(y)}{b(y)} \right)_{max} \leq [\tau], \quad (2.4)$$

где  $[\sigma]$ ,  $[\tau]$  – допускаемые значения напряжений,  $W = J / y_{\max}$  – осевой момент сопротивления сечения.

Условия третьей теории прочности:

$$\sigma_{III} \equiv \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (2.5)$$

Расчет на прочность балки с поперечным сечением в виде двутавра проводится в следующей последовательности. Из условий прочности по максимальным нормальным напряжениям (2.3) находится номер двутавра, для которого проверяется выполнение условий (2.4) и (2.5). Если одно из них нарушается, то размеры поперечного сечения балки (номер двутавра) следует увеличить до величины, при которой выполняются все условия прочности.

При вычислении левых частей неравенств (2.3) – (2.5) следует использовать значения  $M$  и  $Q$ , возникающие в так называемых опасных (наиболее напряженных) сечениях.

Для определения опасных сечений строятся эпюры  $Q$  и  $M$ .

При расчете по максимальным нормальным напряжениям  $\sigma_{\max}$  опасным является сечение, в котором изгибающий момент  $M$  принимает наибольшее значение.

При расчете по максимальным касательным напряжениям  $\tau_{\max}$  опасным является сечение, в котором поперечная сила  $Q$  принимает наибольшее значение.

В случае использования соотношения (2.5) опасным является сечение, в котором эквивалентное напряжение  $\sigma_{III}$  имеет наибольшее значение. Если  $M$  и  $Q$  принимают максимальные значения в одном сечении, то в этом же сечении максимальным будет и  $\sigma_{III}$ . Если же наибольшие значения  $M$  и  $Q$  возникают в различных сечениях, то выполнение условия (2.5), следует проверить для сечений, в которых  $M$  и  $Q$  значительны по величине.

Напряжения  $\sigma$  и  $\tau$  изменяются по высоте сечения. Условия (2.3), (2.4) записываются в соответствующих точках максимума  $\sigma$  и  $\tau$ . Выполнение неравенства (2.5) следует проверить для точек, в которых  $\sigma$  и  $\tau$  значительны по величине. Для проведения этой проверки в опасном сечении балки строят эпюры  $\sigma$  и  $\tau$ .

При расчете балки в виде двутавра в условие (2.5) подставляются значения  $\sigma$  и  $\tau$  для точки перехода от полки к стенке двутавра, а также в центре сечения при  $y = 0$ .

Для балок постоянного сечения можно записать уравнение, выражающее зависимость между прогибом балки  $\upsilon$  и действующими на нее внешними силами и моментами. Это уравнение называется универсальным уравнением упругой линии балки. Аналогичное уравнение можно записать и для углов поворота балки  $\theta$ .

Универсальное уравнение упругой линии балки получается с использованием дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\upsilon}{dz^2} = -\frac{M}{EJ}. \quad (2.6)$$

Здесь  $E$  – модуль упругости материала балки.

Выражение для изгибающего момента  $M$  в этом случае удобно записывать с использованием обобщенной функции  $(z - z_0)_+^n$ , которая определяется следующим образом:

$$(z - z_0)_+^n = \begin{cases} (z - z_0)^n, & \text{если } z - z_0 > 0; \\ 0 & \text{если } z - z_0 \leq 0. \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

В соответствии с выражением (2.7) получается, что обобщенная функция является степенной функцией, если значение ее аргумента  $z - z_0$  положительное, и равна нулю, если  $z - z_0 \leq 0$ . Индекс  $+$  в выражении для обобщенной функции отражает эту особенность.

Отметим, что операции дифференцирования и интегрирования обобщенной функции (2.7) выполняются так же, как и для обычной функции, а  $(z - z_0)_+^0 = 0$ , если  $z - z_0 \leq 0$ .

Выражение для изгибающего момента, возникающего в балке при действии сосредоточенного момента  $M_0$  (Рис.2.1а), с использованием функции (2.7), имеет вид

$$M = -M_0(z - a)_+^0. \quad (2.8)$$

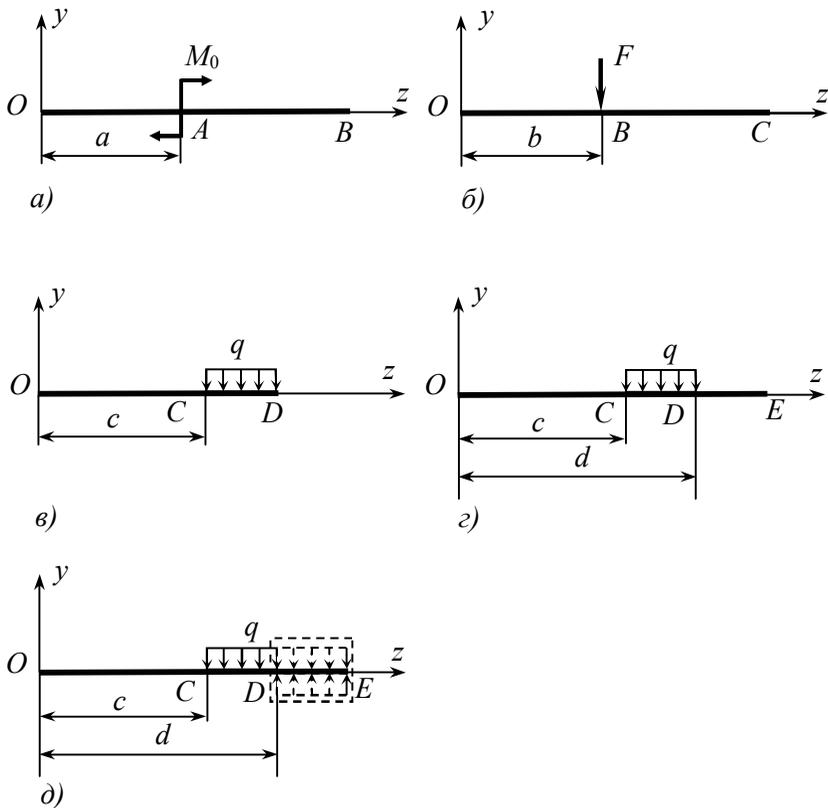


Рис. 2.1

С учетом того, что число в нулевой степени равно 1 и, в соответствии с (7)  $(z - a)_+^0 = 0$  при  $z - a \leq 0$ , получаем

$$(z - a)_+^0 = \begin{cases} (z - a)^0 = 1, & \text{если } z > a; \\ 0 & \text{если } z \leq a. \end{cases}$$

Следовательно, как и должно быть, на участке  $OA$   $M = 0$ , а на  $AB$   $- M = -M_0$ . Знак минус в выражении (2.8) поставлен в соответствии с принятым правилом знаков для изгибающего момента.

