

На правах рукописи



ШАЙДУЛЛИНА НАТАЛЬЯ КОНСТАНТИНОВНА

**МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО
ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ
ЖИЗНИ ЗАЯВОК**

1.2.2. Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Казань – 2026

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Казанский национальный исследовательский технологический университет»

Научный руководитель: доктор педагогических наук,
кандидат технических наук, профессор
Нуриев Наиль Кашапович

Официальные оппоненты: **Бахарева Надежда Федоровна**
доктор технических наук, профессор, федеральное
государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Поволжский
государственный университет телекоммуникаций и
информатики», профессор кафедры информатики и
робототехнических систем;

Мокшин Владимир Васильевич
кандидат технических наук, доцент, федеральное
государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Казанский
национальный исследовательский технический
университет им. А. Н. Туполева-КАИ», доцент
кафедры автоматизированных систем обработки
информации и управления.

Ведущая организация: Ордена Трудового Красного Знамени федеральное
государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования «Московский
технический университет связи и информатики»,
г. Москва.

Защита состоится «13» ноября 2026 года в 14:00 на заседании
диссертационного совета 24.2.312.08, созданного на базе ФГБОУ ВО «Казанский
национальный исследовательский технологический университет» (420015,
г. Казань, ул. К. Маркса, д. 68, зал заседаний Ученого совета, А-330).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Казанский
национальный исследовательский технологический университет» и на сайте
<https://www.kstu.ru/servlet/contentblob?id=593469>.

Автореферат диссертации разослан «___» _____ 2026 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета 24.2.312.08,
доктор экономических наук, доцент



Кудрявцева
Светлана
Сергеевна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В работе рассмотрены системы массового обслуживания, особенностью которых является наличие ограничения на время жизни заявок. В концепции федеральной программы «Развитие промышленной робототехники и автоматизации производства» разработка и внедрение программных и аппаратных средств управления роботизированными системами заложены как необходимые компоненты системного подхода к формированию промышленной роботизации. Системы массового обслуживания могут быть использованы для построения моделей управления потоками в роботизированных системах, а сформированный инструментарий теории массового обслуживания позволит выполнить предпроектный анализ эффективности, запланировать минимальные резервные мощности для бесперебойной работы, сбалансировать загрузку, обеспечить гибкую перенастройку системы без остановки производства.

Существующие на сегодняшний день модели систем массового обслуживания, предусматривающие ограничения по времени, имеют ряд особенностей, которые не позволяют предложить универсальные решения для систем разного типа. Большинство аналитических моделей построены для пуассоновского входного потока заявок, экспоненциального характера обслуживания и ограниченного времени ожидания обслуживания. Они созданы для систем с накопителями и подразумевают возможность потери требования только в процессе ожидания обслуживания. В отличие от них, в системах с ограниченным временем жизни заявок утрата заявки может произойти как в процессе ожидания, если имеется опция накопления очереди, так и в процессе обработки. Кроме того, классические модели СМО не пригодны для анализа функционирования систем с групповым поступлением требований.

Как правило, целью моделирования СМО является получение функциональных характеристик системы для анализа эффективности ее работы. Зачастую для принятия управленческих решений оказывается недостаточно знания стандартных показателей эффективности системы, таких как относительная пропускная способность, среднее время ожидания заявки в очереди на обслуживание, вероятность отказа в обслуживании и др. Для объективного анализа поведения системы и прогнозирования результатов ее работы при изменении входных или управляющих параметров требуется не только знание показателей эффективности функционирования системы, но и оценка влияния изменения этих параметров на ее эксплуатационные характеристики. Именно это позволяет оценить целесообразность введения дополнительных мощностей или исключения действующих для оптимизации производительности системы.

В контексте сказанного, актуальным является создание инструментов для получения характеристик СМО с ограниченным временем жизни заявок и анализа их взаимозависимости, которые будут универсальными для разных систем: с ожиданием или без него, одноканальных или многоканальных, с ординарным или групповым поступлением требований.

Степень разработанности темы исследования. Принято считать, что научные исследования в области теории массового обслуживания начались с работ датского инженера А. К. Эрланга. Существенно способствовали развитию теории очередей на заре ее становления такие известные ученые, как А.А. Марков, А. Н. Колмогоров, Ф. Поллачек, А. Я. Хинчин. Большой вклад в развитие математического аппарата внесли советские ученые: Е. С. Вентцель, Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко,

А. А. Боровков; и зарубежные: К. Пальм, Д. Кендалл, Т. Саати, Л. Такач, Л. Клейнрок, Д. Литтл.

Усложнение аналитических моделей постепенно становилось препятствием к их практическому применению, что обусловило возрастание интереса к численным решениям. Появились методы статистического моделирования, на основе которых строились имитационные модели. Среди основоположников этого направления следует выделить А. Л. Лифшица, Р. Шеннона, Дж. Кляйнена, Н. П. Бусленко. Прогресс в области вычислительной техники способствовал появлению компьютерных сетей. В области применения теории очередей для изучения компьютерных сетей наиболее известными на начальном этапе были имена Х. Тагаки, Л. Клейнрока, С. Ф. Яшкова, В. М. Вишневого.

В настоящее время исследование систем, моделируемых как СМО, проводят К. Е. Самуйлов, Ю. В. Гайдамака, А. Н. Дудин, А. А. Назаров, С. П. Моисеева, А. В. Печинкин, А. Н. Моисеев, В. В. Рыков, С. В. Пауль, В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева, Б. Я. Лихтциндер, М. В. Яшина, А. Г. Таташев, А. Ю. Привалов и др.

Изучением СМО с различными ограничениями времени занимались зарубежные ученые: Д. Баррер, Дж. Коэн, Дж. Дейли; и отечественные: Е. С. Вентцель, И. Н. Коваленко, Л. Г. Афанасьева, А. П. Кирпичников, Ю. И. Рыжиков. Описанные исследователями аналитические модели СМО с ограниченным временем действуют только в условиях, для которых они получены: простейший или детерминированный потоки, постоянное ограничение на время ожидания обслуживания, один канал обслуживания и др. При этом практическая ценность некоторых из этих моделей оказывается ограниченной ввиду существенной сложности получения на их основе количественных результатов. Естественным путем преодоления этих затруднений является имитационное моделирование.

Целью исследования является разработка математических моделей, алгоритмов и программных комплексов для анализа характеристик систем массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок и возможностей повышения эффективности их функционирования.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

1. Построена математическая модель системы массового обслуживания пуассоновского потока заявок с ограниченным временем жизни без опции накопления очереди; построена математическая модель одноканальной системы массового обслуживания группового потока заявок с ограниченным временем жизни с опцией накопления очереди.