Аналогично, изгибающий момент от сосредоточенной силы  $F$  (рис.2.1б)

$$M = F(z - b)_+.$$

На участке  $OB$  (рис.2.1,б)  $z - b \leq 0$ , поэтому  $(z - b)_+ = 0$   $M = 0$ , а следовательно  $(z - b)_+ = z - b$ ,  $M = F(z - b)$ .

Для балки, нагруженной распределенной нагрузкой на участке  $CD$ , который начинается при  $z = c$  и продолжается до конца балки (рис.2.1в)

$$M = q \frac{(z - c)_+^2}{2}. \quad (2.9)$$

В случае, когда участок распределенной нагрузки  $CD$  не распространяется до конца балки (рис.2.1г), а заканчивается в точке  $D$ , поступают следующим образом. Продолжают нагрузку  $q$  на участке  $DE$  и прикладывают такую же нагрузку  $q$  противоположного знака (рис.2.1д). В результате получается, что на балку действуют нагрузки  $q$ , приложенные по участкам, продолжающимся до конца балки. Следовательно, при записи  $M$  можно использовать выражения вида (2.9).

Для балки, показанной на рис.2.1г и 2.1д, с учетом (2.9), получаем

$$M = q \frac{(z - c)_+^2}{2} - q \frac{(z - d)_+^2}{2}. \quad (2.10)$$

Обратим внимание на особенности записи выражения для изгибающего момента, при наличии распределенной нагрузки  $q$ , действующей на некотором участке балки  $c \leq z \leq d$ . В этом случае

$$M = \pm q \frac{(z - c)_+^2}{2} \mp q \frac{(z - d)_+^2}{2}.$$

Здесь  $c$  – координата начала участка действия распределенной нагрузки,  $d$  – координата конца участка. Знак первого слагаемого выбирается в соответствии с принятым правилом знаков для изгибающего момента, который создается действием нагрузки  $q$ . Знак второго

слагаемого – противоположен знаку первого. Так, член  $q \frac{(z - c)_+^2}{2}$

входит в уравнение (2.10) со знаком « + », т.к. в сечениях балки при  $z > c$  нагрузка  $q$  создает положительный момент – растягивает часть стержня (верхнюю) с положительной координатой  $y$ .

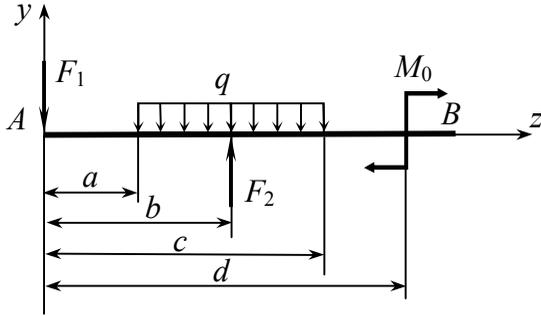


Рис. 2.2

Для балки  $AB$  (рис. 2.2), нагруженной сосредоточенными силами  $F_1, F_2$ , моментом  $M_0$  и распределенной нагрузкой  $q$  выражение для изгибающего момента  $M$  можно записать в следующем виде:

$$M = F_1(z-0)_+ - F_2(z-b)_+ - M_0(z-d)_+ + q \frac{(z-a)_+^2}{2} - q \frac{(z-c)_+^2}{2}. \quad (2.11)$$

Подставляя выражение (2.11) в уравнение (2.6), получим

$$EJ \frac{d^2 v}{dz^2} = -F_1(z-0)_+ + F_2(z-b)_+ + M_0(z-d)_+ - q \frac{(z-a)_+^2}{2} + q \frac{(z-c)_+^2}{2}.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$EJ \frac{dv}{dz} = EJ\theta_0 - F_1 \frac{(z-0)_+^2}{2} + F_2 \frac{(z-b)_+^2}{2} + M_0(z-d)_+ - q \frac{(z-a)_+^3}{6} + q \frac{(z-c)_+^3}{6},$$

$$E \mathcal{J}_0 = E \mathcal{J}_0 + E \mathcal{J}_0 z - F_1 \frac{(z-0)_+^3}{6} + F_2 \frac{(z-b)_+^3}{6} +$$

$$+ M_0 \frac{(z-d)_+^2}{2} - q \frac{(z-a)_+^4}{24} + q \frac{(z-c)_+^4}{24}.$$

Здесь  $E\mathcal{J}_0$ ,  $E\mathcal{J}_0 z$  – постоянные интегрирования, для нахождения которых используются граничные условия, зависящие от условий закрепления балки.

Если в некотором сечении балки с координатой  $z = z_1$  имеется шарнирная опора, то в этом сечении прогиб балки должен быть равен нулю и граничное условие имеет вид:

$$v(z_1) = 0.$$

Если в некотором сечении  $z = z_2$  балка защемлена (заделана), то в этом месте должны быть равны нулю прогиб и угол поворота:

$$v(z_2) = 0, \quad \frac{dv(z_2)}{dz} = 0.$$

## 2.2. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Для балки с постоянным поперечным сечением в виде двутавра (рис. 2.3) произвести следующие расчеты:

1) Из условия прочности по максимальным нормальным напряжениям подобрать размеры поперечного сечения балки. Проверить выполнение условий прочности по максимальным касательным напряжениям и условия третьей теории прочности.

2) Записать универсальное уравнение упругой линии балки и уравнение для углов поворота балки. Построить эпюры прогибов и углов поворота.

3) Произвести расчет на жесткость по максимальным прогибам в полете и на консольной части балки.

Используем следующие исходные данные:  $l_1 = 2$  м,  $l_2 = 4$  м,  $l_3 = 2$  м,  $q_1 = 50$  кН/м,  $q_2 = 30$  кН/м,  $M_0 = 40$  кН·м,  $F = 30$  кН,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $[\sigma] = 160$  МПа,  $[\tau] = 100$  МПа.

Допускаемые значения прогиба балки в пролете  $[v] = l_{np} / 300$ , на консоли  $[v] = l_k / 150$ . Здесь  $l_{np}$ ,  $l_k$  – соответственно, длины пролета и консольной части балки.

1. *Определение опорных реакций.* Опорные реакции для рассматриваемого примера уже вычислялись в первой главе. Получили -  $R_B = -70$  кН,  $R_C = 60$  кН.

Используя описанные правила записи изгибающего момента с применением обобщенной функции (2.7), получим

$$M = -q_1 \frac{z^2}{2} + q_1 \frac{(z-l_1)_+^2}{2} + q_2 \frac{(z-l_1)_+^2}{2} - q_2 \frac{(z-l_1-l_2)_+^2}{2} - R_B(z-l_1)_+ - F(z-l_1-l_2/2)_+ - R_C(z-l_1-l_2)_+ \quad (2.12)$$

Слагаемое  $M_0(z-l_1-l_2-l_3)_+^0$ , учитывающее наличие сосредоточенного момента, в уравнение (2.12) не введено, т.к. по определению обобщенной функции  $(z-l_1-l_2-l_3)_+^2 = 0$  для любого  $z \leq l_1 + l_2 + l_3$ , т.е. оно равно нулю по всей длине балки.

Для определения поперечной силы воспользуемся дифференциальной зависимостью между изгибающим моментом и поперечной силой

$$\frac{dM}{dz} = Q. \text{ Дифференцируя выражение для момента (2.12), находим}$$

$$Q = -q_1 z + q_1(z-l_1)_+ + q_2(z-l_1)_+ - q_2(z-l_1-l_2)_+ - R_B(z-l_1)_+ - F_1\left(z-l_1-\frac{l_2}{2}\right)_+ - R_C(z-l_1-l_2)_+ \quad (2.13)$$

2. *Построение эпюр* изгибающего момента  $M$  и поперечной силы  $Q$ .

Один из возможных способов записи выражений и вычисления значений  $Q$  и  $M$  представлен в первой главе. Можно также при построении эпюр  $Q$  и  $M$  воспользоваться выражениями (2.12), (2.13). При этом для вычисления значений  $Q$  и  $M$  балка также разбивается на четыре участка – I, II, III, IV (рис.2.3).

Участок I,  $0 \leq z \leq 2$  м.

На этом участке  $z \leq l_1$ , поэтому, в соответствии с определением обобщенной функции (7),

$$(z - l_1)_+^k = 0, \quad \left(z - l_1 - \frac{l_2}{2}\right)_+^k = 0, \quad (z - l_1 - l_2)_+^k = 0, \quad \text{при } k = 0, 1.$$

Следовательно, часть слагаемых в выражениях (2.12), (2.13) обратится в нуль и, в результате, получаем

$$Q = -q_1 z, \quad M = -q_1 \frac{z^2}{2}.$$

При $z = 0$	$Q = 0,$	$M = 0;$
$z = 1 \text{ м}$	$M = -25 \text{ кН}\cdot\text{м};$	
$z = 2 \text{ м}$	$Q = -100 \text{ кН},$	$M = -100 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Участок II,  $2 \text{ м} \leq z \leq 4 \text{ м}.$

Как видно из рис.2.3, на этом участке  $z \leq l_1 + 0,5l_2$ , поэтому

$$\left(z - l_1 - \frac{l_2}{2}\right)_+^k = 0, \quad (z - l_1 - l_2)_+^k = 0, \quad \text{при } k = 0, 1,$$

из формул (2.12), (2.13)

$$Q = -q_1 z + q_1(z - l_1) + q_2(z - l_1) - R_B = -q_1 l_1 + q_2(z - l_1) - R_B,$$

$$M = -q_1 \frac{z^2}{2} + q_1 \frac{(z - l_1)^2}{2} + q_2 \frac{(z - l_1)^2}{2} - R_B(z - l_1) =$$

$$= -q_1 l_1 \left(z - \frac{l_1}{2}\right) + q_2 \frac{(z - l_1)^2}{2} - R_B(z - l_1).$$

При $z = 2 \text{ м}$	$Q = -30 \text{ кН},$	$M = -100 \text{ кН}\cdot\text{м};$
$z = 3 \text{ м}$	$M = -115 \text{ кН}\cdot\text{м};$	
$z = 4 \text{ м}$	$Q = -30 \text{ кН},$	$M = -100 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Из полученных числовых данных видно, что изгибающий момент  $M$  принимает на данном участке экстремальное значение. Определим максимальное значение  $M$  и сечение, в котором он возникает.

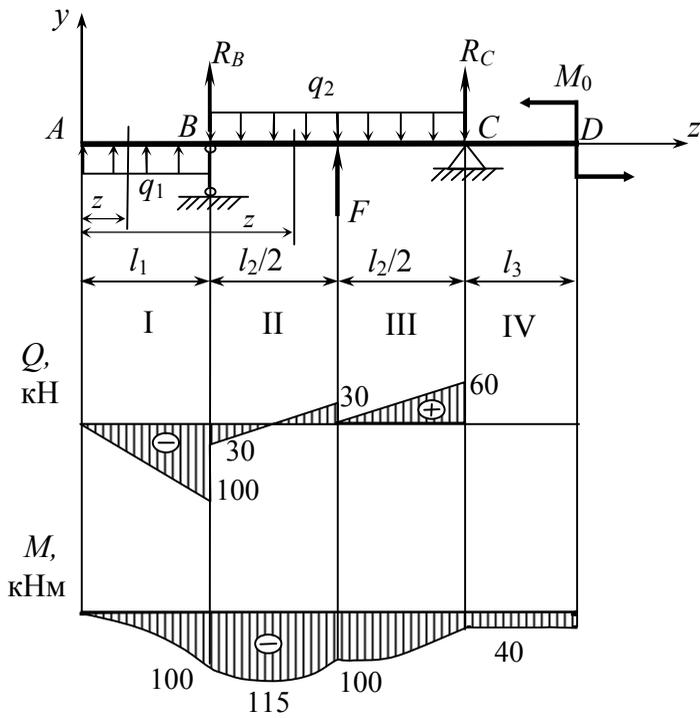


Рис. 2.3

Из условия экстремума  $M$

$$\frac{dM}{dz} = 0,$$

имеем

$$-q_1 l_1 - R_B + q_2(z - l_1) = 0,$$

Отсюда, обозначая  $z$  через  $z^*$ , получим

$$z^* = (q_1 l_1 + R_B + q_2 l_1) / q_2 = 3 \text{ м.}$$

Таким образом, в сечении  $z = 3 \text{ м}$   $Q = 0$ , а изгибающий момент принимает экстремальное значение

$$M_{\max} = -q_1 l_1 \left( z^* - \frac{l_1}{2} \right) + q_2 \frac{(z^* - l_1)^2}{2} + R_B (z^* - l_1) = -115 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Участок III,  $4 \text{ м} \leq z \leq 6 \text{ м}.$

На этом участке

$$z \leq l_1 + l_2, \quad (z - l_1 - l_2)_+^k = 0, \quad \text{при } k = 0, 1,$$

$$Q = -q_1 z + q_1 (z - l_1) + q_2 (z - l_1) - q_2 (z - l_1 - l_2) -$$

$$- R_B (z - l_1) - F_1 \left( z - l_1 - \frac{l_2}{2} \right),$$

$$M = -q_1 \frac{z^2}{2} + q_1 \frac{(z - l_1)^2}{2} + q_2 \frac{(z - l_1)^2}{2} - q_2 \frac{(z - l_1 - l_2)^2}{2} -$$

$$- R_B (z - l_1) - F (z - l_1 - l_2 / 2).$$

При  $z = 4 \text{ м}$   $Q = -60 \text{ кН},$   $M = -100 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$z = 5 \text{ м}$   $M = -85 \text{ кН}\cdot\text{м};$

$z = 6 \text{ м}$   $Q = 0, \quad M = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Участок IV,  $6 \text{ м} \leq z \leq 8 \text{ м}.$

$$Q = 0, \quad M = -40 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

На основе полученных числовых результатов строятся эпюры  $Q$  и  $M$ . (Рис. 2.3).