2. Построены и реализованы программно имитационные модели для различных систем массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок: с ожиданием и без него, одноканальных и многоканальных, с ординарным и групповым поступлением требований.

3. Подтверждена адекватность разработанных имитационных моделей посредством сравнения результатов их работы с аналитическими решениями.

4. Выполнен анализ влияния характеристик систем массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок на их эксплуатационные характеристики.

5. Проведено исследование возможностей повышения эффективности функционирования систем массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок.

6. Проведена апробация полученных результатов.

Объектом исследования являются системы массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок.

Предметом исследования являются математические и имитационные модели систем массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок.

Соответствие паспорту научной специальности. Область диссертационного исследования соответствует следующим пунктам паспорта научной специальности 1.2.2 Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: п.6. Разработка систем компьютерного и имитационного моделирования, алгоритмов и методов имитационного моделирования на основе анализа математических моделей (технические науки); п.8. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента; п.9. Постановка и проведение численных экспериментов, статистический анализ их результатов, в том числе с применением современных компьютерных технологий (технические науки).

Научная новизна результатов, полученных в диссертационной работе, состоит в следующем:

1. *Разработана новая математическая модель* системы массового обслуживания пуассоновского потока заявок с фиксированным ограничением времени жизни без опции накопления очереди, *отличающаяся* нестандартным подходом к построению, *позволяющая* использовать ее в инженерных расчетах (п.8 паспорта специальности 1.2.2).

2. *Построена новая математическая модель* одноканальной системы массового обслуживания группового входного потока заявок с ограниченным временем жизни с опцией накопления очереди, *отличающаяся* наличием нестандартного показателя эффективности функционирования, *позволяющая* находить время и величину управляющего воздействия на систему с целью повышения этого показателя (п.8 паспорта специальности 1.2.2).

3. На основе концептуальной модели одноканальной системы с ожиданием и случайным временем жизни заявок, разработанной Б.В. Гнеденко и И.Н. Коваленко, *получено аналитическое решение задачи* нахождения основных характеристик СМО для простейшего входного потока, экспоненциального времени обслуживания и равномерно распределенного времени жизни заявок, *позволяющее* верифицировать имитационную модель (п.8 паспорта специальности 1.2.2).

4. *Разработаны имитационные модели* систем массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок, *реализованные* на языке программирования С#, *позволяющие* находить характеристики разных систем: с ожиданием и без него, одноканальных и многоканальных, с ординарным и групповым поступлением требований (п.6 паспорта специальности 1.2.2).

5. *Установлено существование* порогового значения времени жизни заявок в СМО, *позволяющее* определить зону возможного воздействия на систему для изменения ее эффективности функционирования. *Выявлено*, что для СМО, обрабатывающих поток заявок с ограниченным временем жизни, доля заявок, обслуженных в полном объеме, с увеличением числа действующих каналов стремится к некоторому пороговому значению, которое практически не зависит от интенсивности входного потока, но зависит от времени жизни заявки и среднего времени обслуживания. Это *позволяет* выполнить предпроектную оценку эффективности системы. (пп.8, 9 паспорта специальности 1.2.2).

6. Для одноканальной СМО с групповым потоком заявок с ограниченным временем жизни и случайным потоком обслуживания *найдены* время и величина управляющего воздействия на систему, которые *позволяют* обеспечить максимально возможную эффективность ее функционирования, определенную специальным экономическим критерием (пп.8, 9 паспорта специальности 1.2.2).

Теоретическая значимость диссертационной работы состоит в следующем: предложены новые математические модели систем массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок; получены пороговые значения относительной пропускной способности СМО и установлена зона влияния на него времени жизни заявок; предложен экономический критерий эффективности функционирования одноканальной системы массового обслуживания для группового поступления заявок с ограниченным временем жизни.

Практическая значимость диссертационной работы состоит в том, что полученные результаты могут быть применены в медицинских, информационных, телекоммуникационных, производственных и торговых областях в качестве теоретически обоснованных критериев для проектирования СМО, в которых заявки на обслуживание имеют ограниченный срок жизни и могут приходить группами. Они позволяют оценивать результативность работы системы при изменении параметров и находить время и величину управляющего воздействия с целью максимально возможного повышения эффективности их функционирования.

Методология и методы исследования включают математический аппарат теории массового обслуживания, анализа, имитационное моделирование, программная реализация которого выполнена на языке с#.

Положения, выносимые на защиту:

1. Математическая модель системы массового обслуживания пуассоновского потока заявок с фиксированным ограничением времени жизни без опции накопления очереди.

2. Математическая модель одноканальной системы массового обслуживания группового входного потока заявок с ограниченным временем жизни с опцией накопления очереди.

3. Аналитическое решение задачи нахождения основных характеристик СМО для простейшего входного потока, экспоненциального времени обслуживания и равномерно распределенного времени жизни заявок.

4. Имитационные модели систем массового обслуживания с фиксированным ограничением времени жизни заявок.

5. Результаты анализа характеристик систем массового обслуживания с фиксированным ограничением времени жизни заявок и исследования влияния параметров систем на их эксплуатационные характеристики.

6. Результаты исследований возможности повышения эффективности функционирования систем массового обслуживания с фиксированным ограничением времени жизни заявок.

Степень достоверности. Результаты работы являются достоверными благодаря обоснованному использованию математического аппарата теории массового обслуживания и анализа, подтвержденной адекватности имитационных моделей.

Личный вклад автора заключается в проведении основного объема теоретических исследований, в создании имитационных моделей и проведении экспериментов, в анализе и оформлении результатов в виде научных публикаций и

докладов, в создании и регистрации программы «Эффективное обслуживания группы заявок с ограниченным временем жизни».

Апробация работы. Результаты диссертационной работы представлены докладами на XIII Международной научно-практической конференции «Вызовы современности и стратегии развития общества в условиях новой реальности» (г. Москва, 2022г.), 37-й международной научной мультиконференции «Математические методы в технике и технологиях» (г. Казань, 2024г.), XXXIX Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы науки и образования в условиях современных вызовов» (г. Москва, 2025г.).

Разработанные методы повышения эффективности систем массового обслуживания используются в деятельности организации ООО «ТД ПОЛИХИМТРЕЙД».

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 11 научных работах, из них 8 статей в журналах из перечня рецензируемых научных изданий, рекомендованных высшей аттестационной комиссией Министерства науки и высшего образования Российской Федерации. Получено 1 свидетельство о государственной регистрации электронного ресурса с оценкой новизны («Эффективное обслуживания группы заявок с ограниченным временем жизни»).