3. *Подбор сечений балки* из условия прочности по максимальным нормальным напряжениям.

Как видно из эпюры  $M$  (рис. 2.3), опасным сечением при расчете по максимальным нормальным напряжениям является сечение при  $z = 3 \text{ м}$ , в котором возникает наибольшее значение изгибающего момента  $|M| = 115 \text{ кН}\cdot\text{м}.$

Из условия прочности (2.3) определяем момент сопротивления сечения балки.

$$W \geq \frac{|M|}{[\sigma]} = \frac{115 \text{ кН}\cdot\text{м}}{160 \text{ МПа}} = \frac{115 \cdot 10^3 \text{ Н}\cdot\text{м}}{160 \cdot 10^6 \text{ Н} / \text{см}^2} = 719 \cdot 10^{-6} = 719 \text{ см}^3.$$

В соответствии с таблицей сортамента, найденному значению  $W$  соответствует двутавр № 36 – для которого  $W = W_x = 743 \text{ см}^3$ ,  $h = 36 \text{ см}$ ,  $b = 14,5 \text{ см}$ ,  $d = 0,75 \text{ см}$ ,  $t = 1,23 \text{ см}$ ,  $h_1 = h - 2t = 33,54 \text{ см}$ ,  $J_x = 13380 \text{ см}^4$ ,  $S_x = 423 \text{ см}^3$ .

4. Проверка прочности двутавра по максимальному касательному напряжению и с использованием третьей теории прочности.

В сечении, проходящем через точку  $B$ , возникает наибольшая поперечная сила  $|Q| = 100 \text{ кН} = 100 \cdot 10^3 \text{ Н}$ , поэтому это сечение будет опасным сечением при расчете по максимальным касательным напряжениям.

В двутавре максимальные касательные напряжения возникают в центре сечения, при  $y = 0$ . В этой точке  $S_x^* = S_x = 423 \text{ см}^3$ ,  $b(y) = d = 0,75 \text{ см}$ . По формуле (4) находим

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_{\max}|}{J} \cdot \frac{S_x}{d} = \frac{100 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 423 \text{ см}^3}{13380 \text{ см}^4 \cdot 0,75 \text{ см}} = 4,22 \cdot 10^3 \frac{\text{Н}}{\text{см}^2} = 42,2 \text{ МПа}.$$

Получили, что  $\tau_{\max} < 100 \text{ МПа}$ , следовательно, условие прочности (2.4) для касательных напряжений выполняется.

Проверку прочности двутавра по третьей теории прочности проведем также для сечения в точке  $B$ , так как здесь  $|Q| = |Q_{\max}|$ , а изгибающий момент принимает сравнительно большое значение  $M = 100 \text{ кН} \cdot \text{м} = 100 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{см}$ .

Построим эпюры напряжений  $\sigma$  и  $\tau$ . В соответствии с формулой (2.1), получаем:

$$\text{при } y = \frac{h}{2}, \quad \sigma = \frac{100 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{см}}{13380 \text{ см}^4} \cdot \frac{36 \text{ см}}{2} = 134,5 \text{ МПа},$$

$$y = \frac{h_1}{2}, \quad \sigma = 125,3 \text{ МПа},$$

$$y = 0, \quad \sigma = 0.$$

Ширина двутавра изменяется по высоте сечения, поэтому для построения эпюры  $\tau$  рассмотрим два участка – полку  $\left(y \geq \frac{h_1}{2}\right)$  и стенку  $\left(0 \leq y \leq \frac{h_1}{2}\right)$  двутавра.

$$\text{Для полки } \left(y \geq \frac{h_1}{2}\right), \quad b(y) = b, \quad S_x^* = \int_{y - \frac{b}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\frac{b}{2}}^b y dy dx = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

$$\text{Для стенки } \left(0 \leq y \leq \frac{h_1}{2}\right), \quad b(y) = d,$$

$$S_x^* = \int_{\frac{h_1}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\frac{b}{2}}^b y dy dx + \int_y^{\frac{h_1}{2}} \int_{\frac{d}{2}}^d y dy dx = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{h_1^2}{4}\right) + \frac{d}{2} \left(\frac{h_1^2}{4} - y^2\right).$$

Учитывая, что статический момент отсеченной части  $S_x^*$  является функцией симметричной относительно оси  $Oy$ , получаем следующие результаты.

$$\text{Для полки двутавра } |y| > \frac{h_1}{2}, \quad \tau = \frac{Q}{2J_y} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right), \quad \sigma = \frac{M}{J} y.$$

$$\text{При } y = \pm \frac{h}{2}, \quad \tau = 0; \quad \sigma = \pm 135,5 \text{ МПа.}$$

$$\text{При } y = \pm \frac{h_1}{2}, \quad \tau = -16 \text{ МПа.}$$

$$\text{Для стенки двутавра } y < \frac{h_1}{2}, \quad \tau = \frac{Q}{2J_y} \left(\frac{h^2 - h_1^2}{4} \frac{b}{d} + \frac{h_1^2}{4} - y^2\right),$$

$$\sigma = \frac{M}{J} y.$$

При  $y = \pm \frac{h_1}{2}$ ,  $\tau = -30,92$  МПа;  $\sigma = 125,3$  МПа.

При  $y = 0$ ,  $\tau = -41,44$  МПа,  $\sigma = 0$ .

Эпюры  $\sigma$  и  $\tau$  приведены на рис. 2.4.

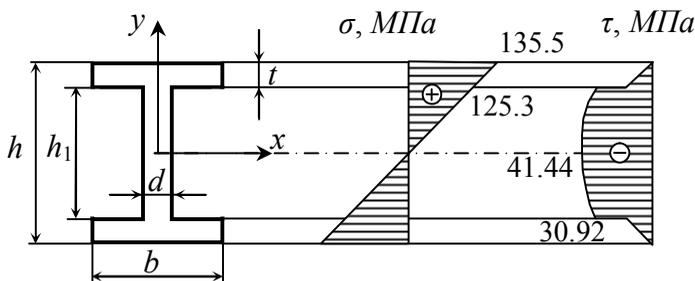


Рис. 2.4

Проверку выполнения условия теории прочности проведем для точки с координатой  $y = \frac{h_1}{2}$ , так как в этой точке  $\sigma$  и  $\tau$  значительны по величине  $\sigma = 125,3$  МПа,  $\tau = -30,92$  МПа.

Воспользовавшись соотношениями третьей теории прочности (5), находим

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{125,3^2 + 4 \cdot 30,92^2} = 139,7 \text{ МПа} < [\sigma].$$

Условие третьей теории прочности выполняется.

5. Запись универсального уравнения упругой линии балки и уравнения для углов поворота балки.

в виде (2.12).

Дифференциальное уравнение изгиба балки (2.6) с учетом выражения для изгибающего момента (2.12) имеет вид:

$$EJ \frac{d^2 v}{dx^2} = q_1 \frac{z^2}{2} - q_1 \frac{(z-l_1)_+^2}{2} - q_2 \frac{(z-l_1)_+^2}{2} + q_2 \frac{(z-l_1-l_2)_+^2}{2} + R_B(z-l_1)_+ + F(z-l_1-l_2/2)_+ + R_C(z-l_1-l_2)_+. \quad (2.14)$$

Интегрируя уравнение (2.14), находим соотношение для углов поворота и прогибов балки:

$$\begin{aligned}
EJ \frac{d\upsilon}{dz} = & EJ\theta_0 + q_1 \frac{z^3}{3} - q_1 \frac{(z-l_1)_+^3}{6} - q_2 \frac{(z-l_1)_+^3}{6} + \\
& + q_2 \frac{(z-l_1-l_2)_+^3}{6} + R_B \frac{(z-l_1)_+^2}{2} + \\
& + F \frac{(z-l_1-l_2/2)_+^2}{2} + R_C \frac{(z-l_1-l_2)_+^2}{2}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
EJ\upsilon = & EJ\upsilon_0 + EJ\theta_0 z + q_1 \frac{z^4}{12} - q_1 \frac{(z-l_1)_+^4}{24} - \\
& - q_2 \frac{(z-l_1)_+^4}{24} + q_2 \frac{(z-l_1-l_2)_+^4}{24} + R_B \frac{(z-l_1)_+^3}{6} + \\
& + F \frac{(z-l_1-l_2/2)_+^3}{6} + R_C \frac{(z-l_1-l_2)_+^3}{6}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Постоянные  $EJ\upsilon_0$ ,  $EJ\theta_0$  определяются из граничных условий. В данном случае балка шарнирно оперта в точках  $B$  и  $C$ , поэтому граничные условия записываются для шарнирных опор при  $z=l_1$  и  $z=l_1+l_2$ :

$$\upsilon(l_1) = 0, \quad \upsilon(l_1+l_2) = 0. \tag{2.17}$$

Подставляя выражение для прогиба (2.16) в условия (2.17), получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
& EJ\upsilon_0 + EJ\theta_0 l_1 + q_1 \frac{l_1^4}{24} = 0, \\
& EJ\upsilon_0 + EJ\theta_0 (l_1+l_2) + q_1 \frac{(l_1+l_2)^4}{24} - q_1 \frac{l_2^4}{24} - \\
& - q_2 \frac{l_2^4}{24} + R_B \frac{l_2^3}{6} + F \frac{l_2^3}{48} = 0.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Обратим внимание на то, что в первое уравнение системы (2.18) не входят слагаемые, содержащие  $q_2$ ,  $R_B$ ,  $F$ ,  $R_C$ . Это обусловлено тем, что в соотношении (2.16) используются обобщенные функции вида (2.7), которые будут равны нулю, если значение выражения в скобках

меньше или равно нулю. Поэтому при  $z = l_1$  обращаются в нуль множители в слагаемых содержащих  $q_2, R_B, F, R_C$ .

Подставляя в (2.18) значение параметров, находим

$$\begin{aligned} EJ\upsilon_0 + 2EJ\theta_0 \text{ м} &= -3,33 \text{ кН} \cdot \text{м}^3, \\ EJ\upsilon_0 + 6EJ\theta_0 \text{ м} &= -1100 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Решение системы уравнений (2.19) –

$$EJ\upsilon_0 = 533 \text{ кН} \cdot \text{м}^3, \quad EJ\theta_0 = -283 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Для построения эпюр прогибов и углов поворота вычисляем значения  $EJ\upsilon$  и  $EJ\theta \frac{d\upsilon}{dx} = EJ\theta$  в различных точках балки. Отметим, что при вычислениях следует обратить внимание на то, что в соотношениях (2.16), (2.15) используются не обычные, а обобщенные функции вида (2.7).

Так, например, при  $z = 1 \text{ м}$

$$\begin{aligned} EJ\upsilon &= 533 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 - 283 \cdot 1 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 + 50 \cdot \frac{1 \text{ кН}}{12 \text{ м}} \cdot \text{м}^4 - \\ &- 50 \cdot \frac{(-1)_+^4 \text{ кН}}{24 \text{ м}} \cdot \text{м}^4 - 30 \cdot \frac{(-1)_+^4 \text{ кН}}{24 \text{ м}} \cdot \text{м}^4 + 30 \cdot \frac{(-5)_+^4 \text{ кН}}{24 \text{ м}} \cdot \text{м}^4 - \\ &- 70 \cdot \frac{(-1)_+^3 \text{ кН}}{6} \cdot \text{м}^3 + 30 \cdot \frac{(-3)_+^3 \text{ кН}}{6} \cdot \text{м}^3 + 60 \cdot \frac{(-5)_+^3 \text{ кН}}{6} \cdot \text{м}^3 = \\ &533 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 - 283 \cdot 1 \text{ кН} \cdot \text{м}^3 + 50 \cdot \frac{1 \text{ кН}}{12 \text{ м}} \cdot \text{м}^4 = 252 \text{ кН} \cdot \text{м}^3. \end{aligned}$$

Полученные числовые результаты представлены в табл. 2.1. С использованием этих данных построены графики изменения по длине балки величин  $EJ\upsilon$ ,  $EJ\theta$  (рис. 2.5).

Таблица 2.1

$z, \text{ м}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$EJ\upsilon, \text{ кН} \cdot \text{м}^3$	533	252	0	-162	-212	-16	0	159	382
$EJ\theta, \text{ кН} \cdot \text{м}^2$	-283	-275	-217	-106	37	99	164	203	244

6. *Расчет балки на жесткость.* При определении наибольших значений прогибов в пролете и на консолях балки используем график для  $EJ\upsilon$ .