Структура и объем диссертации. Диссертационное исследование состоит из введения, 4 глав, заключения, списка литературы, двух приложений. Общий объем составляет 139 страниц, включая 48 рисунков и 18 таблиц. Список литературы содержит 148 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит обоснование темы диссертационного исследования, формулировку цели и задач, описание научной новизны, теоретической и практической значимости результатов, положения, выносимые на защиту.

В первой главе «Системы массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок» описано развитие теории систем массового обслуживания, приведена классификация СМО, обозначены особенности систем с ограниченным временем жизни заявок, проанализирована возможность применения аналитических методов для решения реальных задач, обосновано применение инструментов имитационного моделирования, отражены основные положения методологии имитационного моделирования.

В п. 1. 1 описано развитие теории массового обслуживания в хронологическом порядке.

В п. 1. 2 приведена классификация систем массового обслуживания, выделены категории показателей эффективности функционирования СМО, описаны особенности систем, для оценки функционирования которых целесообразно применять показатели конкретной категории.

В п. 1. 3 рассмотрены особенности систем массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок, главной из которых является формирование потока потерянных требований, содержащего (кроме заявок, покинувших очередь) заявки, принятые на обслуживание и не завершившие его по причине истечения срока жизни. Описаны направления исследований систем массового обслуживания с ограничениями, обозначены их особенности и локальный характер области применения.

В п. 1.4 изложены основные положения методологии имитационного моделирования, представлена общая схема имитационных исследований сложных систем.

Во второй главе «Системы массового обслуживания со случайным ограничением времени жизни заявок» описана концептуальная модель одноканальной СМО для обслуживания простейшего потока заявок, разработанная Б.В. Гнеденко и И.Н. Коваленко; поставлена и решена задача для равномерно ограниченного времени жизни заявок; приведен алгоритм построения имитационной модели для решения поставленной задачи; проведена верификация построенной и реализованной программно имитационной модели по аналитическим результатам.

В п. 2.1 описана математическая модель задачи нахождения функции распределения фактического времени ожидания обслуживания для стационарного состояния одноканальной системы обработки простейшего потока заявок.

Для построения модели вводятся следующие характеристики:

λ – интенсивность простейшего входного потока заявок;

$H(t)$ – функция распределения случайной величины – времени обслуживания;

$B(\omega)$ – распределение вероятностей того, что время ожидания заявки в очереди равно некоторой случайной величине x ;

$G_y(\omega)$ – распределение вероятностей того, что после пребывания заявки в очереди в течение отрезка времени x , заявка попадет на обслуживание, где будет находится в течение отрезка времени, не большего ω ;

$v(t)$ – случайная величина – время ожидания начала обслуживания заявки, поступившей в систему в момент времени t ;

$F(\omega, t) = P(v(t) < \omega)$ – функция распределения фактического времени ожидания обслуживания.

Для стационарного состояния, существование которого показано в работах Афанасьевой Л. Г., уравнение для нахождения функции распределения ожидания обслуживания имеет вид:

$$\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega} - \lambda \int_0^{\omega} (1 - B(x))(1 - G_x(\omega - x))(1 - H(\omega - x))dF(x) = 0. \quad (1)$$

Функция $F(\omega)$ терпит разрыв в точке 0 и абсолютно непрерывна при $\omega > 0$.

Пусть $f(\omega)$ – производная справа от функции $F(\omega)$. Тогда формула (1) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} f(\omega) - \lambda \int_0^{\omega} (1 - B(x))(1 - G_{\omega}(\omega - x))(1 - H(\omega - x))f(x)dx = \\ = \lambda F(0)(1 - G_0(\omega))(1 - H(\omega)), \end{aligned} \quad (2)$$

где $F(0)$ находится из условия нормировки

$$F(0) + \int_0^T f(x)dx = 1, \quad (3)$$

здесь T – максимальное время жизни требования.

Для входных параметров: средней интенсивности входного потока заявок $\lambda = 6$, средней интенсивности обслуживания $\mu = 10$, равномерно распределенного на отрезке

[0,2] времени жизни заявок путем решения уравнения (2) найдена плотность распределения фактического времени ожидания обслуживания:

$$f(x) \approx 0.456(6 - 3x)e^{-4x-1.5x^2},$$

а также наиболее значимые эксплуатационные характеристики функционирования СМО:

1. вероятность ухода заявки из очереди $\alpha \approx 0.048$;
2. вероятность потери заявки в процессе обслуживания $\beta \approx 0.059$;
3. относительная пропускная способность $Q \approx 0.893$.

В п. 2.2 описан алгоритм работы имитационной модели, построенной для решения задачи нахождения наиболее значимых эксплуатационных характеристик функционирования системы с очередью, одним каналом обслуживания и случайным временем жизни заявок, который реализован на языке программирования С#; приведены результаты его работы. Показано совпадение результатов имитационного и аналитического моделирования с точностью до сотых долей, которое позволяет утверждать, что разработанная имитационная модель адекватна и может быть использована для других функций распределения потоков заявок.

Третья глава «Системы массового обслуживания с фиксированным ограничением времени жизни заявок» посвящена исследованию СМО заявок, время жизни которых ограничено постоянной величиной. Рассмотрены одноканальные и многоканальные системы с ординарными и групповыми входными потоками, как имеющие опцию накопления очереди, так и без нее.

В п. 3.1 предложена математическая модель СМО пуассоновского потока заявок с отказами, предназначенная для инженерных расчетов.

Для построения модели введена дополнительная характеристика – интенсивность выхода заявок из системы ($\hat{\mu}$). Модифицированы формулы нахождения стационарных вероятностей для системы с ограниченным временем жизни заявок:

$$\widehat{P}_0 = \frac{\hat{\mu}}{\lambda + \hat{\mu}}, \quad \widehat{P}_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \hat{\mu}}. \quad (4)$$

Для нахождения $\hat{\mu}$ выполнены следующие действия.

Доля полностью обслуженных заявок, принятых каналом на обслуживание, обозначена через q . Тогда ограничение на время жизни заявок позволяет определить ее как

$$q = \int_0^{t_{end}} f(t)dt. \quad (5)$$

где $f(t)$ – функция плотности распределения значений времени обслуживания, t_{end} – время жизни заявок.

Среднее время пребывания в системе полностью обслуженных заявок определяется как средневзвешенная величина, где в качестве весовой характеристики выступают доли обслуженных заявок, то есть фактически является медианным значением t_M , которое находится из условия:

$$\int_0^{t_M} f(t)dt = \int_{t_M}^{t_{end}} f(t)dt = \frac{q}{2}. \quad (6)$$

Исходя из того, что время пребывания в системе всех не полностью обслуженных требований одинаково и равно t_{end} , среднее время пребывания $\bar{t}$ всех заявок, попавших на обслуживание, определяется как

$$\bar{t} = qt_M + (1 - q)t_{end}, \quad (7)$$

а средняя интенсивность выхода заявок из системы, как

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\bar{t}}.$$

Тогда доля заявок, обслуженных полностью (Q), вычисляется так:

$$Q = q\widehat{P}_0, \quad (8)$$

а доля заявок, попавших на обслуживание, но потерянных по причине окончания срока жизни (R), так:

$$R = (1 - q)\widehat{P}_0. \quad (9)$$

Для многоканальных СМО с устройствами одинаковой производительности и отсутствием очереди формулы Эрланга для нахождения финальных вероятностей состояний системы принимают вид:

$$\widehat{P}_0 = \left[\sum_{j=0}^n \frac{\hat{\rho}^j}{j!} \right]^{-1}, \quad \widehat{P}_j = \frac{\hat{\rho}^j}{j!} \widehat{P}_0, \quad \hat{\rho} = \frac{\lambda}{\hat{\mu}}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (10)$$

где n – число каналов обслуживания, $\hat{\rho}$ – интенсивность нагрузки на канал, $\widehat{P}_j$ – вероятность того, что занято j каналов, $\widehat{P}_0$ – вероятность того, что все каналы свободны.

В этом случае вероятность непопадания заявки в систему по причине занятости всех обслуживающих устройств находится по формуле:

$$\widehat{P}_{отк} = \widehat{P}_n = \frac{\hat{\rho}^n}{n!} \widehat{P}_0, \quad (11)$$

доля полностью обслуженных заявок рассчитывается так:

$$Q = q \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{P}_j, \quad (12)$$

доля заявок, попавших на обслуживание, но потерянных по причине окончания срока жизни, определяется следующим образом:

$$R = (1 - q) \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{P}_j. \quad (13)$$

В п. 3.2 описан алгоритм работы построенной имитационной модели СМО ординарного потока заявок с постоянным временем жизни, реализованный на языке программирования С#; представлены результаты имитационных экспериментов; выполнено их сопоставление с аналитическими; проведен анализ влияния времени жизни заявок и количества каналов обслуживания на эксплуатационные характеристики системы.

В п. 3.2.1 рассмотрены системы без очереди. Принято, что интервалы поступления заявок и значения времени обслуживания заявки – случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону. С помощью серии имитационных экспериментов найдены: средняя доля заявок, получивших полное обслуживание, средняя доля заявок, начавших обслуживание, но не закончивших его по причине окончания срока жизни, средняя доля заявок, не попавших на обслуживание.

Установлено, что существует пороговое значение времени жизни заявок, при достижении которого его влияние на функционирование системы практически исчезает, а относительная пропускная способность системы стремится к определенному предельному значению. Графическая иллюстрация этого приведена на рисунке 1.

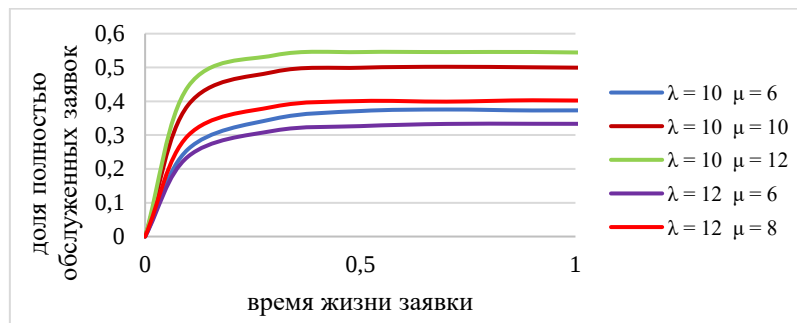


Рисунок 1 – Зависимости долей полностью обслуженных заявок от времени их жизни в одноканальных СМО без очереди

Многоканальные системы с эквивалентными каналами также демонстрируют тенденцию «к выходу на плато». По мере уменьшения числа задействованных каналов доля заявок, получивших полное обслуживание, существенно снижается (рис. 2).

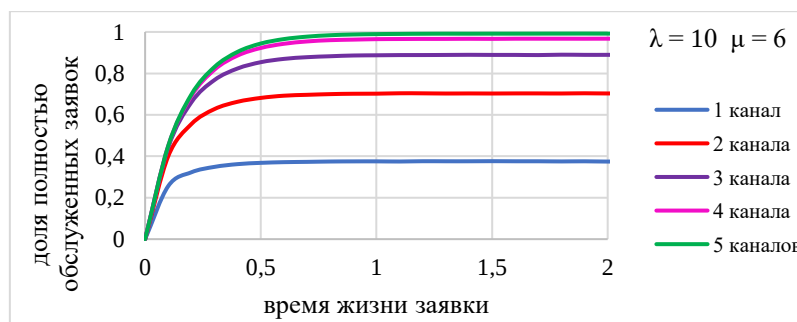


Рисунок 2 – Зависимости долей полностью обслуженных заявок от времени их жизни в многоканальной СМО без очереди

В п. 3. 2. 2 рассмотрены СМО ординарного потока заявок с опцией накопления очереди. Законы распределения значений времени приняты экспоненциальными, каналы обслуживания полагаются эквивалентными. Найдены средние доли обслуженных полностью, недообслуженных и необслуженных заявок. Обнаружена та же тенденция к «выходу на плато» при увеличении времени жизни заявки, что и для систем без очереди. Найдены финальные значения относительной пропускной способности системы для разного числа каналов обслуживания. Графическая иллюстрация этого приведена на рисунке 3.

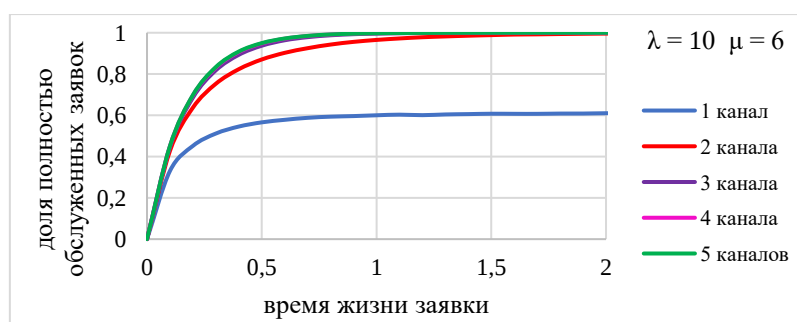


Рисунок 3 – Зависимости долей полностью обслуженных заявок от времени их жизни в многоканальных СМО с очередью

В п. 3.3 описан алгоритм работы построенной имитационной модели СМО группового входного потока заявок с постоянным временем жизни и ординарным обслуживанием, реализованный на языке программирования С#; представлены результаты имитационных экспериментов; проведен анализ влияния времени жизни заявок и количества каналов обслуживания на эксплуатационные характеристики системы.