*В пролете балки BC*

$$[\upsilon] = \frac{l_2}{300} \approx 1,3 \text{ см.}$$

Учитывая, что на этом участке  $EJ\upsilon_{max} = 212 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$  (рис. 2.5), получаем

$$\begin{aligned} \upsilon_{max} &= \frac{212}{EJ} \text{ кН} \cdot \text{м}^3 = \frac{212 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot 10^6 \text{ см}^3}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 13380 \text{ см}^4} = \\ &= \frac{212 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{см}^3}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 10^2 \text{ Н/см}^2 \cdot 13380 \text{ см}^4} = 0,82 \text{ см} < 1,3 \text{ см.} \end{aligned}$$

Условие жесткости выполняется,  $\upsilon_{max} < [\upsilon]$ .

*На консоли AB*

$$[\upsilon] = \frac{l_1}{150} \approx 1,3 \text{ см.}$$

Как видно из рис. 2.5, на консоли  $AB$   $EJ\upsilon_{max} = 533 \text{ кН} \cdot \text{м}^3$ , следовательно

$$\begin{aligned} \upsilon_{max} &= \frac{533}{EJ} \text{ кН} \cdot \text{м}^3 = \\ &= \frac{533 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{см}^3}{2 \cdot 10^7 \text{ Н/см}^2 \cdot 13380 \text{ см}^4} = 2 \text{ см} > 1,3 \text{ см.} \end{aligned}$$

Условие жесткости не выполняется  $\upsilon_{max} > [\upsilon]$ . Чтобы удовлетворить условию жесткости балки необходимо увеличить номер двутавра. Берем двутавр № 45, для которого  $J = 27450 \text{ см}^4$ ,

$$\upsilon_{max} = \frac{533 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 27450 \text{ см}^4} = 0,97 \text{ см} < 1,3 \text{ см.}$$

Условие жесткости выполняется.

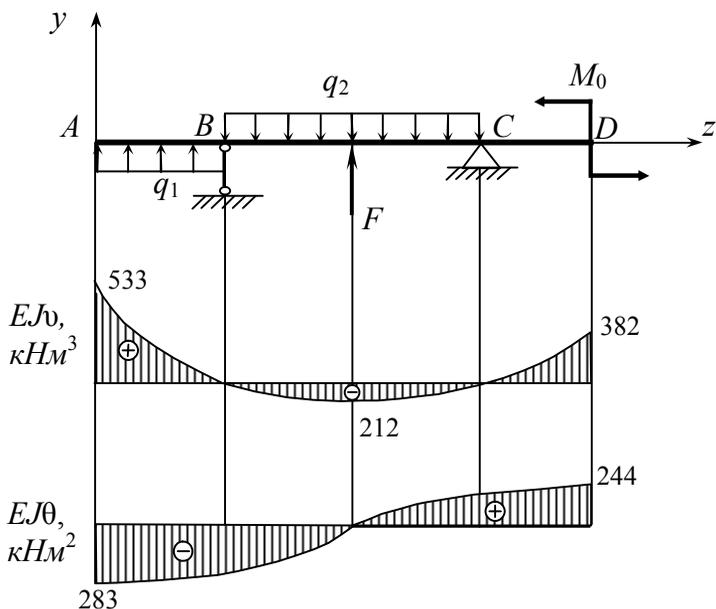


Рис. 2.5

На консоли CD

$$[v] = \frac{l_3}{150} \approx 1,3 \text{ см}, \quad EJv_{\max} = 382 \text{ кН} \cdot \text{м}^3,$$

$$v_{\max} = \frac{382 \text{ кН} \cdot \text{м}^3}{2 \cdot 10^5 \text{ МПа} \cdot 27450 \text{ см}^3} = 0,7 \text{ см} < 1,3 \text{ см}.$$

Условие жесткости выполняется.

Таким образом, в рассмотренном случае условиям прочности и жесткости удовлетворяет двутавр № 45.

### 2.3. ЗАДАНИЕ К РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЕ «РАСЧЕТ БАЛКИ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ»

Балка с поперечным сечением в виде двутавра находится под действием заданных внешних сил. Требуется выполнить расчеты на прочность и жесткость.

Исходные данные представлены в табл. 2.2, расчетные схемы – на рис. 2.6.

Исходные данные и расчетные схемы выбираются в соответствии с шифром и вариантом задания.

Требуется сделать следующие расчеты:

1) Из условия прочности по максимальным нормальным напряжениям подобрать размеры поперечного сечения балки. Проверить выполнение условия прочности по максимальным касательным напряжениям и условия третьей теории прочности.

2) Записать универсальное уравнение упругой линии балки и уравнение для углов поворота балки. Построить эпюры погибов и углов поворота.

3) Произвести расчет на жесткость по максимальным прогибам в полете и на консольной части балки.

Допускаемые значения прогиба балки в пролете  $[\nu] = l_{np} / 300$ , на консоли  $[\nu] = l_k / 150$ , где  $l_{np}$ ,  $l_k$  – соответственно, длина пролета и консольной части балки.

Таблица 2.2

№ вар-та	$F$ , кН	$q$ , кН/м	$M_0$ , кН·м	$a$ , м
1	9	12	15	1,1
2	33	3	30	1,2
3	18	42	27	1,3
4	24	36	45	1,4
5	6	21	39	1,5
6	8	10	20	1,6
7	2	16	28	1,7
8	22	36	12	1,8
9	4	30	24	1,9
10	38	26	44	2