В п. 3.3.1 рассмотрены системы без очереди. Законы распределения значений времени между поступлением групп заявок и их обслуживанием приняты экспоненциальными. Закон распределения количества заявок в составе группы принят равномерным. Установлено экспериментально, что одноканальные системы являются малоэффективными в силу невозможности одновременного обслуживания нескольких требований.

Для многоканальных систем оценены пороговые значения относительных пропускных способностей СМО, которые оказываются значительно ниже, чем у аналогичных систем с ординарным входным потоком.

В п. 3.3.2 рассмотрены СМО с групповым поступлением заявок и ординарным обслуживанием с очередью. Законы распределения значений времени между поступлением групп заявок и обслуживания приняты экспоненциальными. Закон распределения количества заявок в составе группы принят равномерным. Установлено, что заметно большую эффективность демонстрируют системы с опцией накопления очереди по сравнению с системами без нее. Результаты пороговой относительной пропускной способности для некоторых значений времени жизни заявок для системы с очередью и без нее, обслуживающей групповой входной поток заявок с максимальным размером группы, равным 4, представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Значения относительной пропускной способности систем с очередью и без нее

$\lambda = 10, \mu = 6$, размер группы 1-4										
время жизни заявки	0,3		0,5		1		2		3	
наличие накопителя	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
1 канал	0,14	0,23	0,15	0,23	0,15	0,24	0,15	0,25	0,15	0,25
2 канала	0,30	0,43	0,32	0,47	0,33	0,48	0,33	0,49	0,33	0,49
3 канала	0,45	0,59	0,48	0,66	0,50	0,71	0,50	0,73	0,50	0,74
4 канала	0,57	0,69	0,62	0,80	0,63	0,90	0,63	0,94	0,63	0,96
5 каналов	0,66	0,76	0,72	0,88	0,75	0,97	0,75	0,99	0,75	1,00

В п. 3.4 приведен сравнительный анализ эффективности разных систем. Показано, что относительная пропускная способность системы с ограниченным временем жизни при увеличении числа каналов обслуживания стремится к доле полностью обслуженных заявок ординарного потока.

В таблице 2 представлены средние значения относительной пропускной способности разных СМО с одинаковыми средними интенсивностями и одинаковым временем жизни заявок для входного набора параметров: экспоненциальный закон распределения интервалов времени между поступлением заявок (групп заявок) со средним $\lambda = 10$, экспоненциальный закон распределения значений времени обработки заявок со средним $\mu = 6$, срок жизни заявок, отсчитываемый с момента поступления, 0,5 врем. ед., количество заявок в группе равно 1 для ординарного потока или распределено равномерно от 1 до 4 (или от 1 до 10).

Таблица 2 – Значения относительной пропускной способности разных СМО с одинаковыми средними интенсивностями и одинаковым временем жизни заявок

Кол-во каналов	Без очереди				С очередью		
	простейший (аналит.)	ординарный	групповой 1-4	групповой 1-10	ординарный	групповой 1-4	групповой 1-10
1	0,375	0,368	0,147	0,067	0,566	0,237	0,109
2	0,658	0,682	0,324	0,150	0,871	0,467	0,217
3	0,840	0,853	0,484	0,233	0,937	0,663	0,322
4	0,938	0,922	0,617	0,312	0,948	0,802	0,425
5	0,980	0,922	0,721	0,389	0,950	0,883	0,523
6	0,994	0,944	0,800	0,460	0,950	0,920	0,615
7	1	0,950	0,856	0,528	0,950	0,936	0,694
8		0,950	0,892	0,589	0,950	0,943	0,762
9		0,950	0,918	0,644	0,950	0,947	0,815
10		0,950	0,931	0,694	0,950	0,949	0,855
...		...	...	...	...	...	...
100		0,950	0,950	0,950	0,950	0,950	0,950

Обнаружена еще одна характерная особенность полученных результатов – стремление всех типов систем при одних и тех же средних интенсивностях потоков и одинаковых значениях времени жизни заявок к одному пороговому значению.

Кроме того, после проведения масштабного имитационного эксперимента, выполненного для различных типов СМО с ограниченным временем жизни заявок, было установлено, что пороговая величина, к которой стремится доля полностью обслуженных заявок не зависит ни от интенсивности входного потока заявок, ни от его характера (группового или ординарного), ни от наличия или отсутствия очереди, а зависит только от интенсивности обслуживающих устройств и времени жизни заявок. Сводные данные приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Значения пороговой относительной пропускной способности СМО с ограниченным временем жизни заявок

		время жизни заявок (усл. ед. модельного времени)									
		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
интенсивность обслуживающих	1	0,1	0,18	0,26	0,33	0,39	0,45	0,50	0,55	0,59	0,63
	2	0,18	0,33	0,45	0,55	0,63	0,70	0,75	0,80	0,84	0,86
	3	0,26	0,45	0,59	0,70	0,78	0,83	0,88	0,91	0,93	0,95
	4	0,33	0,55	0,70	0,80	0,87	0,91	0,94	0,96	0,97	0,98
	5	0,40	0,63	0,78	0,87	0,92	0,95	0,97	0,98	0,99	0,99
	6	0,45	0,70	0,83	0,91	0,95	0,97	0,98	0,99	1	1
	7	0,50	0,75	0,88	0,94	0,97	0,99	0,99	1	1	1
	8	0,55	0,80	0,91	0,96	0,98	0,99	1	1	1	1
	9	0,59	0,84	0,93	0,97	0,99	1	1	1	1	1
	10	0,63	0,86	0,95	0,98	0,99	1	1	1	1	1

Четвертая глава «Повышение показателя экономической эффективности систем с фиксированным ограничением времени жизни заявок» посвящена нахождению времени приложения и величины управляющего воздействия на систему обслуживания группового входного потока заявок для максимально возможного повышения эффективности ее функционирования, которая определяется специальным экономическим критерием.

В п. 4. 1 представлена математическая модель одноканальной СМО с очередью и групповым входным потоком заявок.

Предположено, что заявки поступают группами фиксированного объема и помещаются в накопитель, откуда отбираются на обслуживание, и что срок жизни всех заявок в составе группы одинаков и значительно превышает среднее время их обработки. Важной особенностью таких СМО, является то обстоятельство, что по окончании срока жизни группы система теряет в общем случае множество заявок одновременно: одна заявка теряется, будучи в процессе обслуживания, все остальные выбывают из накопителя, находясь в процессе ожидания. Это неизбежно ведет к экономическим потерям. Для постановки задачи минимизации таких потерь в качестве критерия эффективности функционирования наиболее целесообразно использовать экономический показатель, а для ее решения необходим параметр, обеспечивающий возможность управления состоянием системы. Содержательный смысл такого параметра можно продемонстрировать на примере сферы реализации товаров с ограниченным сроком годности, приняв за него стоимость продажи товара. Очевидно, что, уменьшая цену реализации, можно ускорить темп процесса продажи. Тогда цель работы СМО будет сформулирована как достижение максимальной выручки от продажи того объема товаров, который будет реализован до истечения их срока годности. А задача – как нахождение момента времени приложения управляющего воздействия и его величины для получения максимально возможного экономического эффекта.

Приняты обозначения:

Q – объем группы заявок;

t_{end} – время жизни группы заявок;

R_1 – установленная первоначально стоимость обработки одной заявки;

$v_1(t)$ – функция интенсивности при первоначально установленной стоимости R_1 ;

t – момент времени принятия управляющего воздействия для интенсификации процесса обслуживания, $0 < t < t_{end}$;

R_2 – новая стоимость обработки одной заявки, установленная в момент принятия управляющего воздействия;

$v_2(t)$ – функция интенсивности при новой стоимости R_2 .

Количество обработанных заявок группы за установленный период их жизни может быть найдено по формуле:

$$Q_1 = \int_0^{t_{end}} v_1(t) dt. \quad (14)$$

Выручка за обслуживание заявок в количестве Q_1 определена следующим образом:

$$M_1 = R_1 * Q_1. \quad (15)$$

При применении в некоторый момент времени t управляющего воздействия общая выручка может быть найдена по формуле:

$$M_2 = R_1 \int_0^t v_1(t) dt + R_2 \int_t^{t_{end}} v_2(t) dt, \quad (16)$$

при соблюдении условия:

$$\int_0^t v_1(t) dt + \int_t^{t_{end}} v_2(t) dt < Q. \quad (17)$$

Задача максимизации общей выручки формулируется следующим образом:

$$M_2 = M_1 - R_1 \int_t^{t_{end}} v_1(t)dt + R_2 \int_t^{t_{end}} v_2(t)dt \rightarrow \max. \quad (18)$$

Поскольку значение M_1 фиксировано, то эта задача эквивалентна следующей:

$$M(t) = \int_t^{t_{end}} (R_2 v_2(t) - R_1 v_1(t))dt \rightarrow \max. \quad (19)$$

Так как функция $M(t)$ фактически представляет собой определенный интеграл с переменным нижним пределом от непрерывной функции, то верно равенство:

$$M'(t) = -R_2 v_2(t) + R_1 v_1(t) = 0. \quad (20)$$

Решением этого уравнения, будет критическая точка t^* , положение которой зависит от вида функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$. Для доказательства того, что она является точкой максимума функции $M(t)$ останется проверить достаточное условие существования точки экстремума или исследовать поведение функции в окрестности точки t^* . Решение задачи для конкретного вида функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$ приведено в тексте работы.

В п. 4.2 приведены результаты имитационных экспериментов, целью которых являлось отыскание условий повышения экономической эффективности функционирования СМО для детерминированного потока обслуживания.

Отличие постановки задачи от приведенной в п. 4.1., состоит в том, что полагаются известными $v_1(t)$ – функция интенсивности при первоначально установленной стоимости R_1 и $v_2(t)$ – зависимость нового темпа продажи от соотношения цен (R_1/R_2) и первоначального темпа ($v_1(t)$), где R_2 – новая сниженная цена товара. Целью являлось отыскание величины снижения стоимости товара для эффективной интенсификации процесса реализации и момента приложения управляющего воздействия.

На рисунке 4 приведена графическая иллюстрация результатов для постоянного темпа продажи при первоначальной цене R_1 и квадратичной зависимости между темпом продажи и соотношением цен.

При отсутствии управляющего воздействия суммарная выручка составила бы 76800 д. ед. Как видно из рисунка 3, существуют моменты времени снижения цены на некоторую величину, которые позволят увеличить сумму выручки. Оптимальным является снижение цены на 20 денежных единиц в момент времени 44. При принятии такого решения выручка составит 87040 д. ед.

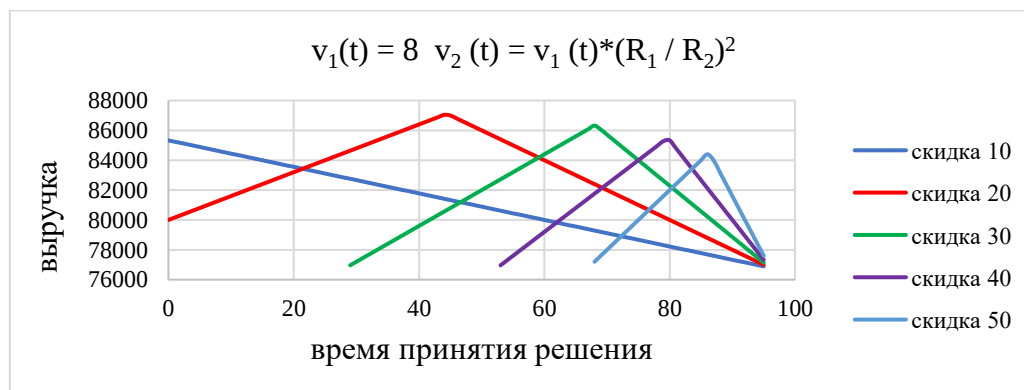


Рисунок 4 – Значения суммарной выручки при принятии решения о снижении цены

Анализ результатов имитационных экспериментов показал, что оптимальная величина снижения цены зависит только от вида зависимости между темпом продажи и соотношением цен, и не зависит от вида функции первоначального темпа продажи, что иллюстрируют графики, изображенные на рисунке 5.

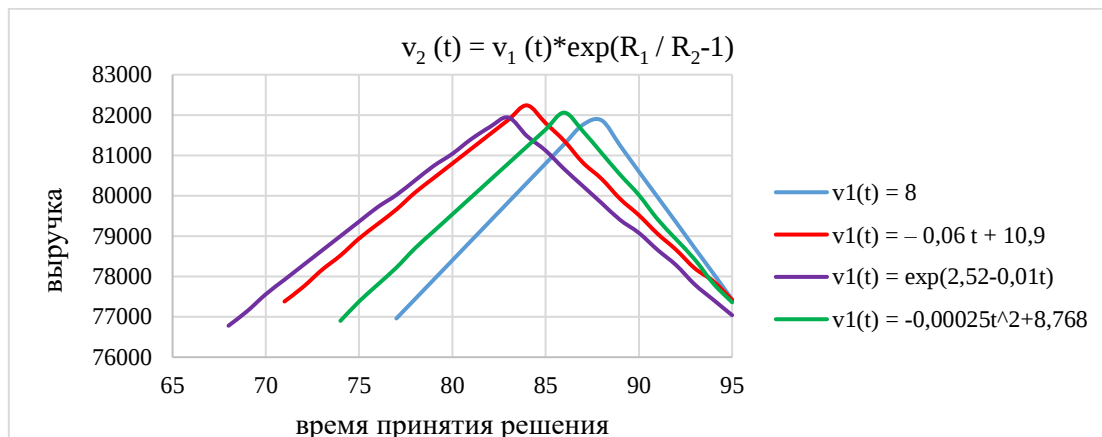


Рисунок 5 – Значения выручки для соотношения v_2 при принятии решения о снижении цены на 60 д. ед.