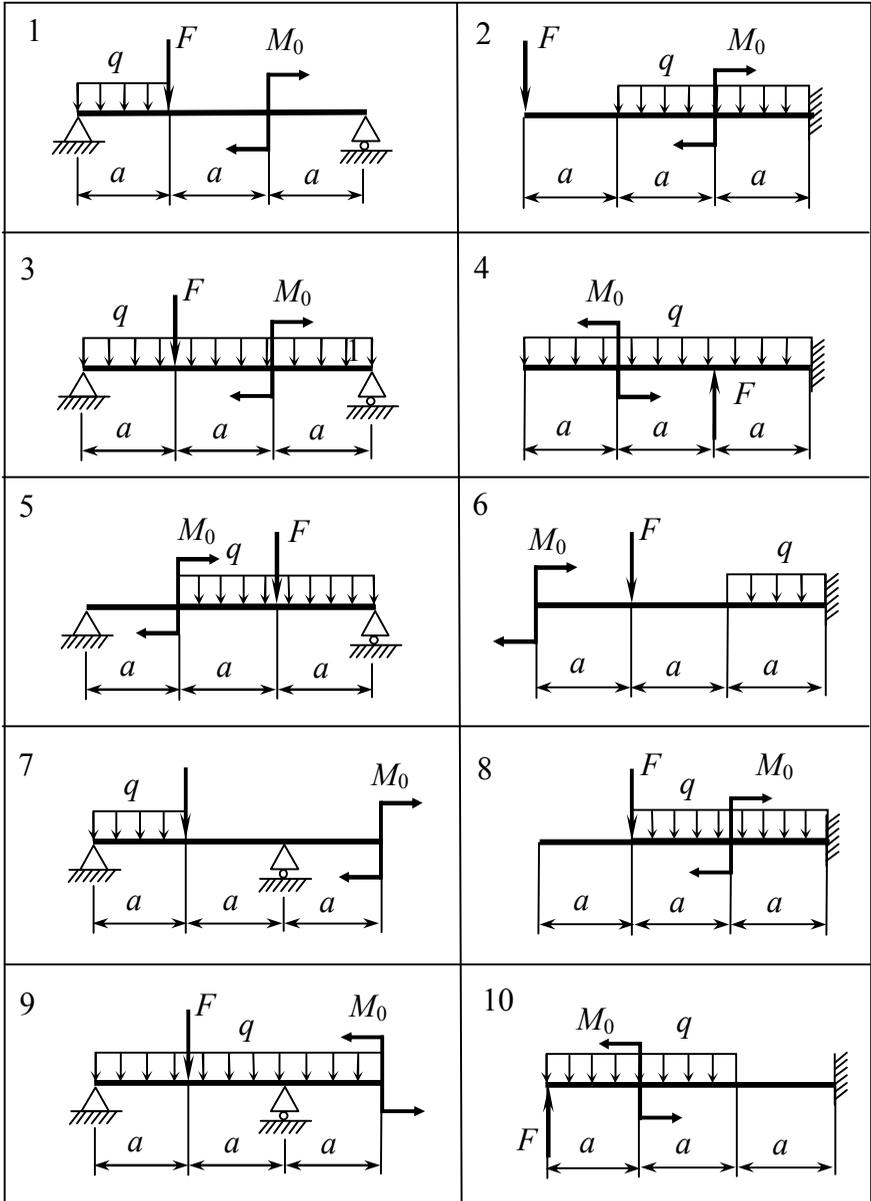


Рис. 2.6

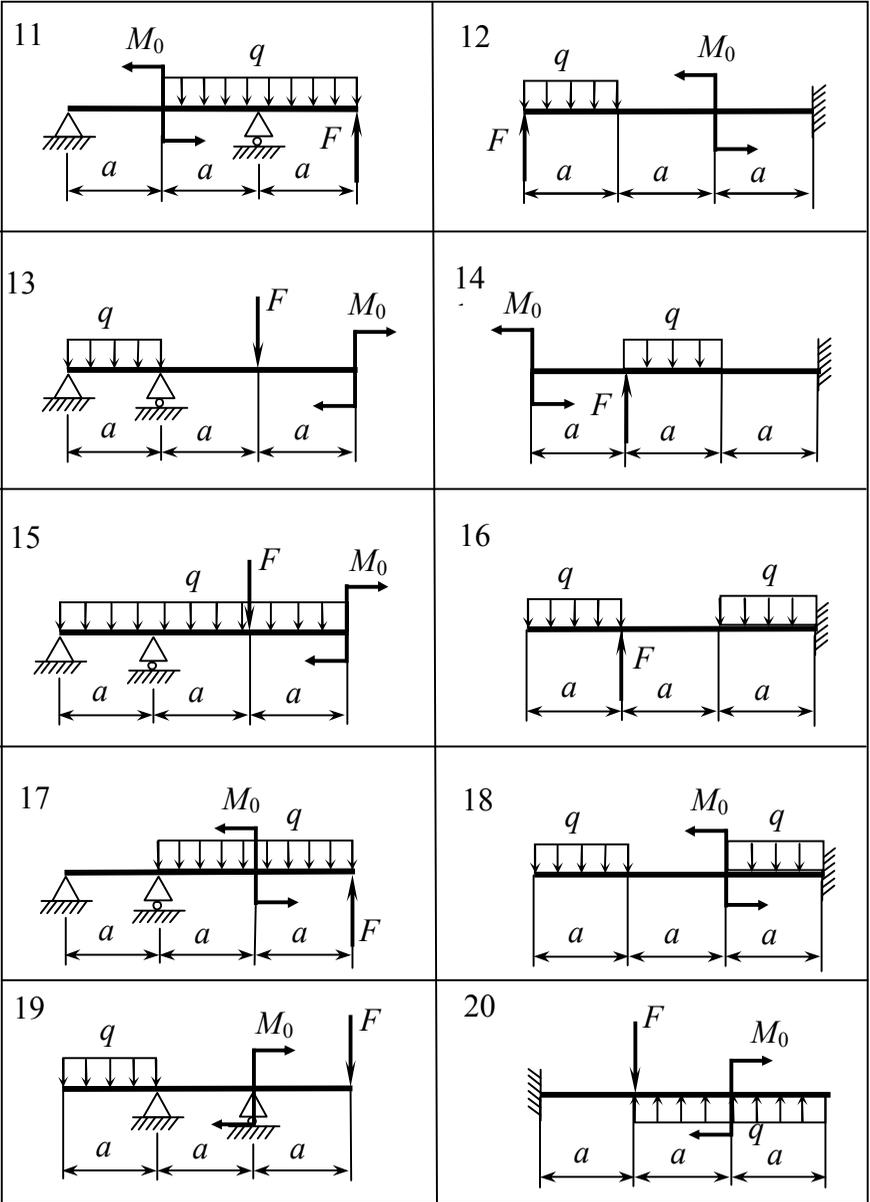


Рис. 2.6 (продолжение)