При проведении опытов с различными зависимостями между темпом продажи и соотношением цен удалось выяснить, что не всегда можно получить прирост суммарной выручки путем применения управляющего воздействия заявленного типа. Общим свойством зависимостей, при которых не достигается экономический эффект от снижения цены, является их вогнутость как функций от соотношения цен (R_1 / R_2).

В п. 4.3 приведено решение задачи повышения экономической эффективности функционирования СМО для случайного потока обслуживания, полученное с помощью имитационного моделирования.

Сначала рассмотрена постановка задачи, в которой время обслуживания заявок подчинено нормальному закону распределения. Полагается, что существует соотношение между стоимостью и темпом обработки требований, то есть при применении управляющего воздействия среднее время обслуживания заявок по измененной цене R_2 есть некоторая функция $\tau_2 = f(\tau_1, R_1, R_2)$, где τ_1 – среднее время обслуживания по цене R_1 . Вид функции τ_2 зависит от индивидуальных параметров системы и получается с помощью аппроксимации наблюдаемых данных.

Для входных параметров: $Q = 1000$ шт. – объем партии товара; $t_{end} = 96$ врем. ед. – срок годности партии товара; $R_1 = 100$ д. ед. – установленная первоначально цена товара; $\tau_1 = 7,5$ минут; $\sigma = 1$ (2, 3); $\tau_2 = \tau_1 / (R_1 / R_2)^2$ была проведена серия имитационных экспериментов. В таблице 4 представлены лучшие средние результаты по 1000 опытам для различных значений среднеквадратичного отклонения в порядке убывания процента прироста общей выручки.

На основании полученных результатов можно заключить, что с помощью имитационных экспериментов однозначно определена величина снижения цены обработки заявки, она составляет 20 д. ед. Средний процент прироста выручки для всех решений варьируется в малом диапазоне значений – (13,6; 14,14), что позволяет определить порядок величины процента прироста выручки с высокой точностью. Кроме того, результаты опытов для $\sigma = 1$ хорошо согласуются с итогами экспериментов, проведенных для постоянного темпа обслуживания и описанных в разделе 4.2.

Таблица 4 – Лучшие средние значения прироста выручки для $\tau_2 = \tau_1 / (R_1 / R_2)^2$

$\epsilon = 1$				$\epsilon = 2$				$\epsilon = 3$			
t^* (час)	R_2	частота	средний %	t^* (час)	R_2	частота	средний %	t^* (час)	R_2	частота	средний %
42	80	0,017	13,60	42	80	0,076	14,04	42	80	0,054	14,14
43	80	0,091	13,94	43	80	0,137	13,85	43	80	0,102	14,02
44	80	0,322	13,89	44	80	0,192	13,87	44	80	0,123	13,87
45	80	0,393	13,86	45	80	0,204	13,84	45	80	0,124	14,08
46	80	0,160	13,84	46	80	0,158	13,88	46	80	0,109	14,10
47	80	0,016	13,95	47	80	0,071	14,10	47	80	0,087	14,10
				48	80	0,067	13,90	48	80	0,09	13,79
								49	80	0,056	13,85

Еще одна серия имитационных экспериментов была выполнена для указанных выше входных параметров и соотношения $\tau_2 = \tau_1 / \exp(R_1 / R_2 - 1)$. В таблице 5 представлены лучшие средние результаты по 1000 опытам для различных значений среднеквадратичного отклонения в порядке убывания процента прироста общей выручки.

Таблица 5 – Лучшие средние значения прироста выручки для $\tau_2 = \tau_1 / \exp(R_1 / R_2 - 1)$

$\epsilon = 1$				$\epsilon = 2$				$\epsilon = 3$			
t^*	R_2	частота	средний %	t^*	R_2	частота	средний %	t^*	R_2	частота	средний %
88	40	0,854	7,15	88	40	0,680	7,16	88	40	0,575	7,14
87	40	0,139	7,16	87	40	0,246	7,41	87	40	0,217	7,55
79	50	0,005	7,10	80	50	0,039	7,23	80	50	0,069	7,52
80	50	0,002	6,90	79	50	0,026	7,51	79	50	0,038	7,72
								89	40	0,029	6,51

Здесь также обнаруживается совпадение результатов с итогами экспериментов, осуществленных для постоянного темпа обслуживания.

Следующий этап исследования был посвящён решению задачи, постановка которой предполагает, что время обслуживания заявок подчинено треугольному закону распределения, а соотношение между стоимостью и темпом обработки требований является непрерывной кусочно-линейной функцией.

На рисунке 6 изображены кривые зависимостей времени обслуживания заявок от соотношения цен: непрерывной кусочно-линейной функции, построенной по 4-м точкам и квадратичной функции, которая использовалась ранее – $\tau_2 = \tau_1 / (R_1 / R_2)^2$.

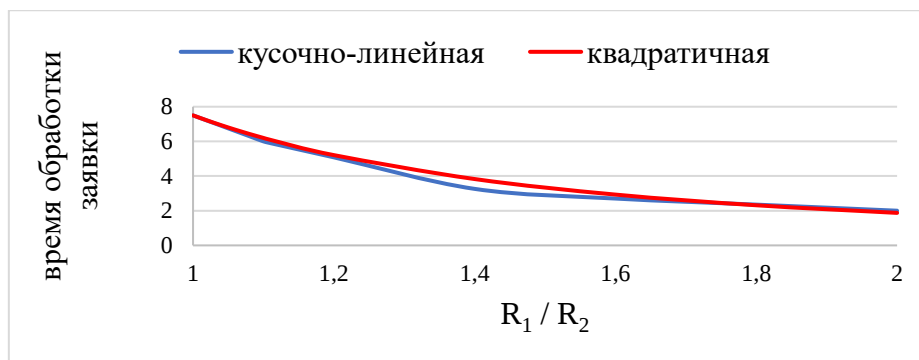


Рисунок 6 – Кривые зависимостей времени обслуживания заявок от соотношения цен

Для входных параметров: $Q = 1000$ шт. – объем партии товара; $t_{end} = 96$ врем. ед. – срок годности партии товара; $R_1 = 100$ д. ед. – установленная первоначально цена товара; $\tau_1 = 7,5$ минут; $\sigma = 1$; и непрерывной кусочно-линейной функции τ_2 , построенной по точкам: (100 д. ед., 8 шт./час), (90 д. ед., 10 шт./час), (70 д. ед., 20 шт./час), (50 д. ед., 30 шт./час) была проведена серия имитационных экспериментов. В результате локализованы две точки принятия решения об интенсификации продаж. Первый вариант – снижение цены товара до 70 д. ед. в момент времени 76 часов с момента начала продаж. Такое решение позволит увеличить выручку примерно на 15 %. Второй вариант – снижение цены товара до 80 д. ед. в момент времени 47 часов с момента начала продаж. Это решение позволит увеличить выручку примерно на 14 %. Следует отметить, что второе решение близко к результатам исследований, проведенных для квадратичной зависимости времени обслуживания от соотношения цен.