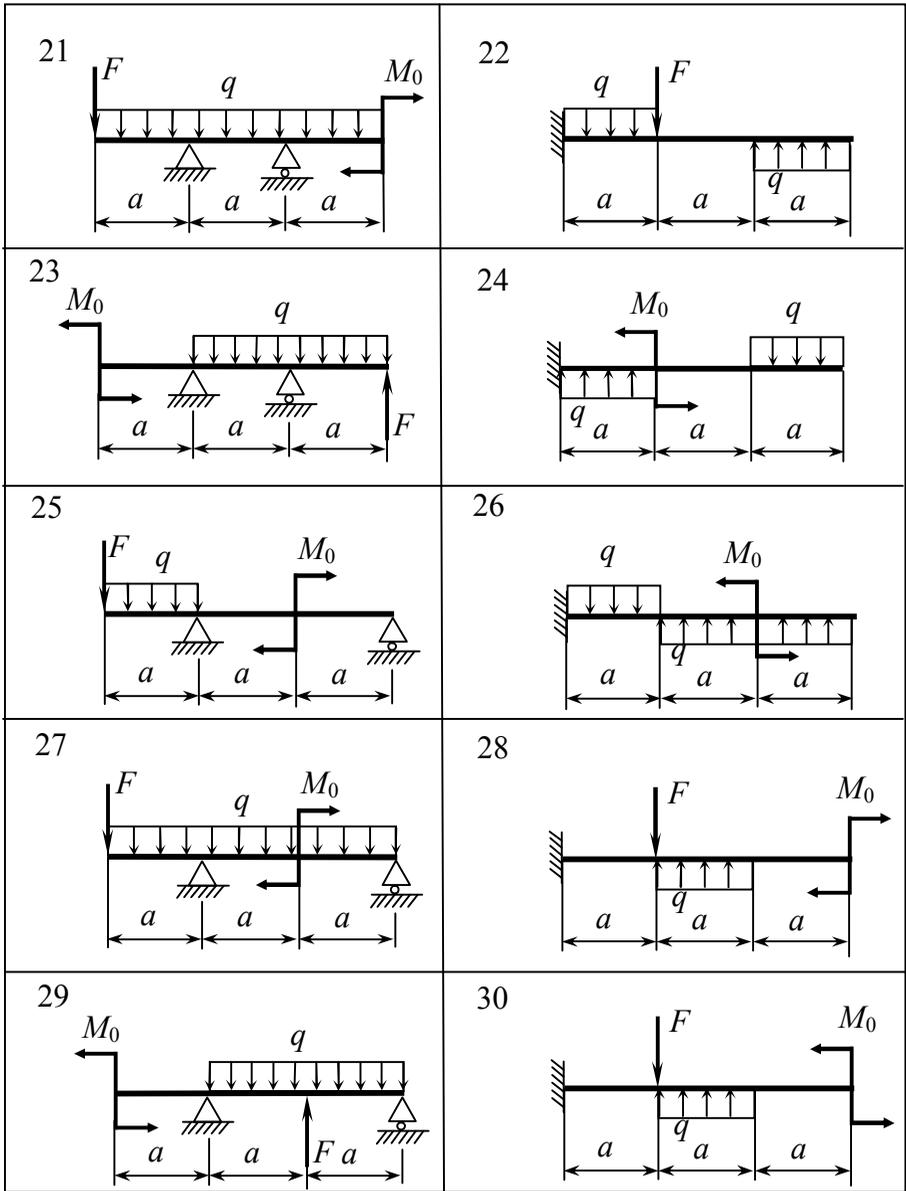
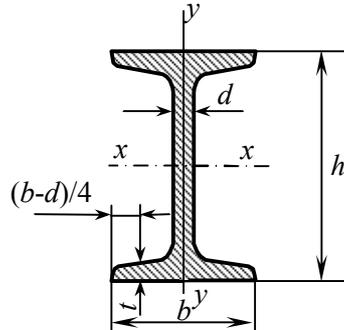


Рис. 2.6 (продолжение)

## 2.4. ПРИЛОЖЕНИЕ

Сортамент прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8239-72, 8240-72, 8510-72

### Двутавры



№ балки	Размеры, мм				Площадь сечения, см <sup>2</sup>	Масса 1м, кг	Справочные величины для осей						
	h	b	d	t			x-x				y-y		
							$I_{x_3}$ , см <sup>4</sup>	$W_{x_3}$ , см <sup>3</sup>	$i_{x_3}$ , см	$S_{x_3}$ , см <sup>3</sup>	$I_{y_3}$ , см <sup>4</sup>	$W_{y_3}$ , см <sup>3</sup>	$I_{y_3}$ , см
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
10	100	55	4.5	7.2	12.0	9.46	198	39.7	4.06	23.0	17.9	6.49	1.22
12	120	64	4.8	7.3	14.7	11.50	350	58.4	4.88	33.7	27.9	8.72	1.38
14	140	73	4.9	7.5	17.4	13.70	572	81.7	5.73	46.8	41.9	11.50	1.55

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
16	160	81	5.0	7.8	20.2	15.90	873	109.0	6.57	62.3	58.6	14.50	1.70
18	180	90	5.1	8.1	23.4	18.40	1290	143.0	7.42	81.4	82.6	18.40	1.88
18a	180	100	5.1	8.3	25.4	19.90	1430	159.0	7.51	89.8	114.0	22.80	2.12
20	200	100	5.2	8.4	26.8	21.00	1840	184.0	8.28	104.0	115.0	23.10	2.07
20a	200	110	5.2	8.6	28.9	22.70	2030	203.0	8.37	114.0	155.0	28.20	2.32
22	220	110	5.4	8.7	30.6	24.00	2550	232.0	9.13	131.0	157.0	28.60	2.27
22a	220	120	5.4	8.9	32.8	25.80	2790	254.0	9.22	143.0	206.0	34.30	2.50
24	240	115	5.6	9.5	34.8	27.30	3460	289.0	9.97	163.0	198.0	34.50	2.37
24a	240	125	5.6	9.8	37.5	29.40	3800	317.0	10.10	178.0	260.0	41.60	2.63
27	270	125	6.0	9.8	40.2	31.50	5010	371.0	11.20	210.0	260.0	41.50	2.54
27a	270	135	6.0	10.2	43.2	33.90	5500	407.0	11.30	229.0	337.0	50.00	2.80
30	300	135	6.5	10.2	46.5	36.50	7080	472.0	12.30	268.0	337.0	49.90	2.69
30a	300	145	6.5	10.7	49.9	39.20	7780	518.0	12.50	292.0	436.0	60.10	2.95
33	330	140	7.0	11.2	53.8	42.20	9840	597.0	13.50	339.0	419.0	59.90	2.79
36	360	145	7.5	12.3	61.9	48.60	13380	743.0	14.70	423.0	516.0	71.10	2.89
40	400	155	8.3	13.0	72.6	57.00	19062	953.0	16.20	545.0	667.0	86.10	3.03
45	450	160	9.0	14.2	84.7	66.50	27696	1231.0	18.10	708.0	808.0	101.00	3.09
50	500	170	10.0	15.2	100.0	78.50	39727	1589.0	19.90	919.0	1043.0	123.00	3.23
55	550	180	11.0	16.5	118.0	92.60	55962	2035.0	21.80	1181.0	1356.0	151.00	3.39
60	600	190	12.0	17.8	138.0	108.00	76806	2560.0	23.60	1491.0	1725.0	182.00	3.54