Заключение содержит основные результаты исследования, рекомендации по их применению, перспективы дальнейшего развития темы.

В приложении А приводится акт о внедрении результатов диссертационной работы. **В приложении В** – свидетельство о регистрации электронного ресурса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты исследования заключаются в следующем:

1. Построена математическая модель системы массового обслуживания пуассоновского потока заявок с фиксированным ограничением времени жизни без опции накопления очереди; построена математическая модель одноканальной системы массового обслуживания группового потока заявок с фиксированным ограничением времени жизни с опцией накопления очереди.

2. Получено аналитическое решение задачи нахождения основных характеристик СМО для простейшего входного потока и равномерно распределенного времени жизни заявок на основе концептуальной модели одноканальной системы с ожиданием, разработанной Б.В. Гнеденко и И.Н. Коваленко.

3. Построены имитационные алгоритмы функционирования СМО для разных систем массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок: с ожиданием и без него, одноканальных и многоканальных, с ординарным и групповым поступлением требований. Осуществлена их программная реализация на языке С#. Проведена верификация имитационных моделей путем сравнения результатов их работы с аналитическими вычислениями.

4. Проанализированы характеристики систем массового обслуживания с фиксированным ограничением времени жизни заявок. Найдено время жизни заявок, при котором оно теряет свое влияние на поведение системы и делает бесполезным

управление ею. Получено пороговое значение относительной пропускной способности системы в стационарном состоянии, обслуживающей поток заявок с фиксированным ограничением времени жизни.

5. Предложен экономический критерий эффективности функционирования одноканальной системы массового обслуживания группового потока заявок фиксированным ограничением времени жизни. Найдены момент времени и величина управляющего воздействия на систему для максимально возможного повышения значения критерия эффективности.

Рекомендуется на этапах проектирования и предпроектной проработки систем, моделируемых средствами теории массового обслуживания заявок с фиксированным ограничением времени жизни, принимать во внимание выводы, изложенные в данной работе.

Перспективы дальнейшей разработки темы должны охватывать построение аналитических выражений для оценки эксплуатационных характеристик, формирование правил принятия решений для повышения эффективности, исследование влияния законов распределения случайных величин и дисциплин обслуживания на показатели эффективности функционирования систем массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в журналах, входящих в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, рекомендованных ВАК Министерства науки и высшего образования Российской Федерации

1. Шайдуллина, Н. К. Проблема эффективного администрирования системы массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок / Н. К. Шайдуллина, Е. А. Печеный, Н. К. Нуриев // Современные наукоемкие технологии. – 2022. – В.7. – С.69–73.

2. Шайдуллина, Н. К. Имитационное моделирование процесса администрирования продажи товаров с ограниченным сроком годности / Н. К. Шайдуллина // Вестник технологического университета. – 2022. – Т.25, в.12. – С.158–161.

3. Шайдуллина, Н. К. Модель управления системой массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок / Н. К. Шайдуллина, Е. А. Печеный, Н. К. Нуриев // Научно-технический вестник Поволжья. – 2023. – №7. – С. 102–105.

4. Шайдуллина, Н. К. Моделирование процесса администрирования системы массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок / Н. К. Шайдуллина, Е. А. Печеный, Н. К. Нуриев // Современные наукоемкие технологии. – 2023. – В.11. – С.81–86.

5. Шайдуллина, Н. К. Задача управления системой массового обслуживания с ограниченным временем жизни заявок / Н. К. Шайдуллина // Научно-технический вестник Поволжья. – 2023. – №12. – С.157–159.

6. Шайдуллина, Н. К. Численный анализ поведения смешанного потока заявок с ограниченным временем жизни / Н. К. Шайдуллина, Е. А. Печеный, Н. К. Нуриев // Современные наукоемкие технологии. – 2024. – №10. – С. 94–99.

7. Шайдуллина, Н. К. Математическое моделирование систем массового обслуживания заявок с ограниченным временем жизни / Н. К. Нуриев, Н. К. Шайдуллина, Е. А. Печеный // Вестник Технологического университета. – 2024. – Т. 27, № 12. – С. 165–169.

8. Шайдуллина, Н. К. Математическое моделирование и решение задачи нахождения характеристик системы массового обслуживания заявок со случайным временем жизни / Н. К. Шайдуллина, Н. К. Нуриев, Е. А. Печеный // Современные наукоемкие технологии. – 2026. – №6. – С. 204–209.

Свидетельство о регистрации электронного ресурса

9. Шайдуллина Н. К. Эффективное обслуживание группы заявок с ограниченным временем жизни // Свидетельство о регистрации электронного ресурса №25476. М.: ОФЭРНиО, 2025.

Публикации в других научных изданиях и сборниках материалов конференций

10. Шайдуллина, Н. К. Математическое моделирование процесса администрирования продажи товаров с ограниченным сроком годности / Н. К. Шайдуллина, Н. К. Нуриев, Е. А. Печеный // Сборник материалов XIII Международной научно-практической конференции «Вызовы современности и стратегии развития общества в условиях новой реальности». – Москва: Издательство «Алеф», 2022. – С.204–207.

11. Шайдуллина, Н. К. Результаты численной обработки смешанного потока заявок с ограниченным временем жизни / Н. К. Шайдуллина, Е. А. Печеный, Н. К. Нуриев // Математические методы в технике и технологиях. – 2025. № 12-3. – С. 98–101.

12. Шайдуллина, Н. К. Численное решение задачи эффективного обслуживания группы заявок с ограниченным временем жизни / Н. К. Шайдуллина // Сборник материалов XXXIX Международной научно-практической конференции «Актуальные проблемы науки и образования в условиях современных вызовов». – Москва: ООО «Издательство Академическая среда», 2025. – С.408–413.